

<36603243570018

R

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen
und literarischen Nachrichten begleitet
in alphabetischer Ordnung

von

Georg Simon Klügel
Professor der Mathematik und Physik auf der Friedrichs-Universität zu Halle, Mitgliede der Akademien und Societäten der Wissenschaften zu Petersburg, Berlin, Göttingen und Frankfurt an der Oder, Ehrenmitgliede der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig.

Erste Abtheilung
Die reine Mathematik.

Erster Theil
von A bis D
mit acht Kupfertafeln.

Leipzig
im Schwickertschen Verlage 1803.


BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Wörterbücher über wissenschaftliche Kenntnisse sind, ungeachtet der ungünstigen gegen sie oft gefällten Urtheile, dennoch sehr beliebt geblieben, weil sie denjenigen, die eine genaue, zusammenhangende Einsicht in einem Fache sich zu verschaffen nicht Zeit oder Fähigkeit haben, ein bequemes Hülfsmittel sind, sich von einzelnen Materien nach ihren Bedürfnissen zu unterrichten. Dadurch ist selbst in der Mathematik, so vorzüglich sie auch einer systematischen Behandlung fähig ist, die nach der Folge der Buchstaben zerstückte Anordnung ihrer Lehren eine brauchbare Form des Vortrages, desto mehr, weil es in dieser Wissenschaft schwieriger ist, über die Anfangsgründe hinauszugehen, und aus den ausführlichern Werken einzelne Untersuchungen herauszunehmen, ohne sie ganz zu

studieren. Die mathematischen Lehren machen nicht eine Folge wie die Glieder einer Kette aus, sondern mehrere Ketten, die durch gewisse Hauptglieder verbunden sind. Man kann also einzelne Sätze oder kleine Systeme von Lehrsätzen recht gut abgesondert aufstellen, wenn man von denjenigen allgemeinen Sätzen ausgeht, an welche sie sich knüpfen. Dadurch wird der Zusammenhang desto deutlicher, welchen man in einem System erst aufsuchen muß. Der systematische Vortrag muß oft Materien, welche dem Inhalte nach zusammen gehören, trennen, weil die Sätze, worauf die schwerern unter ihnen beruhen, vorher erwiesen werden müssen, ehe sie aufgestellt werden können. In den Artikeln eines Wörterbuchs kann man hingegen unter eine Rubrik alles bringen, was dahin gehört, das schwerere wie das leichtere. Selbst für Geübte gewährt ein Wörterbuch mehr als eine Bequemlichkeit zum Gebrauch.

Da ich hier die Vortheile der alphabetischen Anordnung aus einander setze, weil ich ein mathematisches Wörterbuch auszuarbeiten übernommen habe, so will ich doch dadurch dem systematischen Vortrage

nichts vergeben; vielmehr empfehle ich dem Leser die zerstreuten, sich auf einander beziehenden Artikel in einer guten Ordnung zusammen zu stellen, wozu ich am Ende durch ein systematisches Verzeichniß der vornehmsten Artikel behülflich seyn werde. In dem Artikel, Analysis als Wissenschaft, habe ich schon einen Abriß über den Inhalt der Analysis endlicher Größen mitgetheilt, nach welchem man sich die dazu gehörigen Lehren aus dem Werke bekannt machen mag. Ich werde, so wie es in diesem ersten Theile geschehen ist, das zusammengehörige immer in einen Artikel zu einander bringen, wenn auch dieser dadurch fast zu einer förmlichen Abhandlung erwachsen sollte, werde aber durch bequeme Abtheilungen für die leichte Uebersicht des Ganzen sorgen.

Die reine oder abstracte Mathematik habe ich von der angewandten getrennt, und ihr eine eigene Abtheilung, nach der alphabetischen Folge der zu ihr gehörigen Artikel, gewidmet. Dieses war nöthig, damit der Leser die theoretischen Sätze, wovon bey der Anwendung Gebrauch gemacht wird, alle zur Hand hätte. Es wäre zu unbequem aus vielen

Bänden die Hülfssätze zusammen zu suchen. Auch würde mich die Ausarbeitung so vieler ungleichartigen Materien zu sehr ermüdet und zerstreut haben.

Es scheint zuträglich, daß auch die physische angewandte Mathematik von der technischen getrennt werde, und jede eine besondere Abtheilung erhalte. Ein allgemeines Register der Artikel aus allen drey Abtheilungen wird jeden leicht nachweisen.

Dieser erste Theil ist nicht so weit fortgerückt, als ich es bey dem Anfange der Ausarbeitung erwartete. Es sind aber in demselben viele Materien zusammen gekommen, die eine ausführlichere Behandlung erforderten. Die literarischen Nachrichten haben hier auch beträchtlich vielen Raum eingenommen.

Dieses Wörterbuch ist zunächst für solche bestimmt, die mit den ersten Anfangsgründen schon bekannt sind, und ihre Kenntniß über diese hinaus erweitern wollen. Es soll ihnen mehr leisten, als selbst ausführliche mathematische Lehrbücher, und wird dadurch, bey dem gegenwärtigen großen Reichthum der

Mathematik einen nicht geringen Umfang erhalten. Bloß die Sätze und die Auflösungen der Aufgaben hinzustellen, und wegen der Gründe auf andere Schriften zu verweisen, wäre für diejenigen Leser, die diese Schriften nicht zur Hand hätten, sehr unbefriedigend. Mathematische Beweise lassen sich nicht so leicht nachschlagen und verstehen, als Citate in historischen und philologischen Schriften. Auf die gute Form der Beweise, welche ich mir immer sehr habe angelegen seyn lassen, kommt auch viel an. Ohne die Beweise und die nöthigen Erörterungen versteht man oft nicht die Sätze und die Auflösungen der Aufgaben. Die Mathematik ist keine Wissenschaft zum Auswendiglernen. Bisweilen habe ich, bey umständlichern Beweisen und weniger wichtigen Sätzen, auf andere Schriften verwiesen, um den Raum zu ersparen. Die Beweise der Elementarsätze habe ich weggelassen, oder nur kurz in dem Vortrage angedeutet. Welchen Umfang ein Artikel des Wörterbuchs zu erhalten hat, muß in jedem Falle beurtheilt werden. Was lehrreich, brauchbar oder auf irgend eine Art kunstreich ist, darf nach meinem Ermessen in einem Werke, das vielen die Stelle einer Bibliothek vertreten soll, nicht fehlen.

Was veraltet ist, muß darin zwar, wie in einem Archiv aufbewahrt, aber sehr kurz abgethan werden.

Literarische Nachrichten, besonders in Rücksicht der Sachen selbst, habe ich, wo es erheblich und mir thunlich war, beygebracht, und werde es mit Dank erkennen, wenn gelehrte Leser mir besonders in diesem Fache Ergänzungen mittheilen wollen.

In der angewandten Mathematik werde ich dasjenige, was zu der Naturbeschaffenheit der Dinge, oder zu technischen Einrichtungen gehört, nur in Rücksicht auf die mathematischen Untersuchungen anführen. Diese werden der Hauptzweck der Behandlung seyn. Dadurch wird sich dieser Theil des Wörterbuchs von physikalischen und technischen Werken dieser Form unterscheiden.

Ich wünsche, daß das von mir unternommene Werk zur Ausbreitung mathematischer Kenntnisse beförderlich werde.

Halle, im Junius
1803.

Mathematisches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit literarischen Nachrichten, in alphabetischer Ordnung.

Erste Abtheilung.

Arithmetik, Analysis und Geometrie, die niedere und die höhere.

A.

Abacista, in dem mittlern Zeitalter ein Rechner. S. den folgenden Artikel.

Abacus, ein Wort griechischen Ursprungs, welches einen Tisch bedeutet, worauf allerley Gefäße, nutzbare, oder Kunst- und Prachtstücke, aufgestellt wurden. Zweytens ist es eine oder andere Art von Rechenbrett, dessen sich die Alten bedienten, weil ihre Zahlzeichen zu arithmetischen Operationen ungeschickt waren. Von diesen und ähnlichen Einrichtungen handelt der Artikel, **instrumental Arithmetik**. Drittens hieß Abacus in den mittlern Zeiten die Rechnung mit dekadischen Ziffern. Der in dem Artikel: Zahlzeichen, angeführte **Leonardus von Pisa** (um 1200) nennt sein Buch über die dekadische Rechenkunst, Liber abaci. **Jodocus Clichthoväus** gab 1503 des Jacobi Fabri Introductio in Boëthii Arithmeticam heraus, welcher er eine praktische Arithmetik bey-

A

fügte, unter dem Titel: Praxis numerandi, quem Abacum vocant. Daher hießen Rechner Abacistae. Ein Chronikenschreiber, **Wilhelm von Malmesbury**, im 12ten Jahrh., sagt von dem Mönch **Gerbert**, der unter dem Namen Sylvester II. Papst ward, daß er von den Saracenen den Abacus zuerst erhalten, und Regeln darüber mitgetheilt habe, welche die schwitzenden Abacisten kaum verstehen konnten. Ein geschickter Rechner gegen das Ende des vierzehnten Jahrhunderts, Paulus de Abaco, erhielt daher seinen Beynahmen. **Lucas de Burgo**, der älteste arithmetische Schriftsteller unter denen, die durch den Druck gemein gemacht sind, sagt, daß das Wort Abacus nach einigen aus Modus arabicus gemacht sey, von andern aus dem Griechischen hergeleitet werde. Jene Ableitung ist doch etwas besser, als die von einem phönizischen Worte Abac, welches Staub bedeutete, weil man Tafeln mit feinem Sand oder Staub bestreuet habe, um darauf Ziffern oder Zahlzeichen zu zeichnen, die man nach vollführter Rechnung gleich wieder auswischen konnte. — Viertens bey den Neuern bedeutet Abacus eine Tabelle zum Gebrauch bey Rechnungen, als Abacus Pythagoricus für das Einmahleins; Abacus Logisticus für die Sexagesimalrechnung; Abacus numerorum primorum, eine Tafel der Primzahlen; Abacus Sinuum, eine Tafel der Vielfachen der Sinus bis zum Neunfachen für die einzelnen Grade, in Lamberts Zusätzen zu den — Tabellen.

Abgekürzte Pyramidalzahl. S. Pyramidalzahl.

Abgekürzte Pyramide. S. Pyramide.

Abgekürzter Kegel. S. Kegel.

Abgesonderte Theile in einem rechtwinklichten sphärischen Dreyeck. S. Nepers Regel zur Berechnung rechtwinkl. sphär. Dreyecke.

Abkürzung, ist die Vertauschung eines zusammengesetzten algebraischen Ausdrucks mit einem einfachen Zeichen, um die Rechnung zu erleichtern, und sie besser übersehen zu können. Wenn z. B. ein Glied einer Gleich-

ung die Form $\frac{(a+b)(c+d)}{e(f+g)}x^2$ hat, so setze man dafür Ax^2 oder px^2. In der combinatorischen Analysis werden sehr viele Abkürzungen gebraucht, die von Hindenburg sehr zweckmäßig eingerichtet sind, um eine verwickelte Zusammensetzung möglichst faßlich zu machen. Eine ganze Gleichung wird in der höhern Analysis durch ein einziges Symbol angedeutet, wie $X = o$ wo X ein aus einer unbekannten x und gegebenen Größen zusammengesetzter Ausdruck ist. Gewisse Formen von Größen, z. B. die Binomialcoefficienten die Bernoullischen Zahlen, mögen vortheilhaft mit eigenen Symbolen bezeichnet werden, um diejenigen Größen, zu deren Bildung sie gebraucht werden, leicht darzustellen.

Abgewickelte Linie. S. Evolute.

Ablange Rundung. S. Oval.

Ablange Vierung (Oblongum) ist ein Rechteck mit ungleichen Seiten, welches gewöhnlich ein Rechteck schlechtweg heißt.

Ablanges Sphäroid. S. Sphäroid.

Abmessung (Dimensio) ist eine Linie, nach welcher die Ausdehnung einer geometrischen Größe gemessen werden mag. In dem geometrischen Körper kann man durch jeden Punct drey Linien ziehen, deren jede auf die beiden andern senkrecht steht, und die Ausdehnung des Körpers nach diesen drey Linien messen oder sich auch nur vorstellen. Diese drey Meßlinien heißen in besondern Rücksichten Länge, Breite Dicke oder Höhe. Ein Körper ist demnach eine Ausdehnung von drey Abmessungen oder Dimensionen. Auf einer ebenen Fläche lassen sich durch einen Punct nur zwey auf einander senkrechte Linien ziehen, die oft Länge und Breite heißen; auf einer krummen Fläche eben so durch einen Punct nur zwey krumme (oder eine krumme und eine gerade) Linien, die sich, in Betracht der Lage ihrer berührenden Linien, unter einem rechten Winkel schneiden. Eine Fläche ist daher eine Ausdehnung

von zwey Abmessungen. Eine Linie, gerade oder krumme, ist eine Ausdehnung von einer einzigen Abmessung.

Man hat den Begriff von Dimension oder Abmessung auch auf Rechnungsgrößen übergetragen. Eine Fläche ist dem Product zweyer Zahlen proportional, welche bey Rechtecken ihre beiden Seiten sind. Daher sieht man das Product ab zweyer Zahlen, a, b, als gleichgültig mit dem Rechtecke an, dessen Seiten sich wie die Zahlen a, b verhalten, und giebt den Factoren, a, b, eine Abmessung, dem Producte ab zwey Abmessungen. Eben so, da ein Körper dem Product dreyer Zahlen proportional ist, die für ein senkrechtes Parallelepipedum die drey Seitenlinien desselben sind, sieht man das Product abc dreyer Zahlen, a, b, c, als gleichgültig mit einem Körper an, und giebt demselben drey Abmessungen, den Factoren eine einzige. Ob nun gleich ein Ausgedehntes nicht mehr als drey Abmessungen haben kann, so fährt man doch bey Rechnungsgrößen nach der Analogie fort, ihnen so viele Abmessungen beyzulegen, als sie Factoren haben, denen man eine einzige Abmessung giebt. So ist abcd eine Größe von vier, abcde, von fünf Abmessungen. Daher sind auch die Benennungen für die Potenzen über die dritte hinaus aus der Geometrie genommen, ob man sie gleich gar nicht geometrisch darstellen kann. (S. Potenz §. 6. 8.) Die Factoren einer Größe betrachtet man als Abmessungen, wenn man sie auf keine Einheit bezieht, in Gegensatz gegen numerische Factoren, so daß dadurch jene Größe eine bestimmte Form erhält, die entweder mit einer der drey geometrischen Formen übereinstimmt, oder analogisch gebildet ist. Größen von vier oder mehr Dimensionen kann man als ein Glied eines zusammengesetzten Verhältnisses, das aus Verhältnissen geometrischer Größen entsteht, betrachten.

Eine gebrochne Größe hat so viele Abmessungen als der Unterschied der Abmessungen des Zählers und Nenners anzeigt. Z. B. der Bruch $\frac{x^5 + ax^4 + b^3x^2 + c^5}{x^2 + dx}$

hat drey Abmessungen. Hat der Nenner mehr Abmessungen, als der Zähler, so ist die Anzahl der Dimensionen negativ. Jener Bruch umgekehrt hat — 3 Dimensionen.

Ist die Anzahl der Abmessungen im Zähler und Nenner gleich groß, so ist der Bruch eine Größe von 0 Abmessungen, das ist eine bloße Zahl, z. B. $\frac{ab}{cd}$ ist die Zahl, welche angiebt, wie vielmahl die Fläche cd in der ab enthalten ist, wenn nämlich diese Producte Flächen darstellen.

Eine Zahl ist eine Größe von 0 Abmessungen. Sie kann als Multiplicator oder Divisor nur die Größe (Quantität), nicht die Beschaffenheit ändern.

Die Quadratwurzel aus der Größe a ist eine Größe von der Abmessung $\frac{1}{2}$, wenn a eine Größe von einer Abmessung ist. Denn diese würde zwey Abmessungen haben, wenn der Wurzel eine beygelegt würde. So ist $\sqrt[3]{a}$ eine Größe von der Abmessung $\frac{1}{3}$. Nach derselben Analogie ist $\sqrt[n]{a^m}$ oder $a^{\frac{m}{n}}$ eine Größe von $\frac{m}{n}$ Abmessungen.

Bey der Anwendung der Rechnung auf die Geometrie müssen alle Theile des Ausdrucks einer Größe gleich viele Abmessungen haben, oder homogen seyn. Denn nur gleichartige Größen lassen sich zusammen zählen, oder eine von der andern abziehen.

In einer Formel für geometrische Größen können sehr wohl Producte von mehr als drey Abmessungen vorkommen, nur werden diese immer durch andere Producte dividirt seyn, so daß der Unterschied der Dimensionen im Dividendus und Divisor nicht über Drey groß ist, wenn die ganze Formel eine geometrische Größe darstellen soll. So ist $\frac{abcd}{ef}$ eine Fläche. Denn wenn man sie so dar-

stellt $\frac{ab}{ef} \times cd$, so ist der Bruchfactor eine bloße Zahl. Daher ist auch $\frac{abcd}{ef + gh}$ eine Fläche, da der Divisor hier ebenfalls eine Fläche oder Größe von zwey Abmessungen bedeutet. Der Bruch $\frac{x^6 + ax^4 + b^3x^2 + c^5}{x^2 + dx}$ stellt einen Körper dar.

Wenn eine Linie oder eine Fläche oder ein Körper zur Einheit genommen wird, um die derselben gleichartigen Größen dadurch auszudrucken, so verschwindet die Homogeneität, wird aber wieder hergestellt, wenn in jedem Gliede einer Formel eine solche Potenz der Einheit, die alsdann ihr Symbol bekommt, zugesetzt wird, daß in allen Gliedern die Anzahl der Abmessungen gleich groß ist. Bey trigonometrischen Rechnungen kommt dies häufig vor. Die Sinus, Tangenten und Secanten sind für den Gebrauch der Rechnung bloße Zahlen, die sich auf einen Halbmesser, gleich der Einheit, beziehen. Z. B. der numerische Sinus eines Winkels sey $= x$, der Sinus des dreyfachen Winkels $= z$, so ist $z = 3x - 4x^3$. (Goniometrie, IV.) Soll hieraus eine geometrische Formel hergeleitet werden, so hat man $\frac{x}{r}$ für x, und $\frac{z}{r}$ für z zu setzen, wenn r den Halbmesser für die Kreisbogen zu den Sinus andeutet. Dadurch erhält man die Gleichung $r^2 z = 3r^2 x - 4x^3$, wo alle Theile drey Dimensionen haben.

Ausser der Trigonometrie ist es selten rathsam, eine geometrische Größe zur Einheit zu machen, und dafür 1 zu schreiben. Die Formeln verlieren an der Symmetrie; man sieht die Relation der andern Größen gegen die zur Einheit genommnene weniger deutlich ein; und man entbehrt den Vortheil, Rechnungs- oder Schreibfehler in Betreff der Factoren durch die Ungleichheit der Dimensionen zu entdecken. In der Astronomie pflegt oft der mittlere Ab-

stand der Erde von der Sonne zur Einheit genommen zu werden.

Der Verfasser des Artikels, Dimension, in der Encyclop. méthodique, d'Alembert, führt an, daß jemand den Gedanken gehabt hätte, die Zeit als eine vierte Dimension einzuführen, so daß das Produkt aus einer körperlichen Größe in die Zeit eine Größe von vier Dimensionen vorstelle. Er fügt hinzu, man könne dagegen zwar etwas einwenden, doch verdiene der Gedanke bemerkt zu werden, wenn es auch nur wegen der Neuheit wäre. Allein man hat hiebey nicht bedacht, daß Zeit sich allemal auf eine Einheit bezieht, und daß daher mit einer Zeit multipliciren, zugleich mit dieser Zeiteinheit dividiren ist, daher in der That mit einer Größe von der Dimension Null oder einer bloßen Zahl multiplicirt wird.

Abschnitt (Segmentum) einer Figur ist ein Theil ihrer Fläche, der von einer geraden, durch zwey Puncte des Umfanges gezogenen, Linie abgeschnitten wird. Ist der Umfang krummlinicht, so wird der Abschnitt durch einen Bogen der krummen Linie und die gerade Linie begränzt. Eine Figur mit einer in sich zurücklaufenden Umfangslinie wird durch die schneidende Linie in zwey Abschnitte getheilt. Ein Kreis wird durch den Durchmesser in zwey gleiche Abschnitte getheilt; durch jede andere schneidende Linie in zwey ungleiche. Den Inhalt des Abschnittes eines Kreises oder einer andern krummlinichten Figur zu finden, lehrt die Integralrechnung. (S. Quadratur.)

Abschnitt eines Körpers, ist ein Theil desselben, der von einer durch den Körper gelegten Ebene abgeschnitten wird. Der Abschnitt einer Kugel wird durch einen Theil ihrer Oberfläche und eine Kreisfläche begränzt, weil die Durchschnitte einer Kugel mit einer Ebene Kreisflächen sind. Den Inhalt eines körperlichen Abschnittes zu finden, gehört zu den Anwendungen der Integralrechnung. (S. Cubatur.) Der Abschnitt eines Cylinders oder Kegels, an dessen krummen Oberfläche kein Theil

ganz cylindrisch oder konisch ist, heißt ein hufförmiger Abschnitt, und ist ein etwas schweres Beyspiel der Cubatur. In der Baukunst kommt eine Anwendung davon vor. (S. hufförmiger Abschnitt.)

Abschnittswinkel (Angulus Segmenti) ist der von dem Umfange eines Kreises und einer Chorde eingeschlossene Winkel, welchen die berührende Linie an dem Durchschnitte des Kreises und der Chorde mit dieser macht. In (Fig. 1. T. 1.) ist ADBE ein Kreis, AB eine Chorde, FAG die in A berührende, so ist GAB der Winkel des Abschnittes AEB, und FAB der Winkel des Abschnittes ADB.

Der **Winkel in einem Abschnitte** (Angulus in Segmento) ist der Winkel, dessen Spitze in den Bogen des Abschnittes fällt, und dessen Schenkel durch die Endpuncte desselben gehen. So ist der spitze ADB der Winkel in dem größeren Abschnitte, und der stumpfe AEB der Winkel in dem kleinern Abschnitte.

Der Winkel GAB ist gleich dem W. ADB und FAB dem AEB. (Euklides III. 32.)

Abscisse. S. Coordinaten.

Absolute Zahl oder Größe überhaupt ist diejenige, bey welcher schlechtweg nur auf die Quantität gesehen wird, ohne eine Beziehung auf andere bey ihr zu beachten, als ob sie positiv oder negativ zu nehmen, wenn sie eine Linie ist, nach welcher Gegend sie zu ziehen sey. Wachsthum einer absoluten Größe ist Vergrößerung der Quantität; Abnehmen, Vermindrung derselben, dagegen eine negative Größe als wachsend betrachtet wird, wenn ihre Quantität durch Addition einer positiven Größe vermindert wird, und als abnehmend bey der Addition einer negativen.

Absolute Zahl wird auch das gegebene Glied einer Gleichung genennt, welches so groß ist als alle übrigen Glieder zusammen genommen, wenn es nämlich einen Theil der Gleichung allein ausmacht. Als in der Gleich-

ung $x^2 + 12x = 85$ ist 85 die absolute Zahl, da sie $= 25 + 12 \cdot 5$ ist. Vita nennt dieses Glied das Homogeneum comparationis. Eigentlicher sollte dieses Glied nur das gegebene heißen. Stifel nennt es die ledige Zahl, in der Ausgabe der Coß von Rudolph.

Absolut wird auch in der Lehre von der Bewegung vom Raum und Bewegung gebraucht.

Abstand eines Punctes von einer geraden Linie oder Ebene ist das Perpendikel, welches von dem Puncte auf die Linie oder Ebene gelassen wird, als die kürzeste unter allen Linien, die von dem Puncte dahin gezogen werden können. Ist die Linie eine krumme, so kann man entweder gar nicht nach einem Abstande des Punctes von derselben fragen, oder man muß darunter eine gerade Linie verstehen, welche die krumme Linie unter einem rechten Winkel schneidet. Diese ist die kürzeste von allen an sie gezogenen, wenn nicht etwa mehrere, die krumme Linie senkrecht schneidende, Linien von dem Puncte aus gezogen werden können. Mit dem Abstande eines Punctes von einer krummen Fläche ist es eben so beschaffen.

Abstand einer Linie von einer ihr parallelen ist die senkrechte von einem Punkte jener auf diese. Diese ist allenthalben von gleicher Größe. S. Parallelen.

Abstand zweyer Puncte auf einer Kugelfläche ist der Bogen eines großen durch sie gelegten Kreises, und zwar der kleinere zwischen ihnen enthaltene.

Abstract ist, was unabhängig von physischen Beschaffenheiten gedacht wird.

Abstracte Mathematik, oder die reine, ist der Theil dieser Wissenschaft, worin die Größe und ihre Formen an und für sich, als bloß in der Vorstellung vorhanden, betrachtet werden. Sie begreift die Arithmetik, Analysis und Geometrie. Doch möchte man auch die abstracte Lehre von der Bewegung dahin zu rechnen haben, so fern man dabey bloß hypothetisch verfährt, ohne Anwendungen auf die Wirklichkeit. S. Mathematik.

Abstracte Zahl ist eine solche, bey welcher die Einheit unbestimmt gelassen wird, was man auch **unbenannte Zahl** nennt. Z. B. 12 ist eine abstracte Zahl, 12 Fuß eine concrete oder benannte Zahl.

Absurd (Absurdum), ein Widerspruch der Folgerungen gegen die gemachte Annahme, oder gegen einen Grundsatz oder erwiesenen Satz. Bey einigen elementarischen Sätzen, und oft bey dem Umkehren eines Satzes wird die Beweisart gebraucht, daß man zeigt, das Gegentheil des behaupteten Satzes sey unmöglich, der Satz also wahr, wenn nämlich entweder nur das eine oder das andre Statt finden kann. Man nennt sie eine reductio ad absurdum, oder einen **indirecten**, oder **apagogischen** Beweis. In dem ersten und dritten Buche der Elemente von Euklides finden sich viele Beyspiele dieser Art. Z. B. in dem 19. S. des 1. B. wird gezeigt, daß, wenn in einem Dreyeck dem größern Winkel nicht die größere Seite gegen über läge, der als der größere angenommene Winkel der kleinere seyn müßte, so daß dadurch die Annahme aufgehoben wird.

Abundans numerus, überschießende Zahl, ist diejenige, deren ganze Theile mit Ausschluß ihrer selbst, die Einheit aber mit genommen, zusammen größer sind als die Zahl selbst, z. B. die Zahl 30 hat die einfachen Factoren, 1, 2, 3, 5. Die Summe ihrer Theiler, $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15$, oder 42, ist größer als die Zahl 30. Eine Formel für Zahlen von dieser Beschaffenheit findet man auf folgende Art. Die einfachen Factoren einer Zahl seyn a, b, c, so ist $1 + a + b + c + ab + ac + bc > abc$,

und $\frac{ab + a + b + 1}{ab - a - b - 1} > c$, oder $\frac{2ab}{ab - a - b - 1}$

$> c + 1$. Mittelst dieser Formel findet man zu zwey einfachen Factoren eine Gränze des dritten Factors. Soll die Zahl vier einfache Factoren, a, b, c, d, haben, so

ist $\frac{2abc}{abc - ab - ac - bc - a - b - c - 1} > d$. Man sehe

auch den Artikel, deficiens numerus.

Abwickelung. S. Evolution.

Acampta figura ist die Brennlinie einer andern Linie. Die Strahlen, welche von dieser, wie von einer polirten Fläche, zurückgeworfen werden, fahren an jener sie berührend vorbey, so daß zwey unendlich nahe bey einander liegende an der Brennlinie zusammen kommen, die sie aber nicht zurück wirft, wenn sie gleich Strahlen, die sie nicht berühren, zurück sendet. Leibnitz gebraucht diese Benennungen in einem Aufsatze de lineis opticis, Acta Erud. 1689, und in einem andern, generalia de natura linearum, ib 1692. Auch Leibn. Opp. T. III. p. 203. 277. In jenem Aufsatze ist die Frage: die Linie zu finden, welche alle Strahlen, die von einem Puncte auf eine gegebene Linie fallen, und von dieser nach ihr zurückgeworfen werden, wieder nach einem Puncte hin sendet. Beide Linien haben eine gemeinschaftliche Brennlinie oder Acampta. Die besondere Benennung scheint unnöthig. Sie kommt auch kaum irgendwo sonst vor. S. Brennlinie.

Accidentalpunct, s. Nebenpunct.

Achteck, s. Vieleck, reguläres.

Aclasta figura ist eine krumme Linie, welche die von einer andern krummen Linie zurückgeworfenen Strahlen ungebrochen durchgehen läßt, ob sie gleich die in andern Lagen auffallenden Strahlen nach den dioptrischen Gesetzen bricht. Sie ist nämlich die Abwickelnde der Brennlinie (ex evolutione causticae genita) welche zu jener zurückwerfenden Linie gehört, daher alle diejenigen Strahlen, welche von jener, als berührende an ihrer Brennline, an sie gezogen werden, senkrecht auf sie fallen, und folglich ungebrochen durchgehen. Leibnitz gebraucht a. a. O. diese Benennung, die ebenfalls sonst nicht vorkommt.

Acutangulus - um (oxygonius — um,) spitzwinklicht. Ein Dreyeck mit drey spitzen Winkeln ist spitzwinklicht. Ein senkrechter Kegel, dessen Seiten in dem Durchschnitte durch die Axe einen spitzen Winkel machen, ist ein spitzwinklichter. Ein Schnitt des Kegels, senkrecht auf eine dieser Seiten, hieß bey den Geometern vor Apol-

lonius der Schnitt eines spitzwinklichten Kegels. S. Kegelschnitt.

Addiren ist das Verfahren bey der Addition.

Addition, Zusammenzählung, ist ein Rechnungsverfahren, bey welchem ein Ganzes aus seinen erschöpfenden Theilen zusammengesetzt wird. Das Ganze, welches gefunden ist, heißt die Summe. Die Addition wird entweder mit bestimmten Zahlen, oder mit allgemeinen Größzeichen vorgenommen.

Addition ganzer Zahlen, die sich auf eine einzige Einheit, benannte oder unbenannte, beziehen, (Additio simplex) ist die Vereinigung mehrerer Zahlen zu einer einzigen von derselben Form wie jene, also von der dekadischen, wenn jene diese Form haben, nach der dodekadischen, oder sonst einer andern, wenn die zu addirenden Zahlen diese haben. Da das Verfahren leicht und allgemein bekannt ist, so werden zwey Beyspiele genügen.

795083	8476454
48624	307843
32798	83495
543	9637
68	549
7	4086
765893	8882064
11123	
877123	

Die Einer werden alle unter einander gesetzt, wodurch alle Einheiten derselben Classe unter einander zu stehen kommen. Man addirt nun die Ziffern jeder Verticalreihe als Dinge einerley Art. In dem ersten Beyspiele ist von den Partial-Summen die Ziffer rechter Hand unter diejenige Reihe gesetzt, wozu sie gehört, die linker Hand befindliche, deren Einer zehnfach größer sind als die von jener, unter die linker Hand folgende Reihe, jedoch her-

abgerückt, um für die Einer dieser Reihe Platz zu lassen. Man erhält nun zwey Theile für die Summe, welche auf dieselbe Art wie vorher addirt werden. Geübte nehmen die Zehner jeder Partialsumme gleich zu den Einern der nächst höhern, wie in dem zweyten Beyspiele.

Wenn viele Zahlen zu addiren sind, so theile man sie in zwey oder mehrere Haufen, suche deren Summen einzeln, und addire diese zusammen. Theilt man die gegebenen Zahlen auf verschiedene Arten in Haufen, so muß bey der Addition der einzelnen Summen dasselbe Facit erhalten werden.

Wenn man zur Sicherheit die Addition widerholt, so addire man die Ziffern der Verticalreihen in einer der zum erstenmahle beobachteten entgegengesetzten Ordnung.

Von der Neuner= und Eilferprobe der Addition s. Rechnungsprobe.

Addition ganzer Zahlen mit verschiedenen benannten Einheiten. (Additio composita). Sie erfordert nichts weiter als daß man wisse, wie viel Einer der geringern Einheit auf einen Einer von der höhern gehen, um für so viele Einer von jener Gattung einen von dieser zu setzen. Z. B.

384 -ß	15 ℋ	7 ₰	172 R.	9 F.	10 Z.
293 =	20 =	8 =	218 =	8 =	9 =
162 =	22 =	10 =	307 =	11 =	8 =
58 =	17 =	9 =	41 =	7 =	6 =
897 =	74 =	34 =	738 =	35 =	33 =
900 -ß	4 ℋ	10 ₰	741 R.	1 F.	9 Z.

Addition dodekadischer Zahlen. Sie geschieht auf eine ganz ähnliche Art wie der dekadischen. Für je 12 Einer einer Classe setzt man einen Einer in der nächst höhern. Die Einer jeder Classe werden von den andern durch Puncte abgesondert. (S. Dodekadik.) Z. B.

	8.	7.	10.	6.	4.
	9.	4.	7.	0.	11.
		5.	8.	4.	3.
		2.	9.	10.	5.
			8.	4.	7.
				5.	9.
	17.	18.	42.	29.	39.
1.	6.	9.	8.	8.	3.

5.	3.	11.	7.	9.
	8.	7.	6.	10.
		9.	11.	4.
		8.	10.	6.
			5.	3.
			4.	9.
6.	2.	2.	10.	5.

Addition dyadischer Zahlen. Es wird nur ein Beyspiel nöthig seyn sie zu lehren. (S. Dyadik.)

110010111000111	26055
101111011100011	24291
11101101100	1900
1111011	123
1111	15
1100110010100000	52384

Die dekadischen Zahlen rechter Hand sind die Übersetzung von den dyadischen.

Das Zeichen der Addition ist +

Addition der Brüche. S. Bruchrechnung und Decimalrechnung.

Addition allgemeiner Größen, oder algebraische. S. unter Buchstabenrechnung.

Addition der Verhältnisse ist ein zweydeutiger Ausdruck, wofür man besser gebraucht, Zusammensetzung der Verhältnisse. S. Verhältniß.

Additiv ist eine Größe, die zu einer andern, zufolge der Vorschrift bey einer Rechnung, zu addiren ist. Man muß es nicht mit positiv verwechseln, welches bedeutet, daß eine Größe in einer gewissen bestimmten Relation gegen andere genommen werde. Das positive kann bey

der Zusammensetzung einer Größe aus andern subtractiv seyn.

Ähnlichkeit, mathematische, ist Übereinstimmug der Form, oder der Art der Entstehung einer Größe aus andern, entweder ohne Gleichheit der Quantität, oder auch mit Gleichheit derselben. Größen, die ähnlich sind, ohne gleich zu seyn, stimmen in allen Stücken, bis auf die Quantität, überein. Die Ähnlichkeit ist entweder die geometrische oder die analytische.

Die geometrische Ähnlichkeit besteht in der gleichen Lage der geraden Linien und Ebenen, wodurch geometrische Größen bestimmt werden, oder, wenn es krumme Linien und Flächen sind, ihrer kleinsten Theile, verbunden mit den gleich großen Verhältnissen der correspondirenden Linien, Flächen und körperlichen Theile, wie auch mit der gleichartigen Zusammensetzung aller einzelnen Theile oder Bestimmungsstücke.

Gerade Linien sind sich alle ähnlich, weil die Theile derselben, sie mögen an einander stoßen, oder von einander getrennt seyn, in einerley Lage gegen einander, abgesehen von den Zwischenräumen, gedacht werden.

Geradlinichte Figuren sind ähnlich, wenn die Winkel der Seiten in der einen den Winkeln in der andern, so wie sie auf einander folgen, gleich sind, und die von den gleichstelligen Winkeln eingeschlossenen, oder gleichnamigen Seiten einerley Verhältnisse haben. — Alle regelmäßigen Vierecke von einer gleichen Anzahl Seiten sind daher einander ähnlich.

Alle Kreise sind sich ähnlich, weil sie die Gränzen von regulären Vielecken sind, daher das, was diesen allgemein zukommt, auch der Gränze zukommt.

Alle Parabeln sind sich ähnlich, weil sie, wie der Kreis, durch eine einzige gerade Linie, den Parameter, bestimmt werden. Nimmt man die Abscissen auf der Axe vom Scheitel an in dem Verhältniß der Parameter, so haben die Ordinaten eben dasselbe.

Ähnliche Ellipsen sind diejenigen, in welchen die beiden Axen einerley Verhältniß zu einander haben. Die Ellipse wird durch zwey Linien, die beiden Axen, bestimmt, daher diese einerley Verhältniß haben müssen, wenn Ellipsen ähnlich seyn sollen.

Ähnliche **geradlinichte Figuren** verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seitenlinien oder wie die Quadrate der auf gleiche Art in ihnen gezogenen Linien. Von krummlinichten Figuren wird das letztere durch die Integralrechnung, oder ein von ihr entlehntes Verfahren bewiesen. Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser: ähnliche Ellipsen wie die Quadrate ihrer großen oder ihrer kleinen Axen.

Prismen sind ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnliche Figuren sind, die Seitenlinien sich wie die gleichnamigen Seiten der Grundfläche verhalten, und dieselbe Lage gegen die Grundflächen haben.

Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Axen sich wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten, und gleiche Winkel mit denselben machen.

Ähnliche Kegel sind Abschnitte eines und desselben unbestimmt weit fortgeführten Kegels.

Alle **Kugeln** sind ähnliche Körper.

Körper sind ähnlich, wenn in beiden parallele Durchschnitte unter einem gegebenen Winkel gegen einen Durchmesser so geführt werden können, daß sie ähnlich sind, und ihre Abstände von den gleichnamigen Endpuncten der Durchmesser sich wie die Durchmesser verhalten, wie auch der Durchmesser und die Lage der Durchschnitte verändert werden mag. In jedem Körper, der nur nach irgend welchen Regeln gemacht wird, giebt es Hauptdurchschnitte, auf welche die übrigen Durchschnitte und Durchmesser jeder Art (Linien von einem Puncte der Oberfläche zu irgend einem andern) bezogen werden können, um ihre Lage anzugeben; z. B. in einem elliptischen Sphäroid zwey Durchschnitte senkrecht auf einander, einer durch die große Axe, und einer durch die kleine Axe; in einem Schiffe

ein lothrechter Durchschnitt nach der Länge des Kiels, ein anderer lothrechter, auf jenen zugleich senkrechter durch den Hauptmast oder durch die Mitte der Längenlinie, und ein horizontaler durch einen gewissen Punct, z. B. den Schwerpunct des Schiffes.

Ähnliche Abschnitte eines Körpers sind solche, woran die Grundflächen ähnliche Figuren sind, und gleiche Lagen gegen die Hauptdurchschnitte haben, in welchen auch die Abstände dieser Grundflächen von den gleichnamigen Endpuncten ähnlich liegender Durchmesser (in Rücksicht der Hauptdurchschnitte) einerley Verhältniß zu den ganzen Durchmessern haben.

Ähnliche Körper und ihre ähnlichen Abschnitte verhalten sich wie die Würfel der ähnlichen Durchmesser. Dieses kann im Allgemeinen nur durch die Integralrechnung oder ein von ihr entlehntes Verfahren bewiesen werden.

Die **anylitische Ähnlichkeit** besteht in der Übereinstimmung des analytischen Ausdrucks zweyer Größen und der Gleichheit der Verhältnisse zwischen den componirenden Größen. Z. B. ab und cd sind gleichartige Formen, weil sie aus zwey, und beide aus verschiedenen Factoren bestehen. Verhält sich nun a:c wie b:d so sind die Formen auch ähnlich. Man nennt solche Producte **ähnliche Flächen- oder Plan-Zahlen**, wie z. B. 3. 9 (= 27) und 6. 18 (= 108.)

So sind abc und def gleichartige Formen, und wenn a:d = b:e = c:f ist, ähnliche Formen. Dergleichen Producte nennt man **ähnliche Körperzahlen**, wiewohl diese und jene gleich vorher angeführte Benennungen veraltet sind, und nur noch in einem Wörterbuche aufbewahrt werden.

Demnach sind abc und dee nicht ähnliche Formen, aber wohl abb und dee, wenn zugleich a:d = b:e ist.

Ähnliche Gleichungen sind solche, welche aus gleichartigen Gliedern bestehen, deren correspondirende oder gleichnamige Factoren in beiden ein gegebenes Verhältniß

B

haben, mit derselben Folge der Vorzeichen, z. B.

$$x^3 + ax^2 - bcx + def = 0$$
$$y^3 + \alpha y^2 - \beta\gamma y + \delta\varepsilon\zeta = 0$$

Wenn die Verhältnisse $a:\alpha$; $b:\beta$; $c:\gamma$, etc. gleich sind, so haben die Wurzeln x, y dasselbe Verhältniß gegen einander. Denn wenn die Wurzeln der ersten Gleichung sind p, q, r, so ist $+a$ die Summe ihrer entgegengesetzten Werthe, $-bc$ die Summe der Binionen derselben, und $+def$ das Product aller drey (Gleichung III. 5). Verändert man die Wurzeln in dem Verhältnisse $m:n$, so wird ihre Summe in demselben Verhältnisse verändert, die Summe der Binionen in dem $m^2:n^2$, das Product aller drey in dem Verhältnisse $m^3 : n^3$. Nun sey ebenfalls $m : n = a : \alpha = b : \beta = c:\gamma$, u. s. f. so ist $bc : \beta\gamma = m^2 : n^2$; $def : \delta\varepsilon\zeta = m^3 : n^3$, also sind die Wurzeln der zweyten Gleichung

$$\frac{n}{m} p, \frac{n}{m} q, \frac{n}{m} r.$$

Wenn die Wurzeln einer Gleichung auf keine Einheit bezogen, sondern als Größen schlechtweg gedacht werden, so erhalten alle Glieder der Gleichung gleich viel Abmessungen (Dimensionen). Denn der Coefficient des zweyten Gliedes ist das Aggregat der den Wurzeln entgegengesetzten Größen, der Coefficient des dritten das Aggregat der Binionen; der des vierten das Aggregat der Ternionen, u. s. w. Die Stellen der Glieder werden hierbey wie in einer vollständigen Gleichung gezählt. In ähnlichen Gleichungen bekommen die Coefficienten auch ähnliche Formen. Ist z. B. der des vierten Gliedes einer Gleichung $= def$, wie in dem obigen Beyspiele, so ist in der ähnlichen Gleichung derselbe $= \delta\varepsilon\zeta$: ist er in jener $= dde$ oder d^3 so ist er in dieser $= \delta\delta\varepsilon$ oder δ^3, und die gleichnamigen Factoren in allen Coefficienten haben einerley Verhältniß. Werden die Wurzeln als Zahlgrößen betrachtet, und die Coefficienten sind bloße Zahlen, so verhalten sich die Coefficienten des zweyten Gliedes in ähnlichen Gleichungen wie ein Paar gleichstel-

liger Wurzeln, wenn die Wurzeln nach ihrer Größe geordnet werden. Dieses Verhältniß sey $= m : n$, so verhalten sich die Coefficienten des dritten Gliedes wie $m^2 : n^2$; des vierten wie $m^3 : n^3$ u. s. f. eben so wie die Coefficienten, wo keine Einheit angenommen wird. Enthalten die Coefficienten noch unbestimmte, aber nach Willkühr bestimmbare Factoren, so müssen die Producte aus denselben ähnliche Formen, die Factoren selbst das Verhältniß der gleichstelligen Wurzeln, die numerischen beygefügten Factoren aber ein solches Verhältniß haben, daß die Coefficienten selbst das ihrer Stelle nach ihnen zukommende Verhältniß erhalten.

Hieraus ergiebt sich auch, wie Gleichungen zwischen zwey veränderlichen Größen sich verhalten müssen, um ähnlich zu seyn. Es sey z. B. $2abx - bx^2 = 2ay^2$, welches eine Gleichung für die Ellipse ist, worin die große Axe $= a$, der Parameter $= b$ ist. Man setze in derselben na und nb für a und b, und vertausche die Coordinaten x, y mit t und u, so ist $2n^2abt - nbt^2 = 2nau^2$. Diese Gleichung ist jener ähnlich. Denn wenn man $t = nx$ nimmt, so ist $2n^3abx - n^3bx^2 = 2nau^2$, also $u^2 = n^2y^2$, oder $u = ny$. Wenn also die Abscissen x und t sich wie $1 : n$ verhalten, so verhalten sich die Ordinaten eben so, und die Gleichungen sind ähnlich, wie die dadurch bestimmten Linien.

In Gleichungen, deren Glieder alle gleich viele Dimensionen haben, verändere man die gegebenen Größen nach einem bestimmten Verhältnisse $1 : n$, und vertausche die coordinirten, durch x, y bezeichneten, veränderlichen Größen mit t, u, so ist die Gleichung eine der primitiven ähnliche. Verhalten sich x und t wie $1 : n$, so ist auch $y : u = 1 : n$. Durch die Substitution von nx für t, und ny für u verwandelt sich die zweyte Gleichung wieder in die primitive.

Wenn in einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen x und y für x gesetzt wird $t = mx$, und für y eine andere, $u = ny$, so ist die neue Gleichung der primitiven zwar nicht ähnlich, aber doch mit ihr verwandt

(affinis). Die krummen Linien, die durch sie dargestellt werden, sind verwandte. Z. B. die Gleichung sey $2ax - xx = yy$, welche dem Kreise zugehört. Es sey $t = mx$; $u = ny$, so ist

$$\frac{2at}{m} - \frac{t^2}{m^2} = \frac{u^2}{n^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{n^2}{m^2} \cdot 2mat - \frac{n^2}{m^2} t^2 = u^2,$$

eine Gleichung für eine Ellipse, deren halbe große Axe $= 2ma$ und Parameter $= \frac{n^2}{m^2} \cdot 2ma$ ist.

Besteht die Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen nur aus zwey Gliedern, so wird Verwandtschaft zugleich Ähnlichkeit. Z. B. die Gleichung für die Parabel ist $ax = yy$. Setzt man $t = mx$; $u = ny$, so verwandelt sich diese Gleichung in folgende: $\frac{n^2 a}{m} t = u^2$, welche wiederum eine Parabel mit dem Parameter $\frac{n^2 a}{m}$ giebt. Nimmt man $u = my$, wie $t = mx$, so ist $mat = uu$. Alle Parabeln sind daher nicht allein verwandt, sondern auch ähnlich. Oder es sey die Gleichung, $ax^2 = y^3$, so erhält man durch jene Substitution $\frac{n^3 a}{m^2} t = u^3$, und, wenn $n = m$ genommen wird, $mat = u^3$.

Wolf hat zuerst den allgemeinen Begriff von Ähnlichkeit in die Mathematik aufgenommen, wozu er durch Leibnitz veranlaßt ist, der, wie er sagt, zu allererst einen deutlichen Begriff von Ähnlichkeit gegeben hat, diesen nämlich, daß ähnliche Dinge nur durch das Bey einander seyn (compraesentia) unterschieden werden können. Wolf sagt: Similia sunt, in quibus eadem sunt, per quae a se invicem discerni debebant. (Elem. Arithm. §. 24.) Weil die Quantität, setzt er hinzu, ohne Vergleichung mit einem andern Dinge für sich nicht begriffen, sondern nur gegeben

werden kann, so können ähnliche Dinge, ihrer Ähnlichkeit unbeschadet, in der Quantität verschieden seyn, und Quantität ist also ein innerer Unterschied ähnlicher Dinge. In einer im J. 1715 lateinisch geschriebenen Abhandlung von der Ähnlichkeit krummlinichter Figuren wendet er diesen Begriff auf geometrische Größen an, insbesondere auf die Construction ähnlicher Lunularum cyclico-parabolicarum (Christ. L. B. de Wolf Meletemata mathematico-philosophica. Halae Magdeb. 1755 nr. 24). Kreise sind nach ihm, so wie Parabeln, ähnliche Figuren, weil die geraden Linien, wodurch sie bestimmt werden, Durchmesser und Parameter, nicht unterschiedbar sind. — Es wird rathsam seyn, Ähnlichkeit nur für mathematische Gegenstände zu erklären, und sie in die Übereinstimmung der Form oder der Art der Zusammensetzung zu setzen. Auf die Form allein kommt es bey dem Unterschiede mathematischer Zusammensetzungen an, so lange man sie nicht auf wirkliche Gegenstände anwendet.

Euklides giebt keinen allgemeinen Begriff von Ähnlichkeit, sondern setzt die Bestimmungen, die zur Ähnlichkeit erforderlich sind, für jede Gattung von Größen besonders fest, als für ähnliche geradlinichte Figuren, ähnliche Körper, Kegel, Cylinder, Flächenzahlen und Körperzahlen.

Nicolaus Bernoulli macht dreyerley Arten von Ähnlichkeit der Figuren. Die Abscissen der einen und der andern seyn in einem gegebenen Verhältnisse, so sind die krummen Linien lateraliter ähnlich, wenn die zu den Abscissen in beiden Linien gehörigen Ordinaten sich wie die Abscissen verhalten: exponentialiter oder potentialiter, wenn die Ordinaten sich wie Potenzen der Abscissen verhalten; functionaliter, wenn die Ordinaten denselben Functionen der Abscissen proportional sind. (Joh. Bernoulli Operum T. II. p. 451.)

Zu vergleichen: Euler de similitudine et affinitate curvarum, in Introd. in Anal. Infin. Tab. II. c. 18.

Aenigma Florentinum. S. Florentiner Aufgabe.

Aequatio. S. Gleichung.

Aequatio summatrix, ein Ausdruck, der von Leibnitz gebraucht ist, und dasselbe bedeutet, was man jetzt Integralrechnung nennt. Er sah Integriren als ein Summiren an, daher er auch das Zeichen ∫ nahm, um das Integral eines Differentials zu bezeichnen. Als wenn die Differentialgleichung ist $p\,dy = x\,dx$, so ist die daraus folgende Summatrix, $\int p\,dy = \int x\,dx$. Leibnit. Opp. T. III. p. 192. In einem Briefe an Joh. Bernoulli, der die Benennung, Integralrechnung, eingeführt hat, sagt Leibnitz, daß er diese Rechnung Calculum summatorium nenne; hingegen calculum integralem die Rechnungsweise arithmetische Aufgaben in ganzen Zahlen, wo es angeht, aufzulösen. Commerc. phil. et mathem. Leibnitii et Joh. Bernoulli. T. II. p. 161.

Aequiangula figura, eine geradlinichte Figur, deren Winkel alle unter sich gleich sind.

Aequicrurum triangulum, gleichschenklichtes Dreyeck.

Aequidistans, eine Linie, die von einer andern in allen Puncten gleichen Abstand hat. S. Abstand.

Aequilatera figura, eine geradlinichte Figur, deren Seiten alle unter sich gleich sind.

Äußerer Winkel (angulus externus), in einem Dreyeck der Nebenwinkel eines der drey Winkel desselben; bey Parallelen der Nebenwinkel desjenigen, welchen sie mit dem zwischen ihnen enthaltenen Theile einer schneidenden geraden Linie machen. S. Parallelen.

Äußerster Theil in einem sphärischen rechtwinklichten Dreyecke. S. Nepers Regel von sphär. Dreyecken.

Affecta aequatio, eine Gleichung, worin mehr als eine Potenz der unbekannten Größe vorkommt, ein Gegensatz gegen aequatio pura, worin nur eine Potenz derselben sich findet.

Affectio, Beschaffenheit einer krummen Linie, in Absicht auf ihren Lauf ins Unendliche, wenn sie solchen

nimmt, ihre Berührungsart mit einer geraden Linie oder andern krummen, ihre vielfachen Puncte, wenn sie solche hat, und dergleichen. Diese Erklärung ist nach dem Cap. XIII. der Introd. in Anal. Inf. P. II. von Euler gemacht, welcher proprietates und affectiones zu unterscheiden scheint, wie es sehr wohl thunlich ist. Nach d'Alembert in der Encycl. method. ist Affection einerley mit propriété.

Affinitas. S. Ähnlichkeit.

Affirmativ, so viel als positiv, womit besonders in lateinischen Schriften die Wörter affirmativus und affirmative als gleichbedeutend vorkommen. Der Ausdruck ist von Vieta eingeführt, aber in der Bedeutung wie additiv. Das Affirmative ist dem Negativen entgegengesetzt. S. Entgegengesetzte Größen.

Afterkegel, ein Körper, der durch die Umdrehung einer krummen Lienie mit zwey unendlichen Schenkeln um ihre Axe entsteht, wie einer Parabel und Hyperbel. Die deutsche Benennung ist von J. Ch. Sturm in seiner Übersetzung der Archimedeischen Schriften aufgebracht, so wie er überhaupt alle darin vorkommenden Kunstwörter deutsch giebt. Allein das Wort After bedeutet eine Folge der Zeit, dem Orte oder der Ordnung nach, wie das Niedersächsische Achter (z. B. Aftergeburt, Afterdarm), und wenn man es auch in einer herabwürdigenden Bedeutung gelten lassen will, so wäre diese doch hier nicht passend. Man behalte das griechische Wort **Konoid**. S. Conoides.

Afterkugel. S. Sphäroid.

Afterwalze. S. Cylindroid.

Aggregat ist algebraische Summe, oder der Werth einer Größe, die aus mehrern Theilen zusammengesetzt ist, diese mögen alle gleichnamige Vorzeichen haben, oder mit verschiedenen begleitet seyn, und der Werth selbst mag positiv oder negativ zu nehmen seyn. Sind die Vorzeichen gleichnamig, so ist Aggregat dasselbe mit der arithmetischen Summe, ein Ganzes, das seinen erschöpfenden Theilen zusammengenommen gleich ist.

D' Alemberts Lehrsatz ist folgender. Es sey φx eine Function von x, und $y = x - \varphi x$; ferner sey ψx eine andere Funktion von x, so ist

$$\psi x = \psi y + \varphi x . \frac{d\psi y}{dy} + (\varphi x)^2 . \frac{d^2\psi y}{2\, dy^2}$$
$$+ (\varphi x)^3 . \frac{d^3\psi y}{1.2.3.\,dy^3} + (\varphi x)^4 . \frac{d^4\psi y}{1.2.3.4.\,dy^4}$$
$$+ \text{etc.}$$

Diese Formel wird in der Encyclopédie méthodique in dem Art. Series als ein Theorem von d' Alembert angeführt, woraus daselbst die wichtige Reversions- oder Umwandlungs-Formel von la Grange hergeleitet wird. Der Verfasser des Artikels, Condorcet, giebt nicht an, wo d' Alembert jenen Satz vorgetragen hat.

In der That ist dieser Satz nichts anders als der schon lange bekannte Taylorsche Lehrsatz. Nach demselben ist irgend eine Function von $y + u$, die durch das vorgesetzte Functionszeichen ψ bedeutet wird, $\psi(y + u) = \psi y$
$$+ u . \frac{d\psi y}{dy} + \frac{u^2}{1.2.} + \frac{d^2\psi y}{dy^2} + \frac{u^3}{1.2.3.} . \frac{d^3\psi y}{dy^3}$$
+ etc. Da $x = y + \varphi x$ gesetzt ist, so ist $u = \varphi x$ und $\psi x + \psi(y + \varphi x)$, so daß der d' Alembertische Lehrsatz völlig mit dem Taylorschen übereinkommt.

Lesern der Encyclopédie ist vielleicht diese Bemerkung willkommen.

Algebra ist die Lehre von den Gleichungen. Diese sind symbolische Formeln, wodurch die Verbindungen mehrerer Größen ausgedruckt werden (s. Gleichung). Die Eigenschaften der Gleichungen, die Verwandlungen ihrer Form, die Zusammensetzung neuer Gleichungen aus mehreren gegebenen, die Aussonderung einer jeden der gesuchten Größen durch eine Gleichung, in welcher sie allein mit gegebenen Größen vorkommt, und besonders die Auflösung der Gleichungen sind die Hauptstücke dieser Wissenschaft. Die Auflösung besteht darin, daß aus der Relation der gesuchten Größe zu den gegebenen, welche in der Gleichung auf eine unentwickelte Art, durch Vermischung des Bekannten mit

dem Unbekannten, dargestellt wird, der Werth der unbekannten Größe bloß durch bekannte Größen ausgedruckt werde. Die Auflösung ist der Zweck der Algebra, daher Wolf und Hutton sie erklären als Methode, Aufgaben durch Gleichungen aufzulösen. Nach Kästners Erklärung lehrt sie unbekannte Größen aus gegebenen Eigenschaften derselben durch Gleichungen finden.

Die Algebra bedient sich, wie die ganze Analysis, allgemeiner Zeichen, um ihren Lehrsätzen und Auflösungen die völligste Allgemeinheit zu geben. Darum wird oft die Buchstabenrechnung, welche die arithmetischen Zusammensetzungen und Entwickelungen der Größen mit allgemeinen Zeichen machen lehrt, zur Algebra gerechnet. Es ist aber besser, sie davon abzusondern, weil sie das allgemeine Werkzeug für die Algebra und Analysis überhaupt ist.

Die Erfindung der Gleichungen ist das Werk des mathematischen Scharfsinns. Darüber lassen sich keine Regeln ertheilen, so wie es überhaupt keine Methoden zur Erfindung giebt. Die Algebra lehrt eigentlich die ganze Behandlungsart gegebener Gleichungen. Hierzu ist sie im Stande bestimmte Vorschriften zu liefern. Sie weiset den mathematischen Untersuchungen einen gewissen Gang an, durch die Methoden über die Combinationen, Verwandlungen und Auflösungen der Gleichungen. Ihre Lehrsätze über die Relationen der gegebenen Größen zu den unbekannten sind Data, woraus man auf einem kurzen Wege in jedem besondern Falle wichtige Lehrsätze und bequeme Auflösungen herleiten kann. Inzwischen ist das Verfahren bey der Anwendung der Algebra nicht mechanisch. Ein mechanischer Algebraist wird nur auf mühsamen Umwegen zum Ziele kommen. Zu einer geschickten Benutzung der algebraischen Lehren ist Überlegung, und nicht selten Scharfsinn nöthig, um die Rechnung möglichst kurz, deutlich und nett zu führen, kurz, ihr eine Eleganz, wie man sie von geometrischen Beweisen und Auflösungen fordert, zu verschaffen. Man muß nicht kurzsichtig auf die Symbole das Auge heften, sondern die Verbindungen der Größen unmittelbar durchzuschauen suchen.

Die Erfindung der Gleichungen pflegt bey reinen arithmetischen Aufgaben keine Schwierigkeit zu haben, weil die Bedingungen der Frage alle in der Frage selbst schon gegeben werden. Allein bey der Anwendung der Rechnung auf Gegenstände aus der Geometrie, Physik und technischen Mathematik ist es oft nicht leicht zu den Gleichungen zu gelangen, weil vielleicht nicht alle Größen, die auf die Bestimmung des Gesuchten Einfluß haben, gegeben werden, oder weil zwischen den gegebenen und gesuchten Größen, Bedingungen und Verhältnisse Statt haben, die aus der Beschaffenheit des Gegenstandes fließen, aber in der Aufgabe nicht vorkommen. Wird nach mehrern Größen gefragt, so muß man diejenige aussuchen, aus welcher die übrigen am leichtesten hergeleitet werden. Zuweilen ist es nützlich, nicht die Größe, welche gefunden werden soll, unmittelbar zu suchen, sondern eine andere, aus welcher jene sich leicht herleiten läßt. Z. B. wenn die Summe zweyer unbekannten Größen ein Datum ist, so ist es am bequemsten, ihren Unterschied zu suchen, weil daraus und aus der Summe sich die beiden Größen ganz leicht ergeben. — Wenn nun alle Bedingungen einer Frage in die algebraische Sprache übersetzt, oder in Gleichungen gefaßt sind, so daß man so viele Gleichungen als unbekannte Größen hat, so hat man aus dieser für jede derselben eine Gleichung zu suchen, in welcher sie allein nebst gegebenen Größen vorkommt, indem die andern unbekannten Größen aus der Verbindung mit ihr gebracht oder weggeschafft werden (s. Elimination). Hierauf wird jede Gleichung für sich aufgelöset, welches bey den Gleichungen, die nicht über den vierten Grad steigen, auf eine directe Art geschehen kann, bey höhern aber nur indirecte auszuführen ist.

Die Algebra hat zwey Haupttheile. In dem ersten wird von den Relationen der bekannten und unbekannten Größen gehandelt, wenn die letztern ihre bestimmten Werthe haben. In dem zweyten werden diejenigen Relationen betrachtet, wodurch die Werthe der unbekannten Größen selbst nicht bestimmt werden, sondern nur ihre

Formen, z. B. in einer Gleichung zwischen zwey unbekannten x und y die Form derselben zu finden, wodurch beide ganze Zahlen werden; die Form von x zu bestimmen, wodurch eine Function dieser Größe, wie $a + bx + cx^2$ etc. ein rationales Quadrat oder ein solcher Cubus werde; einen Ausdruck, wie $ax^2 + bxy + cy^2$ in Factoren zu zerlegen; die Summe $x^2 + y^2$ zu einem Quadrate zu machen, oder sie in zwey andere Quadrate zu verwandeln. Man nennt diesen Theil auch die **Diophanteische Analysis**, von Diophantus, der darüber ein schätzbares Werk hinterlassen hat. Doch mag derselbe füglich zur Algebra gerechnet werden. Die Bedingung der Form dient statt einer Gleichung. Euler hat die Rechnung der unbestimmten Größen seinem Lehrbuche von der Algebra beygefügt, und sie die **unbestimmte Analytik** genannt. Sie unterscheidet sich von der Analysis unbestimmter Größen dadurch, daß in dieser die unbestimmten veränderlichen Größen keiner besondern Form unterworfen werden. Ein Abriß derselben ist in dem Artikel, **unbestimmte Analytik**, um die Benennung, die Euler ihr gegeben hat, beyzubehalten.

In Absicht auf den Vortrag unterscheidet man die **numerische** und die **symbolische Algebra**.

Die numerische Algebra (Algebra numerosa) ist diejenige, deren sich die alten Algebraisten bedienten, und zwar bloß zur Auflösung arithmetischer Aufgaben, die gleichsam als Räthsel zu Übung des arithmetischen Scharfsinnes vorgelegt werden. Die unbekannte Größe allein ward durch einen Buchstaben oder sonst ein Zeichen dargestellt; alle bekannten und gegebenen Größen aber wurden durch Zahlen ausgedruckt. Dieser Methode mag man sich für Anfänger, wenn sie bey den allgemeinen Ausdrücken Schwierigkeiten finden, bedienen.

Die symbolische Algebra (A. literalis, speciosa) bezeichnet alle Größen, die gegebenen, so wie die gesuchten, durch Buchstaben als Symbole. Dadurch ist sie im Stande, ihre Auflösung auf alle nur mögliche Fälle und auf alle Arten von Größen anzuwenden, der Gegenstand mag in die Arithmetik, oder Geometrie, oder Mechanik,

oder sonst einen Theil der angewandten Mathematik gehören. Sie dient dadurch sowohl zur Erfindung von Lehrsätzen, als zur Auflösung von Aufgaben. Nach der alten Algebra muß man für jeden Fall derselben Art, wenn die gegebenen Größen andere Werthe erhalten, die ganze Rechnung wiederholen. Oder man muß mit Mühe und Aufmerksamkeit die Regeln der Auflösung aus dem Verfahren in einzelnen Fällen abstrahiren. Vieta, der den Gebrauch der Buchstaben (species) für alle Größen, auch für die bekannten, allgemein machte, nannte die Algebra daher Arithmetica speciosa. Newton nannte sie Arithmetica universalis, vermuthlich zum Theil deswegen, weil er sie viel zur Auflösung geometrischer Aufgaben anwandte.

Der Name Algebra ist arabischen Ursprunges, wie die erste Sylbe, der arabische Artikel, anzeigt. Von den Arabern ist diese Wissenschaft den Europäern mitgetheilt worden. **Lucas de Burgo sancti Sepulcri**, in der letzten Hälfte des 15ten Jahrhunderts, dessen italienisch geschriebenes Werk: Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita, Venedig 1494, zugleich das damahls bekannte von der Algebra enthält, nennt diesen Theil seines Werks: L' Arte maggiore, ditta dal vulgo la Regola de la Cosa, over Alghebra e Almucabala. Die letzte Benennung übersetzt er durch restauratio et oppositio. Daß Gegenstellung sich auf die beiden Theile einer Gleichung bezieht, ist deutlich genug. Die Wiederherstellung mag die Zusammensetzung der unbekannten Größe aus verschiedenen gegebenen andeuten. Golius in einer Anmerkung zu des Alferganus astronomischen Anfangsgründen leitet das Wort Algebra von einem arabischen Worte her, das bedeutet einen gebrochenen Knochen heilen. Weil nun Theile der Einheit in der Rechenkunst auch durch ein Wort angezeigt werden, das Brüche oder Bruchstücke bedeutet, so habe man, sagt er, mit dem Worte Algebra die mathematische Analysis benannt, als welche sich vornehmlich damit beschäftige, die mit einander zu vergleichenden Größen (terminos comparationis) in eine Gleichung zu bringen, besonders aber ihre Theile in ganze

Zahlen zu verwandeln. Das letzte kann nicht Ursache der Benennung seyn, weil Algebra auch in den alten Zeiten keine Bruchrechnung war. Das Grammatikalische der Herleitung ist ohne Zweifel richtig, weil in der spanischen Sprache, die von den Mauren viele Wörter beybehalten hat, Algebrista ein Mann heißt, der Beinbrüche und Verrenkungen heilt. (Kästner in der Vorrede zur Anal. d. Endl. S. XIII.)

Die Benennung, Arte Maggiore, hat nach Lucas ihren Grund darin, weil sie mit höhern Rechnungen zu thun hat, da die Rechnungen fürs gemeine Leben die Arte minore ausmachen.

Regola de la Cosa hieß die Algebra in den alten Zeiten, weil Cosa oder Sache, die unbekannte Größe, und zwar ihre erste Potenz, bedeutete. Daher ist bey den alten deutschen Algebraisten die Benennung, Regel Coß, oder die Coß, üblich geworden. Einige Schriftsteller im 16ten Jahrhundert nannten die Algebra auch Regula rei et census, da durch census die zweyte Potenz oder das Quadrat einer Zahl bezeichnet ward, und die Aufgaben gewöhnlich nur auf Gleichungen vom zweyten Grade führten.

Die historische Untersuchung der Entdeckungen und Verbesserungen in der Algebra ist nicht ohne große und scharfe Widersprüche geführt worden. Diese rühren theils von Partheylichkeit und von Vorurtheilen her, die allen Nationen gemein sind, theils von einer unzulänglichen Bekanntschaft mit den Schriften der ältern Algebraisten. Daher sind die Verbesserungen, welche Schriftsteller einer Nation gemacht haben, den Schriftstellern einer andern zugeeignet, und die Entdeckungen eines frühern Verfassers einem viel spätern zugeschrieben worden. Die Nachrichten von manchen besondern Methoden in der Algebra sind so unvollständig, daß man daraus nur eine sehr mangelhafte und schwankende Vorstellung von dem Zustande der Wissenschaft in ihren verschiedenen Perioden erhält. Man muß die Schriften der algebraischen Verfasser selbst lesen, um den allmähligen Fortgang ihrer Einsichten bestimmt und zuverlässig kennen zu lernen. Wallis hat in seiner Algebra

viele historische Nachrichten eingerückt, ist aber zu partheyisch für seinen Landsmann Harriot, so wie auf der andern Seite Gua in seiner Geschichte der Algebra (Mém. de l'acad. des Scienc. 1741) zu viele Vorliebe für Vieta zeigt.

Hutton hat in seinem mathematischen und physikalischen Wörterbuche Vol I. p. 65 — 97 eine Geschichte der Algebra geliefert, die in Absicht auf die Schriftsteller des 16ten und 17ten Jahrhunderts sehr ausführlich ist, in der neuern aber nur kurze Anzeigen enthält. Er versichert, daß er alle ältern Schriftsteller über die Algebra, deren er habhaft werden können, nach ihrer Folge sorgfältig durchgelesen, und eine umständliche Beschreibung der von ihnen abgehandelten Lehren, ihrer Verbesserungen und Fortschritte, ihres Eigenthümlichen und ihrer Bezeichnungsarten gemacht habe, wovon er inzwischen nur einen Auszug mittheilen könne. Da die von Hutton gelieferten historischen Nachrichten Sorgfalt und Unpartheylichkeit zeigen, so werden sie in der folgenden Geschichte der Algebra zur Ergänzung meiner eigenen Untersuchungen gebraucht werden.

Geschichte der Algebra.

Das älteste Werk über die Algebra, welches wir haben, ist von **Diophantus** aus Alexandrien, dessen Zeitalter aber unbekannt ist, wiewohl man ihn in das vierte Jahrhundert zu setzen pflegt. Er hat 13 Bücher von arithmetischen Aufgaben in griechischer Sprache geschrieben, wie er selbst am Ende der Einleitung es angiebt. Von diesen sind nur sechs zu uns gekommen, mit einem Buche von den Polygonalzahlen. Die erste Ausgabe ist von Xylander, in einer lateinischen Üebersetzung, Basel 1575, Fol. Den griechischen Text mit einer lateinischen Übersetzung gab Bachet zu Paris 1621. Fol. heraus. Die beste ist griechisch und lateinisch, mit einem Commentar von Bachet, und Bemerkungen v n Fermat. Toulouse 1670 Fol. Die in diesen Büchern vorgetragenen Aufgaben gehören größtentheils zur unbestimmten Analytik. Die Aufgaben in

dem ersten Buche aber sind bestimmte, und führen alle auf Gleichungen vom ersten Grade, ausser die Aufgaben 30; 31; 33, welche die Auflösung einer Gleichung vom zweyten Grad erfordern. Doch vermeidet Diophantus durch die Wahl der unbekannten Größe die Form, welche nebst dem Quadrat die unbekannte Größe selbst enthält, und findet sie durch eine reine oder einfache quadratische Gleichung. Die ganze Sammlung ist ein Beweis von der meisterhaften Geschicklichkeit des Verfassers, und zeigt, daß er in die mathematische Analysis tief eingedrungen ist. Da er aber die unbekannten Größen so wählt, und die Auflösung so einrichtet, daß er alle Bedingungen in Gleichungen vom ersten Grade oder höchstens einfache quadratische Gleichungen bringt, so kann man nicht wahrnehmen, was ihm von der Auflösung zusammengesetzter Gleichungen, der eigentlichen Algebra, bekannt gewesen sey. Die arithmetische Analysis des Diophantus hat, wie die geometrische der Alten, nur wenige und einfache Hülfsmittel. In jedem besondern Falle war also erfinderische Geschicklichkeit nöthig, die sich nicht in Regeln und symbolischen Sätzen mittheilen ließ Daher haben wir bey den Alten keine technische Analysis oder Algebra zu suchen. Ihre Analysis war eine geistige, keine formulare. Diophantus löset seine Aufgaben durch einfache Gleichungen auf, und gebraucht in der Rechnung nur eine unbekannte Größe mit einem Symbol, wählt aber diese so sinnreich, daß alle die übrigen unbekannten Größen in der Aufgabe dadurch leicht ausgedruckt werden, und daß die Endgleichung die einfachste Gestalt, die möglich seyn mag, erhält. Das feine Verfahren bey der Bestimmung der zu suchenden Größe giebt dieser Sammlung von Aufgaben ihren vorzüglichen Werth. Ist diese festgesetzt, so findet sich die Endgleichung leicht und sehr deutlich. Die gegebenen Größen druckt Diophantus zwar in Zahlen aus. Man sieht aber doch aus der Rechnung, wie sie für andere Zahlen zu führen ist. Die unbekannte Größe nennt er schlechtweg eine Zahl und bezeichnet sie durch ς. Bekommt sie einen Zahlcoefficienten, so wird dieser nachgesetzt, und jenes Zeichen ver-

doppelt, z. B. $\varsigma\varsigma^{o\iota}\bar{\gamma}$, das ist nach unserer Bezeichnung 3 x, oder es wird das Zahlwort selbst nachgesetzt. Das Quadrat einer Zahl bezeichnet Diophantus durch $\delta^{\bar{\upsilon}}$, den Cubus durch $\kappa^{\bar{\upsilon}}$, das Biquadrat durch $\delta\delta^{\upsilon}$ die fünfte Potenz durch $\delta\kappa^{\upsilon}$, die sechste durch $\kappa\kappa^{\upsilon}$, die Einheit hat das Zeichen $\mu^{\bar{o}}$. Die vier Species der Rechenkunst bey Größen, die aus bekannten und unbekannten bestehen, setzt er voraus. Daß ein Defect (λειψις) mit einem Defect multiplicirt einen Ueberschuß (ὑπαρξις) giebt, und daß ein Defect mit einem Ueberschuß multiplicirt einen Defect giebt, nimmt er als erwiesen an. Von seinem Verfahren werden in der unbestimmten Analytik ein paar Beyspiele gegeben werden.

In Europa ist die Algebra nicht durch das Werk des Diophantus bekannt geworden, sondern wie die meisten andern Kenntnisse von den Arabern mitgetheilt worden. Cardanus giebt auf das Zeugniß des Leonardo von Pisa den Araber Mahomet Ben Musa (Sohn des Mose) als den ersten Schriftsteller über die Algebra an. Ein Werk von ihm ist in einigen Bibliotheken handschriftlich vorhanden. Die Araber haben ohne Zweifel die Schriften der Griechen über die höhere Arithmetik gekannt; nach dem Zeugnisse des Abulpharagi ist Diophantus ins Arabische übersetzt worden. Die Behandlung der Gleichungen vom ersten Grade ist von dem griechischen Schriftsteller schon in den Beyspielen gut gewiesen worden. Die Araber haben sie vielleicht systematischer gemacht, und durch den Gebrauch ihrer bequemen Zahlzeichen erleichtert. Insbesondere mögen sie die Vorschriften zur Auflösung zusammengesetzter quadratischer Gleichungen herausgebracht haben, welches für uns gegenwärtig zwar etwas sehr leichtes ist, allein in dem Anfange der Kunst ein wichtiger Fortschritt war. Die Araber haben sich auch schon mit den cubischen Gleichungen beschäftigt. In der Bibliothek zu Leiden ist ein arabisches Manuscript über diese Gleichungen vorhanden, wovon Hutton eine Abschrift oder eine Übersetzung durch den zu früh verstorbenen Professor Damen zu Leiden zu erhalten hoffte.

Von den Mauro-Arabern ward die Kenntniß der Algebra nach Spanien verpflanzt. Aus diesem Lande mögen die Italiener sie zum Theil erhalten haben. Doch haben sie auch unmittelbar von den Arabern durch einen ihrer Landsleute Unterricht in dieser Kunst bekommen. **Leonardo von Pisa**, ein Kaufmann, der um das J. 1200 große Reisen nach dem Orient unternahm, brachte von da die Kenntniß der arabischen Arithmetik und Algebra mit (s. Zahlzeichen). Er hat eine noch ungedruckte Algebra hinterlassen. In Italien fand diese neue Art der Arithmetik viele Liebhaber, welches die in Bibliotheken noch vorhandenen Manuscripte arithmetischer Werke bezeugen. Die Verfasser der ersten, nach der Erfindung der Buchdruckerkunst erschienenen Schriften über die Algebra führen manche ältere Schriftsteller als ihre Vorgänger und Lehrer in dieser Kunst an.

Das älteste arithmetisch-algebraische Werk unter den gedruckten ist das vorher angeführte von **Lucas Paciolo**, oder Frater Lucas de Burgo sancti sepulcri, einem Minoriten Mönch. (Kästners Gesch. der Math. I. S. 65.) Die damahls in Europa vorhandene Kenntnisse in der Arithmetik, Algebra und Geometrie sind darin vollständig und sehr gut vorgetragen. Die gemeine Arithmetik und die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln werden darin fast auf die jetzt gebräuchliche Art gelehrt. In seiner höhern Arithmetik oder Arte maggiore handelt er zuerst von den Proportionen, sowohl der arithmetischen als geometrischen, mit vielen Beyspielen von Aufgaben über die geometrische Progression, die er durch eine Art von Algebra auflöset. Ferner von der Regula falsi, der einfachen und gedoppelten, die er mit einem arabischen oder phönizischen Worte el Catayni nennet. Dann von den vier gemeinen Species in der Algebra, wo er zeigt, daß bey der Multiplication und Division gleiche Vorzeichen +, ungleiche — geben. Weiter von der Ausziehung der Wurzeln, und der Rechnung mit Wurzelgrößen. Auch lehrt der Verfasser die Ausziehung der Quadratwurzeln aus Größen von der Form wie $23 + \sqrt{448}$ und $\sqrt{18} + \sqrt{10}$,

zur Erläuterung des 10ten Buchs vom Euklides. Darauf handelt er die Gleichungen vom ersten und zweyten Grade ab. Die Auflösung der letztern bewerkstelligt er so, wie wir es jetzt thun, durch Ergänzung des Quadrats, und dann durch die Ausziehung der Wurzel aus beiden Theilen der Gleichung. Auch löset er Gleichungen vom vierten Grade auf, welche die Form einer quadratischen haben. Bey quadratischen Gleichungen mit zwey positiven Wurzeln gebraucht er die Wurzeln beide; allein bey denen mit einer negativen Wurzel giebt er auf diese nicht Acht. Die cubischen Gleichungen und die höhern (die schon gedachten vom vierten Grade ausgenommen) aufzulösen, giebt er als unmöglich auf, mit dem Beyfügen, daß man dazu so wenig als für die Quadratur des Kreises eine allgemeine Vorschrift gefunden habe. Die Bezeichnungen des Lucas sind n° für die bekannte Größe, co (d. i. cosa) für die unbekannte Größe; ce. (censo) für ihr Quadrat; cu. (cubo) für den Cubus; ce. ce. für das Biquadrat; p° r° (primo relato) für die fünfte Potenz; ce. cu für die sechste Potenz; p (piu) für das Zeichen der Addition; m (meno) für die Subtraction. Z. B. 3 co. p. 4 ce. m. 5 cu. p. 2 ce. ce. m. 6 n° ist, was wir jetzt so schreiben: $3x + 4x^2 - 5x^3 + 2x^4 - 6$. Für die Auflösung der quadratischen Gleichungen findet man bey ihm die Regeln in barbarisch-lateinischen, nach seinem Urtheil eleganten Versen. Hier ist eine derselben, für den Fall $x^2 + mx = a$, wo $x = \sqrt{(a + \frac{1}{4}m^2)} - \frac{1}{2}m$.

Si res et census numero coequantur, a rebus
Dimidio sumto censum producere debes,
Addereque numero, cuius a radice totiens
Tolle semis rerum, census latusque redibit.

Das Werk des Lucas scheint das Studium der Algebra allgemeiner und eifriger gemacht zu haben. Nicht lange nach der Erscheinung desselben, um das J. 1505, fand Scipio Ferreo, Professor der Mathematik zu Bologna, zuerst die Regel für die Auflösung eines Falles

der cubischen Gleichungen, nämlich den, $x^3 + mx = a$, oder nach damahliger Art des Ausdrucks, capitulum cubi et rerum numero aequalium. Er entdeckte einem seiner Schüler, **Florido**, oder **Fiore**, die Auflösung, woraus er übrigens ein Geheimniß machte. Dieser bediente sich des ihm mitgetheilten Verfahrens, andere mit Aufgaben zu necken, deren Auflösung von der Regel für jenen Fall cubischer Gleichungen abhieng. Insbesondere brachte er den **Tartalea** (richtiger als Tartaglia) aus Brescia, der zu Venedig die Mathematik lehrte, durch seine Aufforderungen dahin, daß er mit ihm eine Wette eingieng, wer von ihnen beiden dreyßig Aufgaben, die der eine dem andern vorlegen würde, auflösen könnte. Nun hatte Tartalea schon im J. 1530 für zwey Fälle der cubischen Gleichungen, nämlich $x^3 + mx^2 = a$, und $x^3 = mx^2 + a$, die Auflösung gefunden. Auf Veranlassung der Herausforderung von Florido bemühte er sich um die Auflösung der Fälle, $x^3 + mx = a$ und $x^3 = mx + a$. Als er sie gefunden hatte, legte er seinem Gegner manche Aufgaben vor, die auf die letztere dieser Gleichungen, oder auf jene, die das Quadrat der unbekannten Größe nebst dem Cubus enthalten, führten. Dieser war nicht im Stande sie aufzulösen, dagegen Tartalea alle ihm zugestellten beantworteten. Die ganze Geschichte der Entdeckung, und die Händel, welche darüber mit Cardanus entstanden, erzählt Tartalea in dem 9ten Buche seiner Quesiti et Inventioni diverse, Venedig 1546. Dieses Werk enthält die Beantwortungen von mancherley Fragen, die dem Verfasser vorgelegt sind, größtentheils die Artillerie, Taktik und Befestigungskunst betreffend, und in dem letzten Buche, welches das neunte ist, die Fragen arithmetischen und geometrischen Inhalts. Das vornehmste und letzte Werk des Tartalea ist sein Trattato di numeri e misure, Venedig 1556 und 1560. Da der Verfasser im J. 1557 starb, so ist der Theil, der von der Algebra handelt, unvollendet geblieben, und erstreckt sich nur bis zu den Gleichungen vom zweyten Grade.

Hieronymus Cardanus, aus Mayland, ein sehr gelehrter und mit allen seinen Wunderlichkeiten merkwürdiger Mann, erhielt von Tartalea auf sein inständiges Bitten, und gegen die heiligste Versicherung, die Entdeckung nicht bekannt zu machen, die Mittheilung der von diesem gefundenen Auflösung cubischer Gleichungen. Er machte sie aber doch 1545 bekannt in dem Werke: Artis magnae sive de regulis Algebrae Liber unus, welches als das 10te Buch zu den 9 Büchern der Practica arithmetica generalis, Mediol. 1539, gehört. Es ist auch zu Basel 1570 herausgekommen, nebst andern mathematischen Werken des Verfassers: Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, etc. — Praeterea, Artis magnae — liber unus — item de Aliza regula Liber. — Tartalea empfand dies sehr übel, und ward dadurch veranlaßt, seine Verhandlungen mit Cardan bekannt zu machen. Die Zänkereyen zwischen beiden dauerten bis zum Tode des erstern. Cardan suchte sich dadurch zu rechtfertigen, daß er die Beweise zu den ihm mitgetheilten Regeln der Auflösung gefunden, und die Erfindung des Tartalea erweitert hätte. Er hat durch die Bekanntmachung der Vorschrift, cubische Gleichungen aufzulösen, die Ehre erhalten, daß man sie allgemein Cardans Regel nennt, da sie eigentlich nach ihrem Erfinder die Regel des Tartalea heißen sollte. Inzwischen hat doch auch Cardan sich um die Theorie der cubischen Gleichungen verdient gemacht, und zu allgemeinern Bemerkungen und Behandlungen der Gleichungen den Weg gewiesen. Er sah zuerst ein, daß eine Gleichung auch negative Wurzeln haben könne; nur nannte er sie erdichtete (fictas), wie auch noch Wolf sie falsche Wurzeln nannte. Er erklärte ihre Beschaffenheit aber sehr gut dadurch, daß er sagte, die erdichtete Wurzel der Gleichung $x^3 + a = mx$ komme überein mit der wahren Wurzel der Gleichung $x^3 = mx + a$, und daß die Veränderungen der Vorzeichen des zweyten und letzten Gliedes in einer vollständigen cubischen Gleichung die positiven Wurzeln negativ und die negativen positiv mache. Da Tartalea dem Cardanus nur die Regel

zur Auflösung cubischer Gleichungen für drey Fälle, I. $x^3 + mx = a$, II. $x^3 = mx + a$, III. $x^3 + a = mx$ mitgetheilt hatte, so suchte er Regeln für alle Formen und Abänderungen der cubischeu Gleichungen, wobey er fast alle Verwandlungen der Formen aufstellte, wie es bis dahin noch nicht geschehen war. Er fand, wie in cubischen und höhern Gleichungen das zweyte Glied weggeschafft werden könne. Mit dem Falle, den man den casus irreducibilis nennt, gab er sich viele Mühe, ohne damit zu Stande zu kommen. Dies thut er besonders in dem Buche, welches er betitelt hat, de Aliza regula, ein Ausdruck, den er nicht erklärt. Er giebt in diesem Buche (C. 31) eine Regel für den Fall $x^3 = bx + c$, die sich darauf gründet, daß die Gleichung $x^3 = (m^2 + n^2)x + 2mn(m + n)$ die Wurzel $x = m + n$ hat. Er erkannte, daß eine Gleichung mehrere Wurzeln zuläßt, und zeigte an Beyspielen, daß eine cubische drey Wurzeln haben kann. Doch rechnete er zwey gleiche und gleichnamige Wurzeln nur für eine einzige. Z. B. In der Gleichung, $x^3 - 12x = 16$, findet er nur zwey Wurzeln, $+4$ und -2, da sie doch zwey gleiche negative Wurzeln hat. Dennoch hatte er eingesehen, daß in einer cubischen Gleichung der Coefficient des zweyten Gliedes der Unterschied der wahren und erdichteten Wurzeln ist; daß also, wenn dieses Glied fehlt, die Summe jener oder dieser so groß ist als die entgegengesetzte Wurzel. Er bemerkte, daß in einer cubischen Gleichung, deren Glieder alle auf eine Seite gebracht worden, die Anzahl der positiven Wurzeln der Anzahl der Abwechselungen unter den Vorzeichen gleich ist, wofern nur alle drey Wurzeln möglich sind; auch daß die unmöglichen Wurzeln immer sich gedoppelt finden. Er wandte die Algebra zur Auflösung geometrischer Aufgaben an. Auch gebrauchte er schon manchmahl Buchstaben, um Größen auf eine allgemeine Art zu bezeichnen und zu behandeln.

Die Aufgabe, drey Zahlen zu finden, die in geometrischer stetigen Proportion sind, deren Summe eine gegebene Zahl (als 60) ist, und von welchen die erste und

zweyte mit einander multiplicirt ein gegebenes Product (als 6) machen, war die Veranlassung zur Erfindung eines Verfahrens, biquadratische Gleichungen aufzulösen. Die Aufgabe führt, bey den vorher genannten Zahlen, auf die Gleichung $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. Cardan ermunterte den Ludovico Ferrari aus Bologna, einen jungen Mann von mathematischen Talenten, die Auflösung zu suchen. Dieser fand auch dazu ein Verfahren, welches darin bestand, daß auf beiden Seiten der auf eine gewisse Art geordneten Gleichung solche Größen hinzu gethan werden, daß die Quadratwurzel aus beiden Theilen sich ausziehen läßt (s. Gleichung IV. 14.). Cardan theilt diese Auflösung in seiner Ars magna mit. Hernach hat sie auch Bombelli in seiner italienisch geschriebenen Algebra, Bologna 1579 angeführt, daher einige, als Wallis und Euler, dieselbe dem Bombelli zueignen. Die Methode, welche Bombelli zur Ausziehung der Cubikwurzel aus einer zweytheiligen Größe, $a + \sqrt{b}$, angiebt ist unbrauchbar, wenigstens so, wie Hutton sie vorträgt, aber zur Ausziehung der Cubikwurzel aus dem Binomium $a + \sqrt{-b}$ giebt er ein Verfahren an, welches in denen Fällen brauchbar ist, da die Wurzel dieselbe Form, $x + \sqrt{y}$ mit rationalen Werthen für x und y hat. Nämlich, wenn diese Wurzel cubirt wird, so ist der mögliche Theil $= a$, der unmögliche $= \sqrt{-b}$, woraus sich die Gleichungen für x und y ergeben. Bombelli hätte ein ähnliches Verfahren auch für die Ausziehung der Cubikwurzel aus $a + \sqrt{b}$ anwenden können. Jenes führte ihn auf die Bemerkung, daß die beiden Theile der Cardanischen Formel, wenn sie gleich einzeln keine wahren Größen sind, doch in der Summe eine wahre Größe geben können. Er machte auch die wichtige Bemerkung, daß mittelst der cubischen Gleichung, $x^3 = bx + c$, ein Winkel in drey gleiche Theile getheilt werden kann. Eine merkwürdige Stelle, die Algebra des Diophantus betreffend, ist in des Bombelli Algebra befindlich. Er erzählt, daß in der Vaticanischen Bibliothek ein griechisches Werk über die Algebra vorhanden sey, welches er mit einem römischen

Mathematiker zu übersetzen unternommen habe; sie hätten von den sechs vorhandenen Büchern schon fünf übersetzt. Nun fügt er hinzu, sie hätten gefunden, daß in diesem Werke Indische Schriftsteller oft angeführt würden, woraus sie sähen, daß die Indier die Algebra vor den Arabern gekannt haben müßten. In dem Diophantus, wie wir ihn haben, findet sich keine Citation eines Indischen Schriftstellers. Das Manuscript, welches Bombelli gebraucht hat, muß interpolirt gewesen seyn.

In Deutschland war, nach Huttons Urtheil, in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts die Algebra schon weiter fortgerückt, als selbst in Italien, nur freylich die über die cubischen Gleichungen hier gemachten Entdeckungen ausgenommen. Sie näherte sich schon mehr der neuern Form. Die älteste algebraische Schrift in Deutschland, ist die Coß **Christoph Rudolphs** (aus Jauer) die im Jahr 1524 gedruckt ist. Weil sie sich selten gemacht hatte, besorgte **Mich. Stifel** aus Eßlingen eine neue Ausgabe, welcher er viele Zusätze beyfügte. Der Titel ist: Die Coß Christoph Rudolphs mit schönen Exempeln der Coß, durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt, 1571. 491 Bl. in 4. (Kästners Gesch. der Mathematik 1. Bd.) Von diesem Buche ist auch eine Ausgabe zu Amsterdam 1615; 827 S. in 8. in deutscher Sprache herausgekommen. Stifel hat auch ein eigenes Werk über Arithmethik und Algebra geliefert: Arithmetica integra, Norib. 1544; 322 Bl. in 4. (Kästner a. a. O). In diesem Werke ist die Arithmetik nach ihrem damahligen Zustande vollständig vorgetragen. Es sind darin außer der praktischen Arithmetik enthalten: Untersuchungen über die arithmetischen Reihen, die Polygonalzahlen, die geometrischen Reihen, Bemerkungen über die Verbindung derselben mit einer arithmetischen, die erste Idee von Logarithmen, die Coefficienten der Potenzen einer zweytheiligen Zahl bis zur siebzehnten, die Rechnung mit Irrationalgrößen, und in dem dritten Buche die Algebra mit der Überschrift: de numeris cossicis et de regula eorum, id est, de perfecta arte calculandi. Hutton rühmt dieses Werk sehr, Stife

bekennt in der Vorrede zu Rudolphs Coß, daß er diese wunderbarliche und ganz philosophische Kunst des Rechnens aus Rudolphs Buche erlernt habe. Rudolph hatte keine Beweise seiner Regeln gegeben; diese fügte Stifel bey, oder machte sie vielmehr durch Erläuterungen begreiflich. Rudolph gebrauchte zur Bezeichnung der Potenzen eigene Charaktere, die aus den Anfangsbuchstaben der Wörter für dieselben mit Nebenzügen gebildet waren (s. Potenz). Die Quadratwurzel bezeichnete er auf die jetzt übliche Art durch Vorsetzung des Zeichens $\sqrt{}$, die Cubik- und Biquadratwurzel durch eigene Zeichen. Dafür setzt Stifel hinter das Zeichen $\sqrt{}$ den Charakter der Potenz, deren Grad oder Exponent mit dem Grade der Wurzel derselben ist, und nach diesem Charakter die Zahl, woraus die Wurzel irgend eines Grades gezogen werden soll. Rudolph und Stifel führten die Zeichen + und — für die Addition und Subtraction ein, deren man sich in Italien erst lange nachher bedient hat. Die Gleichheit zweyer Größen ward von ihnen noch wörtlich angegeben; ausser daß Stifel manchmahl das Facit oder den Werth einer Größe durch einen Punct als Zeichen der Gleichheit angiebt, z. B. 1 A. 20 — 5 x. das ist A = 20 — 5 x, wo nur x statt seiner Radikalgröße gesetzt ist. Für die quadratischen Gleichungen der höhern Ordnungen geben sie eine allgemeine Regel. Die von Rudolph gegebene Regel zur Ausziehung der Wurzel aus einem Binomium von der Form $a + \sqrt{b}$ ist genau dieselbe mit der von Newton in der Arithmetica universali pag. 49 edit Gravess. vorgetragenen. Doch hat schon Lucas de Burgo sie aufgestellt. Zur Ausziehung der Cubikwurzel aus einem solchen Binomium giebt Stifel in der Ausgabe von Rudolphs Coß (S. 815) eine gute Regel, die einige, vielleicht auch viele Versuche erfordert, in manchen Fällen aber sehr leicht ausgeführt werden kann. Albert Girard hat sie in der nachher anzuführenden Schrift auch vorgetragen. Tartalea hat ein anderes Verfahren angewiesen (s. Wurzel aus einem Binomium). Stifel führt noch an, wie man durch ein ähnliches Verfahren auch Wurzeln von höhern Graden

ausziehen könne. Wenn mehr als eine unbekannte Größe in einer Frage vorkamen, setzten Cardan und Rudolph für die zweyte das Zeichen 1 q. Dafür nimmt Stifel das Zeichen 1 A, um, wenn drey oder mehr unbekannte Größen gesucht werden, für diese die Zeichen 1 B, 1 C, u. m. zu gebrauchen. Die Reduction der Gleichungen durch Versetzung der Glieder und andere Veränderungen, um ihnen die zur Auflösung schickliche Form zu geben, lehrte Stifel kürzer und allgemeiner als seine Vorgänger. Stifel bezeichnete den Grad einer Potenz durch die Anzahl der darin enthaltenen gleichen Factoren, nannte sie **Exponens**, und betrachtete die Exponenten der Quotienten von Eins durch eine Potenz dividirt als negativ, wie in folgender Reihe von Potenzen und Exponenten

$$\ldots \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8\ \ldots$$
$$\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

Er zeigt, daß sich die negativen Exponenten bey der Multiplication und Division der Potenzen eben so verhalten wie die positiven. Von seinen Lehrsätzen über die Verbindung zweyer solchen Reihen s. Logarithmen.

Ein guter deutscher Schriftsteller über die Algebra um die Mitte des sechzehnten Jahrhunderts ist **Johann Scheybl** oder Scheubelius, des Euclids und Arithmetik Ordinarius auf der Universität Tübingen. Von ihm ist Algebrae compendiosa facilisque descriptio, qua depromuntur magna Arithmetices miracula. Authore Joh. Scheubelio, Mathem. Prof. in Acad. Tubingensi. Parisiis, 1552, vielleicht ein Nachdruck einer frühern in Deutschland gedruckten Ausgabe. Hutton sagt, daß der Vortrag in diesem Buche sehr deutlich und nett sey, so daß es durch den Inhalt, wie auch durch die äussere Gestalt, da es sehr schön gedruckt ist, einem neuern Werke ähnlich sehe. Seine Rechnungsweise und seine Bezeichnung ist die, wie bey Rudolph und Stifel. Die Gleichungen, welche er auflöset, sind nur vom ersten und zweyten Grade mit Einschluß der höhern von der Form der quadratischen. Negative Wurzeln kennt er noch nicht. Mit der Wurzel-

rechnung beschäftigt sich der Verfasser auch. Sie geht bey Binomien von zwey irrationalen Theilen, oder einem rationalen und einem irrationalen, nur auf die Quadratwurzel. Der Verfasser hat eine deutsche Übersetzung der ersten drey arithmetischen Bücher das Euklides herausgegeben, im J. 1558.

In England gab **Robert Recorde** 1552 eine Arithmetik, und als den zweyten Theil 1557 eine Algebra heraus, letztere unter dem Titel: The Whetstone of Witte, which is the seconde parte of Arithmetike: containing the extraction of Rootes: The Cossike Praktise with the Rule of Equation: and the Workes of Surde Numbers. Das Buch ist in Gestalt eines Gesprächs zwischen einem Lehrmeister und seinem Schüler abgefaßt. Die deutschen Algebraisten sind dabey viel benutzt. Die Zeichen für die Potenzen hat er von diesen genommen. Der Verf. ahmt bey der Ausziehung einer Wurzel aus zusammengesetzten algebraischen Größen (wie $25x^6 + 80x^5 - 26x^4 - 144x^3 + 81x^2$, nach unserer Bezeichnung der Potenzen), das Verfahren bey der Ausziehung aus Zahlgrößen nach. Die Quadratwurzel aus jenem Ausdruck ist $5x^3 + 8x^2 - 9x$. Das Zeichen der Gleichheit, $=$, hat Recorde eingeführt, wie er es selbst bemerkt, mit dem Beyfügen, daß keine zwey Dinge gleicher seyn könnten, als ein paar parallele gleich große gerade Linien.

In Frankreich kamen 1558 zu Paris heraus: *Jacobi Peletarii* Cenomani de occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, libri duo. In den Bezeichnungen der Potenzen kommt er mit den deutschen Algebraisten zum Theil überein; aber die Zeichen + und − hat er nicht von ihnen angenommen, sondern gebraucht statt deren die Anfangsbuchstaben p und m. Den Gebrauch der Exponenten lehrt er wie Stiefel und Scheybl. Er bemerkte, daß die rationalen Wurzeln einer Gleichung, sie mögen ganze oder gebrochene Zahlen seyn, unter den Factoren des gegebenen Gliedes anzutreffen sind. Er zeigte, wie man eine trinomische irrationale Größe durch die Multiplication in eine rationale verwandeln könne, so daß man dadurch

einem Bruche mit einem solchen triomischen Nenner einen rationalen geben kann. (Wenn das Trinomium ist $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, so entsteht daraus durch die Multiplication mit $a + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ und mit $a^2 + b - c - 2a\sqrt{b}$, das Product $(a^2 + b - c - c)^2 - 4a^2b^2$). In Rudolphs Coß oder Algebra ist ein ähnliches Verfahren für Binomien. Peletarius fand, daß Tafeln der Quadrat- und Cubikzahlen mittelst der Differenzreihen durch die bloße Addition verfertigt werden können. Er entdeckte verschiedene merkwürdige Eigenschaften dieser Zahlen, namentlich diese, daß die Summe der Cubikzahlen $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots + n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$. Von der Auflösung cubischer Glechungen war ihm noch nichts bekannt.

Simon Stevin, ein niederländischer Mathematiker aus Brügge, gab 1585 eine Arithmetik, und bald darauf eine Algebra heraus. In dieser gebraucht er eine neue Bezeichnung der Potenzen, die aber keinen Beyfall erhalten hat. Er bezeichnet sie durch einen Kreis, in welchem der Exponent der Potenz eingeschlossen ist. Auch deutete er die Wurzeln aus Potenzen durch einen Bruch innerhalb des Kreises an. Wichtiger ist, daß er die zusammengesetzten Benennungen der Potenzen, Quadrato-Quadrat, Quadrato-Cubus, Cubo-Cubus, u. dgl. verließ, und sie durch ihre Exponenten benannte, welches er auch auf gebrochene und negative Exponenten ausdehnte. Auch den Begriff der Coefficienten erweiterte er auf gebrochene und irrationale Zahlen. Er gab eine allgemeine Methode an, die Wurzeln jeder Gleichung durch Näherung zu finden, aber noch auf eine mühsame Art, indem er die Ziffern nach der Reihe durch Probiren fand.

Franciscus Vieta (François Viete, geb. 1540 zu Fontenai in Poitou, gest. 1603), einer der vorzüglichsten Mathematiker seines Zeitalters, führte die allgemeine Rechnungsart in der Algebra ein. Denn wenn gleich Cardan sich auch zuweilen allgemeiner Zeichen für die sämmtlichen mit einander verbundenen Größen bedient hat, oder die Fälle der Gleichungen auf solche Art darstellte, so ist doch

Vieta derjenige, der die algebraischen Rechnungen durchgehends auf eine allgemeine Art machen lehrte. Er bezeichnete die bekannten Größen durch die Consonanten, die unbekannten durch die Vocalen aus dem großen lateinischen Alphabet, wofür man hernach bequemer die ersten und letzten Buchstaben des kleinen Alphabets genommen hat. Von ihm rühren verschiedene jetzt übliche Kunstwörter her, als Coefficient, affirmativ und negativ (statt additiv und subtractiv), potestas pura und affecta, woraus man jetzt aequatio p. et a. gemacht hat Er nahm mit den Gleichungen fast alle ersinnliche Verwandlungen vor, wodurch er denselben eine zur Auflösung bequeme Gestalt gab. Inzwischen hat Cardan diese auch schon größtentheils gefunden, nur nicht in der Allgemeinheit wie Vieta. Cardan fiel nicht darauf, die Wurzeln einer Gleichung in einem gegebenen Verhältnisse zu verändern, welches Vieta gewiesen hat. Die Gleichungen vom dritten Grade löset er mittelst einer angenommenen Hülfsgleichung auf, als die Gleichung $x^3 + 3bx = 2c$ durch die Gleichung $y^2 + xy = b$ (s. Gleichung V. 5). Wegen des Falles, da eine cubische Gleichung mehr als eine Wurzel hat, verweiset er in der Schrift über die Gleichungen auf die Analyitik der Winkeltheilungen, die er aber nur gelegentlich in einer an den Adriamus Romanus gerichteten Schrift, und in einer kleinen Sammlung mathematischer Sätze vorträgt. In jener giebt er einer cubischen Gleichung mit drey Würfeln nur zwey positive durch die Dreytheilung eines Winkels. Die Gleichungen vom vierten Grade löset er nach Ferrari's Methode auf. Von den Gleichungen bis zum fünften Grade giebt er die Zusammensetzung der Coefficienten durch die Wurzeln an, aber nur für den Fall, da alle Wurzeln positiv sind. Er sagt nicht, wie er dieses gefunden habe. Die merkwürdigen Sätze stehen am Ende der Schrift de emendatione aequationum. Diese ist nebst der de recognitione aequationum erst nach des Verfassers Tode, zu Paris 1615 von Anderson, einem Schüler und Freunde des Vieta, herausgegeben, daher man sie vielleicht für unvollständig halten möchte. Doch sagt Vieta ausdrücklich, daß er mit

diesen schönen und fein erdachten Sätzen, (elegans et perpulchrae speculationis Sylloge) den schon weitläufigen Tractat endlich beschließen wolle. Die beiden Schriften scheinen zum Druck ganz ausgearbeitet gewesen zu seyn. Wahrscheinlich hat Vieta den Beweis seinen Lesern aufzusuchen überlassen. Denn er sagt von diesen Sätzen: Quae jam sequitur collectio, sua analytico examini subjicienda libere relinquit theoremata; pertinet autem ad aequalitates de multiplicibus radicibus mire explicabiles. Die Entstehungen der Gleichungen aus der Multiplication einfacher Factoren, wie x — a, hat Vieta vielleicht nicht gekannt. Man kommt aber auf jene Sätze auch, wenn man die Summen der Combinationen von jeder Art als gegeben annimmt, und daraus die combinirten Größen sucht (s. Gleichung, VI. 1.). Vieta hat viele Aufgaben, die ihm mancherley Formen von Gleichungen an die Hand geben, so daß daraus die Beschaffenheit der Wurzeln und ihrer Relation gegen die Coefficienten erkannt wird. In dem 15ten Capitel u. ff. des Buchs de recognitione aequationum kommen Lehrsätze über die Zusammensetzung der Coefficienten gewisser Gleichungen mit drey Gliedern vor. Demnach hat er wahrscheinlich aus der Summe der Unionen, Binionen, Ternionen, u. f. die Größen (oder Elemente) dieser Verbindungen zu suchen unternommen. Die Berechnung der Wurzel einer Gleichung mit numerischen Coefficienten lehrt er in einer besondern Schrift, de numerosa potestatum affectarum resolutione, auf eine ähnliche Art wie in den Anfangsgründen der Arithmetik die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel vorgetragen wird. Doch ist das Verfahren beschwerlich. Seine Vorschriften nehmen fünf Folioseiten ein. Sie können aber sehr kurz gefaßt werden. Die Mehrheit der Wurzeln macht besondere Schwierigkeit. Es ist auffallend, daß Vieta die negativen Wurzeln einer Gleichung gar nicht mit in Betrachtung zieht, da doch schon Cardanus es gethan hatte. Gua und Montücla, die ihren Landsmann über alle Algebraisten der ältern Zeiten setzen, sind hier verlegen. Doch mag Vieta die negativen Wurzeln nicht gänzlich verkannt

haben. In der Schrift de recogn. aequ. Cap. 19. 20 et 21. verbindet er Gleichungen, in welchen die unbekannten Größen entgegengesetzt sind, als $x^2 + ax = b$, und $y^2 - ax = b$. Nun sagt er von diesen Gleichungen (C. 19, prop. 1), daß $x - y$ oder $y - x = a$, und $xy = b$ ist. In dem Beyspiele prop. 4, setzt er die Gleichungen $x^4 + 5x^3 = 216$, und $x^4 - 5x^3 = 216$, und giebt die Wurzel der erstern an $= 3$, die Wurzel der andern $= 6$. Vieta hat also in einigen Fällen die negativen Wurzeln als positive Wurzeln einer andern entgegengesetzten Gleichung betrachtet, wie es geschehen muß, wenn man das Entgegengesetzte vermeiden will. Er verfuhr wie die alten Mathematiker, welche alle Fälle eines Satzes, die sie durch das Entgegengesetzte unterschieden, besonders betrachteten. Vermuthlich hat er gewußt, daß Cardan negative Wurzeln zur Auflösung gewisser Gleichungen gebrauchte; weil ihm aber dieses keine deutliche Darstellung gewähren mochte, so vermied er das Negative ganz, und nahm nur in den Gleichungen, die er contradicentes und inversas nannte, die negativen Wurzeln als Wurzeln der einen dieser Gleichungen auf. Freylich ist hier noch eine große Lücke in Vieta's Theorie. Den oben angeführten Satz von der Zusammensetzung der Coefficienten aus den Combinationen der Wurzeln hätte er auf die Fälle erweitern sollen, worin eine oder mehrere der combinirten Größen negativ sind, und hätte die daraus entstehenden Formen der Gleichungen entwickeln müssen. Bey den Gleichungen für die Winkeltheilungen setzte er auch die negativen Wurzeln bey Seite. Er begieng hiedurch selbst einen Fehler gegen die Allgemeinheit der Auflösung, da er einem andern Mathematiker einen solchen Fehler vorwarf. Dieser (er hieß Adrianus Romanus) hatte den Mathematikern eine Gleichung vom 45sten Grade aufgegeben, deren Auflösung die Theilung eines gegebenen Winkels in 45 gleiche Theile erfordert. Vieta fand sie zu des Adrianus Erstaunen, und zeigte diesem, daß nicht bloß eine Wurzel der Gleichung eine Genüge thue, sondern daß 23 Antworten gleich möglich sind. Er hätte noch hinzufü-

gen müssen, daß mit der gegebenen Gleichung noch eine andere verbunden sey, deren positive Wurzeln mit in die Reihe der positiven Wurzeln der aufgegebenen Gleichung gehören, so daß erst beide Reihen zusammen genommen eine vollständige Auflösung geben. So viel Scharfsinn und Erfindungskraft auch Vieta in seinen Schriften zeigt, so konnte er sich doch noch nicht zu den allgemeinern Lehrsätzen erheben, sondern blieb bey der Betrachtung besonderer Fälle stehen, welches seinen Vortrag weitschweifig macht. Seine Bezeichnungsart ist auch unvollkommen. Er druckt in den Lehrsätzen und allgemeinen Rechnungen die Potenzen durch Worte aus, und hat keine Zeichen für Multiplication und Gleichheit, welches er ebenfalls mit Worten anzeigt. Den numerischen Coefficienten druckt er auch mit Worten hinter der Potenz aus, wofür in der Sammlung seiner Werke eine Zahl hinter der Potenz steht. In den Beyspielen ist der Coefficient vor das Zeichen der Potenz gesetzt. Dazu kommt eine große Menge Kunstwörter, die er für die einzelnen Fälle der Gleichungen und die Operationen der Rechnung bildet. Dieses macht seine Werke beschwerlich zu lesen, und giebt ihnen das Ansehen, als wenn sie in viel frühere Zeiten gehörten. — Die Werke des Vieta hat Schooten in einem Folianten herausgegeben, soviel er deren hat erhalten können, zu Leyden 1656. Die bey seinem Leben gedruckten Schriften waren schon damahls sehr selten, weil ihr Verfasser sie nur zum Geschenk ausgab. Eine zur Trigonometerie und Kreismessung gehörige, sehr seltene Sammlung ist zu Paris 1579 in Fol. gedruckt. Aus dieser ist nichts in die von Schooten besorgte aufgenommen, s. Cyklotechnie.

Um dieselbe Zeit mit Vieta bearbeitete gleichfalls mit glücklichem Erfolge in England Thomas Harriot die Algebra. Das Werk, welches er darüber verfaßt hat, ist erst 10 Jahre nach seinem Tode herausgekommen. Es hat den Titel: Artis analyticae Praxis, ad aequationes algebraicas nova, expedita et generali methodo resolvendas. Londini 1631; 180 pag. in Fol. Der Herausgeber hat sich nicht genannt. Es war ein Freund des Ver-

fassers, Namens Walter Warner. Das Werk hat zwey Haupttheile. Der erste enthält eine Theorie der Gleichungen, und soll nur als Grundlage zu dem zweyten und wichtigern, der die Auflösung numerischer Gleichungen, den Hauptgegenstand der Harriotischen Algebra, vorträgt, angesehen werden. Inzwischen ist das, was Harriot in dem ersten Theile über die Entstehung der Gleichungen aus der Multiplication binomischer Factoren lehrt, sein wichtigstes Verdienst um die Algebra. Er entwickelt die Producte aus zwey, drey und vier Factoren $a \pm b$; $a \pm c$; $a \pm d$; $a \pm f$ nach den verschiedenen Abwechslungen der Vorzeichen des zweyten Theils, da der erste ihm zur Bezeichnung der Wurzel einer Gleichung dient. Die Gleichungen zwischen dem Product der Factoren, und dem Aggregat der Theile, welche die Entwickelung giebt, nennt er aequatio originalis. Nun setzt er einen der Factoren $= 0$, und bringt alsdann das Glied, welches keinen Factor a enthielt, auf die andere Seite ganz allein. Diese Gleichung nennt er eine aequationem canonicam. Z. B. Aus der Multiplication der Factoren $a - b$, $a + c$, $a + d$, wenn einer derselben Null genommen wird, entsteht die canonische Gleichung der cubischen Ordnung,

$$\begin{array}{lll} aaa & - baa & - bca \\ & + caa & - bda \\ & + daa & + cda = bcd. \end{array}$$

Werden die Größen b, c, d, etc. so bestimmt, daß ein Coefficient dadurch Null wird, so heißt die Gleichung eine aequatio canonica secundaria, da die primaria eine vollständige Gleichung ist. Von beiden Gattungen der Gleichungen werden alle Fälle durchgegangen, und diejenigen, die nur durch Veränderung der Vorzeichen verschieden sind, besonders aufgeführt. Denn Harriot ist noch mit dem Gebrauch der negativen Wurzeln ganz unbekannt. Der Gleichung $aa - (b - c)\,a = bc$ giebt er nur eine Wurzel b, und überhaupt giebt er jeder Gleichung nur so viele Wurzeln als positive darin vorhanden sind. Wenn eine Gleichung keine positive Wurzel hat, so erklärt er sie für

unmöglich, wie die Gleichung $e^3 - 3b^2e = -c^3 - 2b^3$ in Sect VI. probl. 1. Mit den canonischen Gleichungen, deren positive Wurzeln aus ihrer Formation bekannt sind, vergleicht Harriot andere; worin die Coefficienten eine andere Form haben, als in jenen. Er nennt diese aequationes communes. Wenn eine solche mit einer der canonischen in Absicht auf die Vorzeichen übereinkommt, und ihre Coefficienten unter einander auf ähnliche Art größer oder kleiner sind, als in dieser, so eignet er derselben eben so viele Wurzeln zu, als für die canonische gefunden sind. Z. B. Die Gleichung $a^3 - 3b^2a = 2c^3$, in welcher $c > b$ ist, vergleicht Harriot mit der canonischen, $a^3 - 3rqa = r^3 + q^3$. Da die Vorzeichen in beiden gleichnamig sind, und in der canonischen $(rq)^3 < \frac{1}{4}(r^3 + q^3)^2$, in jener auch $b^6 < \frac{1}{4}(2c^3)^2$ ist, so hat jene nur eine Wurzel, wie die canonische, deren Wurzel $q + r$ ist. Die Cardanische Formel findet er auf eine ähnliche Art wie Vieta. Er reducirt nämlich die Gleichung $a^3 + 3b^2a = 2c^3$, durch die Substitution; $a = \frac{e^2 - b^2}{e}$, auf die einfache, $e^3 = c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}$. Die Gleichung $a^3 - 3b^2a = 2c^3$, wenn c kleiner ist als b, giebt ihm eine unmögliche reducirte, $e^3 = c^3 + \sqrt{-d^6}$, mit welcher er sich nicht weiter beschäftigt.

Die numerische Auflösung der Gleichungen, worin Harriot nach dem Urtheil des Herausgebers den Vieta weit übertroffen hat, die auch de Gua a. a. O. für besser erklärt, als die von Vieta angewandte, beruht darauf, daß er die Wurzel a in zwey Theile $b + c$ zerlegt, und in der verwandelten Gleichung zuerst b bestimmt, darauf einen Theil von c findet, diesen zu dem Werthe von b setzt, und das Aggregat als den ersten Theil b betrachtet, und so fortfährt, bis die Wurzel vollkommen gefunden, oder die Annäherung hinlänglich ist. Inzwischen ist das Verfahren noch Schwierigkeiten unterworfen, besonders wegen der mittlern Wurzeln zwischen der größten und kleinsten; überhaupt noch weitlaufig und verworren.

In der Bezeichnung der Größen ist Harriot geschickter als Vieta. Erstlich gebraucht er kleine Buchstaben anstatt der großen von Vieta gewählten; er setzt diese bey der Multiplication der Größen unmittelbar zusammen, wie die Buchstaben eines Wortes, bezeichnet auch die Potenzen durch die Wiederholung des Buchstabens, der die Wurzel bedeutet (welches auch schon Rudolph in seiner Coß als dienlich angiebt), statt daß Vieta sie, wie andere Operationen der Rechnung, durch Worte anzeigt; er setzt den Zahlcoefficienten vor das Zeichen der Größe, durch einen Punct abgesondert; er gebraucht nicht nur das von Recorde schon angenommene Symbol der Gleichheit, sondern setzt auch für die Ungleichheit die jetzt üblichen. Daß Harriot den Vieta benutzt habe, erhellet aus seinen Anführungen dieses Analysten, auch aus der übereinstimmenden Bezeichnung der Größen. Harriot gebraucht häufig ein Kunstwort, welches dem Vieta eigen ist, gradus parodicus, wodurch eine niedrigere Potenz in Vergleichung mit einer höhern angezeigt wird. Doch mag Harriot die beiden wichtigsten Schriften von Vieta, die erst 1615 herausgekommen, nicht gesehen oder gebraucht haben.

Gewöhnlich wird dem Harriot auch die Erfindung eines Lehrsatzes zugeschrieben, die Anzahl der positiven und der negativen Wurzeln einer Gleichung zu erkennen, jene aus der Anzahl der Abwechselungen der Vorzeichen + — oder — +, diese aus der Anzahl der Folgen + + oder — —, (s. Gleichung VI. 3.). Wolf thut dieses in den Elem. Anal. Finit. §. 330, mit der Bemerkung daß Harriot die Regel durch Induction gefunden habe. Saunderson sagt in seiner Algebra §. 434, daß man die Regel dem Harriot zuschreibe, und daß man noch keinen allgemeinen Beweis derselben gefunden habe. Die Regel findet sich aber gar nicht in Harriots Werke. Erstlich weiß H. nichts von negativen Wurzeln, oder setzt sie ganz bey Seite. Aber auch der Satz, daß eine Gleichung so viele (positive) Wurzeln habe, als Abwechselungen der Vorzeichen vorhanden sind, ist nicht bey Harriot anzutreffen. Diesen Satz auch nur für die niedrigern Gleichungen aus der Vergleichung der Com-

binationen der Wurzeln herzuleiten, muß gezeigt werden, in welchen Fällen das Aggregat ähnlicher Combinationen das eine oder das andere Vorzeichen bekommt, wie es in dem Artikel, Gleichung, bey den cubischen und biquadratischen geschieht. Auch hat Harriot das absolute Glied der Gleichung immer auf eine Seite des Gleichheitszeichens allein gestellt. Wallis hat in seiner historischen Abhandlung der Algebra einen ausführlichen Auszug aus Harriots Werke eingerückt, mit übermäßigen Lobeserhebungen, um die französischen Analysten, als Vieta und besonders Descartes, herabzusetzen. Er glaubt, daß letzterer, der zuerst jenen Lehrsatz vorgetragen hat, ihn aus der bloßen Ansicht der von Harriot aufgestellten Fälle gezogen haben möge, ohne die dabey nöthige Einschränkung zu beachten. Das ist in der That kein Lob für Harriot, wenn dieser den Satz in seinem eigenen Werke aus der Acht gelassen hätte. Wallis würdigt den Lehrsatz selbst herab, weil Descartes ihn vorgetragen hat. Er sey trüglich, und Harriot habe zuverlässigere Regeln gegeben, die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln zu erfahren. Dieses ist eine ungegründete und partheyische Behauptung. Ein neuerer Engländer, Horsley, der Herausgeber von Newtons Werken, urtheilt hingegen sehr ungünstig von seinem Landsmanne. In der Anmerkung zu der Arithm. univ. p. 166 sagt er: Harriotus de numero radicum nil plane sani habet. Vir magnae quidem diligentiae, sed mediocris ingenii, ea fere in Algebraicis intellexit, quae a Cardano et Vieta acceperat, et radices, sicut illi fecerant, cuilibet aequationi totidem tribuit, quot illa positivas habeat, negativarum ne in ullo quidem casu ratione habita, utpote quas semper inutiles judicavit, cum earum naturam minime perspexisset — p. 180. Harriotus, qui arcte adeo ad lumen connivebat, ut quantitates — c, — d, aequationum, quae ex illis procreatae essent, radices esse constantissime negaret, qui fieri potuit, ut ille intelligeret coëfficientium genesin e radicum multiplicatione,

Die meisten Verdienste um die Algebra hat in diesen ältern Zeiten ein wenig bekannter niederländischer Mathematiker, Albert Girard, der um das Jahr 1633 gestorben ist. Von ihm ist: **Invention nouvelle en l'Algebre, tant pour la solution des equations, que pour recoignoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, aves plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science. A Amsterdam MDCXXIX**, in kl. Qu. Bogen A bis H, ohne Seiten-Anzeige.

Diese kleine, aber merkwürdige, seltene Schrift enthält drey Abhandlungen. Die erste ist eine kurze Einleitung in die Arithmetik; die zweyte liefert manches Neue über die Algebra; die dritte betrifft die von dem Verfasser entdeckte Messung des Flächen-Inhalts sphärischer Dreyecke und Vielecke. Hutton giebt in seinem Wörterbuche eine umständliche Nachricht von dem Inhalte der beiden ersten Abhandlungen; auch habe ich durch die Güte des Hrn. Prof. Pfleiderer einen von Hrn. Repetent Hauber verfertigten ausführlichen Auszug des algebraischen Theils erhalten.

In der Bezeichnung der Potenzen und Wurzeln folgt Girard meistens seinem Landsmanne Stevin; doch gebraucht er auch für die Wurzeln die Zeichen $\sqrt{}$ oder $\overset{2}{\sqrt{}}$, $\overset{3}{\sqrt{}}$, $\overset{4}{\sqrt{}}$, u. s. w. Für die Gleichheit hat er kein Zeichen, sondern setzt das Wort selbst hin; das Zeichen = bedeutet bey ihm einen Unterschied unbestimmt. Die mehrtheiligen Größen schließt er in Klammern ( ) ein, wenn sie wie eine eintheilige behandelt werden sollen. Die Ungleichheit bezeichnet er durch die Charaktere *ff* und *§*.

Die Ausziehung der Cubikwurzel aus einer binomischen Größe von der Form $a + \sqrt{b}$ lehrt Girard an einem numerischen Beyspiele, wie er glaubt, auf eine von ihm zuerst gefundene Art. Ich finde sein Verfahren aber schon in Christoph Rudolphs Coß am Ende derselben, (s. Cubikwurzel). Zur Verwandlung der Gleichungen bedient Girard sich insbesondere des von Vieta mit der Benennung Isomoeria

angewandten Verfahrens. Es besteht darin, daß die Termini einer Gleichung, auch die fehlenden als vorhanden betrachtet, in die Glieder einer geometrischen Reihe multiplicirt werden, wodurch die Coefficienten verkleinert, und von Brüchen und Irrationalität befreyt werden können. Die Wurzeln der Gleichung werden dadurch in einem gegebenen Verhältnisse verändert. Bey den quadratischen Gleichungen bemerkt er, daß man die Wurzeln (solutions) mit — nicht bey Seite setzen dürfe. Er giebt auch die Form der unmöglichen Wurzeln ganz bestimmt an. Man muß, sagt er, alle Wurzeln einer Gleichung suchen, weil man dadurch zum bessern Verständniß dessen, was man sucht, gelangt, und erläutert dieses durch das Beyspiel der Gleichung $x^2 = 16x - 28$. Daraus könne man die Aufgabe machen, zwey Zahlen zu finden, deren Summe 16, und deren Product 28 ist. Diese seyn 2 und 14, jede ein Werth von x, und mehrere Werthe gebe es nicht. Von den unmöglichen Wurzeln giebt er den Nutzen, den sie haben, richtig an. Die cubischen Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln löset er durch Hülfe der Sinustafeln auf. Er wird der erste seyn, der eine Regel für dieses Verfahren gegeben hat, da Vieta nur die trigonometrische Formel anführt, ohne daraus eine Regel für die Auflösung cubischer Gleichungen zu ziehen. Girard aber hat noch nicht bemerkt, daß alle drey Wurzeln durch Dreytheilung eines Winkels gefunden werden können. Denn nachdem er eine Wurzel, die er die vornehmste (principale) nennt, durch den Sinus des dritten Theils eines Winkels gefunden hat, sucht er die beiden andern durch Auflösung einer quadratischen Gleichung, auf welche die cubische herunter gebracht wird. Die Gleichung, die er zum Beyspiele nimmt, ist $x^3 = 13x + 12$. Die gefundene Wurzel ist $= +4$. Die Summe der beiden andern ist nun $= -4$, ihr Product ist $\frac{-12}{-4} = +3$. Daher ist die Gleichung für sie $x^2 = -4x - 3$, deren Wurzeln sind -3 und -1. Vieta findet in der cubischen Gleichung zwischen dem Sinus eines Winkels und dem des dreyfachen

zwey Werthe jenes, wenn der letztere gegeben ist, läßt aber den negativen unbeachtet. Girard richtet seine Regel auf eine Gleichung von der Form, wie $x^3 = 13x + 12$, ein, und gebraucht einen Winkel über 180 Gr., der in drey Theile getheilt wird. Jene Gleichung gehört eigentlich für die Relation zwischen dem Cosinus eines Winkels und dem des dreyfachen. Hingegen die Gleichung von der Form, wie $x^3 = 30x - 36$, die für die Sinus des einfachen und dreyfachen Winkels gehört, verwandelt er in eine von der Form wie die erstere, indem er die Vorzeichen von x ändert, von den Wurzeln aber das Entgegengesetzte nimmt, (s. Goniometrie, V.). Für die cubischen Gleichungen mit einer möglichen Wurzel giebt Girard eine sinnreiche Auflösung durch die Trigonometrie an. Sie beruht darauf, daß ein Winkel ω gefunden werde, von der Größe, daß $\sin 2\omega + 2m = 2\tang\omega$ sey. Denn diese Gleichung führt auf diese: $\sin\omega^6$

$+ m^2 \sin\omega^2 - m^2 = 0$, und, wenn $\sin\omega^2 = \frac{x}{r}$ genommen wird, auf diese: $x^3 + m^2r^2x - m^2r^3 = 0$, mit welcher die gegebene Gleichung zu vergleichen ist. Girard zeigt seine Methode an einem Beyspiele, (nicht auf die hier gebrauchte allgemeine Art), und sucht durch wiederholte Verbesserungen, nach einer Art von positio falsi, den wahren Werth des Winkels. Er nimmt gutdünklich einen Winkel, den ich α nenne, und sucht aus der Gleichung $\sin 2\alpha + m = 2 \tang\beta$, den Werth von β, setzt diesen für den zuerst genommenen α, und sucht nun einen andern verbesserten Werth für β, mit welchem er auf dieselbe Art und dann so weiter verfährt, bis daß die beiden Winkel α und β einander gleich werden. Die Differenzen-Rechnung zur schnellen Annäherung anzuwenden, konnte ihm noch nicht einfallen. Gleichungen mit rationalen Wurzeln löset er dadurch auf, daß er die Divisionen des gegebenen Gliedes versucht. Er nennt dieses Verfahren neu. Bey Gleichungen mit irrationalen Wurzeln gebraucht er eine Annäherungsmethode, die fast dieselbe mit der von Stevin gebrauchten ist. Die Glieder der Gleichung werden mit

den Gliedern der Progression, 1, 100, 1000, u. s. multiplicirt, wodurch die Wurzeln in einem gegebenen Verhältnisse vergrößert werden, so daß man aus den Wurzeln der verwandelten Gleichung die der ursprünglichen leicht herleiten kann.

Girard war der erste, der die Zusammensetzung der Coefficienten in einer Gleichung aus den Combinationen der Wurzeln jeder Art zeigte, da Vieta sie bloß für positive Wurzeln bemerkt hatte; und Harriot in der That zwar negative Wurzeln in die Combinationen aufnahm, aber sie nicht als Wurzeln der Gleichung betrachtete. Der Satz lautet bey Girard folgendergestalt: Toutes les equations d' algebre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre; excepté les incomplettes: et la premiere faction des solutions est esgale au nombre du premier meslé, la seconde faction des mesmes est esgale au nombre du deuxiesme meslé, la troisiesme au troisiesme, et tousjours ainsi, tellement que la derniere faction est esgale à la fermature, et ce selon les signes qui se peuvent remarquer en ordre alternatif. Der Ausdruck faction bedeutet die Summe der Combinationen, und meslé ist ein Glied einer Gleichung, die aus verschiedenen Potenzen der unbekannten Größe zusammengesetzt oder gemischt ist, zwischen dem höchsten und niedrigsten Gliede; fermature ist das letzte, oder das gegebene Glied der Gleichung. Der ordre alternatif bedeutet, daß die Potenzen mit ungeraden Exponenten auf der einen Seite des Gleichheitszeichens, die mit geraden auf der andern stehen. Daß Girard die unvollständigen Gleichungen ausnimmt, weiß ich nicht zu erklären, da er in den Beyspielen auch unvollständige Gleichungen aufführt, und die fehlenden Glieder mit dem Coefficienten 0 einschaltet. Dieser gilt auch für eine faction. Die unmöglichen Wurzeln siehet er auch als Auflösungen an. Denn von der Gleichung $x^4 = 4x - 3$ giebt er vier factions an, 0, 0, 4, 3, und daher ihre vier solutions, $1; 1; -1+\sqrt{-2}; -1-\sqrt{2}$; mit der

Bemerkung, daß das Product der beiden letzten 3 ist. Girard ist auf den angeführten wichtigen Satz vermuthlich durch die sehr gute Ansicht der Gleichungen gekommen, daß sie überhaupt die Aufgabe enthalten, aus den Factionen mehrerer Zahlen diese zu finden. Ein solches Beyspiel ist schon angeführt, und es kommen mehrere in seiner Schrift vor. Die Natur der Gleichungen, sagt er, bestehe darin, daß ihre Glieder aus Factions zusammengesetzt sind, und alle Aufgaben hätten kein anderes Band unter sich als dieses. Die ganze Lehre von den Gleichungen wird am vortheilhaftesten auf diese Vorstellung gegründet, wie es in dem Artikel, **Gleichung**, geschehen wird. Girard hat sich mit den Combinationen beschäftigt. Die Menge derselben von irgend einer Gattung bey einer gegebenen Anzahl von Dingen stellt er durch ein Zahlen-Dreyeck, wie es nachher Pascal gethan hat, dar, auf folgende Art,

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

und nennt es triangle d' extraction, z. B. wenn 4 Zahlen sind, so hat man die vierte Reihe zu nehmen, in welcher 1 den Coefficienten der höchsten Potenz in einer Gleichung vom vierten Grade bedeutet; 4 die erste Faction als Summe von vier Zahlen; 6 die Anzahl der Producte von je zweyen, u. s. f. Auf jenem Satze beruht auch das Verfahren Girards, wenn eine Wurzel gefunden ist, die Gleichung zu erniedrigen, weil dadurch die Combinationen der übrigen Wurzeln bekannt werden.

Aus demselben Satze muß Girard auch die merkwürdigen Formeln für die Summen der Potenzen der Wurzeln, ausgedruckt durch die Coefficienten in der Gleichung, das ist, durch die Combinationen der Wurzeln, hergeleitet haben. Er führt sie zum Beweise an, daß die Coefficienten in einer Gleichung nicht auf eine andere Art als durch die Combinationen der Wurzeln gebildet werden können. In seiner Sprache und mit seinen Bezeichnungen sind die Formeln folgendergestalt ausgedruckt. „Soit A premier

meslé, B second, C troisiesme, D quatriesme, etc. alors en toute sorte d' equations

A	sera la somme des	solutions
Aq — B2		quarez
Acub — AB3 + C3		cubes
Aqq — AqB4 + AC4 + Bq2 — D4		quare - quarez
etc,		etc.

Die numerischen Coefficienten stehen hinter den Literalgrößen.

Girard erklärt die Bedeutung der negativen Wurzeln in der Geometrie sehr gut als solche, die Linien darstellen, deren Richtung die entgegengesetzte ist von der Richtung derer, die die positiven Wurzeln angeben. — Von ihm rühren die Ausdrücke, größer als Nichts, kleiner als Nichts, her. Die unmöglichen Wurzeln nannte er involvirte, auch unmögliche. Er hat auch die Eintheilung der Zahlen in Millionen, Billionen, u. s. eingeführt.

Die Verbindung der Algebra mit der Geometrie der krummen Linien ist dasjenige, wodurch **Descartes** seinen erfinderischen Scharfsinn vorzüglich gezeigt, und sich einen unbestrittenen Ruhm erworben hat. Seine Geometrie, die zuerst im J. 1637 französisch erschien, ist ein kleines, aber an neuen Behandlungsarten reiches Werk. Die erste kurze Abtheilung enthält die geometrische Auflösung oder Construction der Gleichungen vom zweyten Grade, wozu der Kreis mit der geraden Linie hinlänglich ist. Die zweyte stellt die Natur aller krummen Linien durch eine Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen dar. Diese Darstellung war ganz neu, und hat den Weg zu der Anwendung der Analysis des Unendlichen auf die Geometrie gebahnt. In der dritten Abtheilung zeigt Descartes, wie die höhern Gleichungen durch geometrische Zeichnung aufgelöset werden. Zu diesem Zwecke schickt er einen kurzen und netten Begriff der wichtigsten algebraischen Lehrsätze und Verfahrungsarten voran, wobey er aber nicht bemerkt, wer sie erfunden habe, und was ihm eigen sey. Die Be-

weise der mehresten Sätze läßt er weg, weil sie ihm so leicht schienen, daß er glaubt, der Leser werde sie ohne Mühe finden, und davon mehr Nutzen haben, als von der Erlernung des Vorgesagten. Die gegebenen Größen bezeichnet Descartes durch die ersten Buchstaben des Alphabets, die unbekannten durch die letzten, wie es gegenwärtig üblich ist. Auch die unveränderlichen und die veränderlichen Größen in einer unbestimmten Gleichung für eine krumme Linie unterscheidet er auf diese Art, eine Abweichung in einem gewissen Falle ausgenommen. Die Potenzen bezeichnet er durch die Wurzel mit dem Exponenten an der Spitze, welches Herigone in seinem mathematischen Cursus kurz vorher auch gethan hat. — Die Gleichheit zweyer Größen bezeichnet Descartes durch ein nicht mehr gebräuchliches Zeichen ∞. Die negativen Wurzeln einer Gleichung nennt er **falsche Wurzeln**, ein sehr unbequemer, leicht mißzudeutender Ausdruck, der sich, aber gar nicht durchgängig, ein Jahrhundert hindurch im Gebrauch erhalten hat. Descartes erklärt ihn aber völlig richtig, daß dadurch Linien angezeigt werden, die eine entgegengesetzte Lage in Beziehung auf diejenigen haben, die als wahre Wurzeln betrachtet werden. Unter den algebraischen Sätzen, die Descartes vorträgt, sind hier nur folgende zwey nöthig bemerkt zu werden. Erstlich sagt er, daß in jeder Gleichung so viele wahre Wurzeln **seyn können**, als Abwechselungen der Vorzeichen da sind, und so viele falsche, als Folgen gleicher Vorzeichen. Er führt dieses als eine Folgerung aus dem Satze von der Entstehung der Gleichungen durch die Multiplication aus einfachen zweytheiligen Factoren an. Ob er selbst oder ein anderer diesen Satz erfunden habe, und wie er zu beweisen sey, sagt er nicht. Vermuthlich hat er selbst ihn gefunden. Als nachher Roberval ihm durch ein Beyspiel die Unrichtigkeit des Satzes zeigen wollte, antwortete er, daß er nicht gesagt hätte, **es sind** so viele wahre und so viele falsche Wurzeln vorhanden, sondern **es können** so viele da seyn, beruft sich auch deswegen auf eine andere Stelle seiner Geometrie von den unmöglichen Wurzeln, die aber

von der Einschränkung jenes Satzes auf lauter mögliche Wurzeln nichts enthält. Descartes scheint ihn zuerst unbedingt angenommen zu haben, da die Einschränkung, daß alle Wurzeln möglich seyn müssen, leicht unbeachtet bleibt, wenn bey der Multiplication der binomischen Wurzelfactoren die Wurzeln jede durch ein Symbol bezeichnet werden. Denn einen Satz, der eine Einschränkung nöthig hat, ohne diese aufstellen, ist eine große logische Unvorsichtigkeit, die ein guter Kopf nicht leicht begehen wird. Seine Worte lassen sich auch grammatisch von der Unbedingtheit des Satzes auslegen. Sie sind: **On connoit aussi de ceci, combien il peut y avoir de vrayes racines et combien de fausses en chaque équation.** Es ist hier nicht von möglichen und unmöglichen Wurzeln die Rede, sondern von den entgegengesetzten, wie viele von der einen und von der andern Gattung vorhanden seyn können.

Die zweyte wichtige Bemerkung von Descartes ist, daß eine Gleichung vom vierten Grade unter einer gewissen Bedingung in zwey trinomische mögliche Factoren zerfällt werden, und mittelst derselben aufgelöset werden kann. Dieses ist das erste Beyspiel von der Methode unbestimmter Größen, wenn man nicht das von Ferrari schon gebrauchte Verfahren bey der Auflösung biquadratischer Gleichung als ein solches ansehen will. Descartes bemerkt, daß man die Methode auch bey höhern Gleichungen anwenden könne. Die Anwendung der Geometrie auf die Gleichungen vom dritten und vierten Grade besteht darin, daß Descartes eine Parabel und einen Kreis zeichnet, deren gemeinschaftliche Ordinaten die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Die Gleichungen vom fünften und sechsten Grade löset er auf ähnliche Art mittelst einer parabolischen Conchoide (oder Muschelline) und eines Kreises auf, (s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.)

Fermat, der sich mehr mit den höhern Gegenständen der Analysis beschäftigte, als mit der Algebra, gab eine Methode an, die irrationalen Größen aus einer Gleichung wegzuschaffen. Er legte den Analysten ein schweres Ex-

empel, das fünf Quadrat-Wurzeln enthält, zur Reduction vor, wovon er selbst aber keine Auflösung gegeben hat. Seine Methode erklärt er nur an einem leichten Beyspiele. (Varia opera Fermatii, p. 58. Preisschrift von Genty, Influence de Fermat sur son siécle, pag. 67. Cartesii epistolae T. III. ep. 75.)

Die Algebra war nunmehr so weit gebracht, daß es noch darauf ankam, die erfundenen Hauptlehren auf das bündigste zu verknüpfen, sie in ihrer Allgemeinheit gehörig zu erweisen, noch verschiedenes zuzufügen, was z. B. die unmöglichen, und die gleich großen Wurzeln, auch die Elimination bey mehreren Gleichungen und unbekannten Größen betrifft, und die Auflösung numerischer Gleichungen möglichst bequem zu machen. Die Gleichungen über den fünften Grad hinaus aufzulösen, blieb auch noch eine Forderung an die Nachfolger jener ersten Pfleger dieser Wissenschaft; allein diese ist bisher noch unerfüllt geblieben, man müßte denn die Auflösung der Gleichungen durch Umkehrungs-Reihen als genugthuend ansehen.

Unter den Mathematikern, welche den von Descartes eröffneten Weg verfolgten, machten de Beaune und Hudde ein paar Zusätze zu der Theorie der Gleichungen.

De Beaune, welcher königlicher Rath bey dem Presidial von Blois war, zeigte, wie in den Gleichungen bis mit zum vierten Grade die Gränzen der positiven Wurzeln aus den Coefficienten gefunden werden. Er geht alle Fälle mit verschiedenen Vorzeichen einzeln durch, auch alle Fälle unvollständiger Gleichungen. Man kann daher seine Arbeit benutzen, um in jedem gegebenen Falle einer cubischen oder biquadratischen Gleichung die Größen, zwischen welchen die positiven Wurzeln enthalten sind, zu bestimmen, wenn diese auch den äußersten Wurzeln nicht immer nahe kommen werden. Die Gränzen für die negativen Wurzeln zu finden, muß man die Vorzeichen der Glieder in den geraden Stellen mit den entgegengesetzten vertauschen, als wodurch die Wurzeln sich in die entgegengesetzten verwandeln. Die Abhandlung des de Beaune de limitibus aequationum ist nebst einer andern über die Gleichungen

nach seinem Tode von Erasmus Bartholinus 1673 herausgegeben, und einer Ausgabe von der Geometrie des Descartes beygefügt. Für numerische Gleichungen hat man noch ein anderes Verfahren, die nächsten ganzen Zahlen an jeder Wurzel zu finden, (s. Gränzen einer Gleichung).

Johann Hudde, der Bürgermeister zu Amsterdam war, und 1704 in einem hohen Alter gestorben ist, zeigte, wie die gleich großen Wurzeln einer Gleichung gefunden werden. Wenn nämlich eine Gleichung zwey gleich große und gleichnamige Wurzeln hat, und ihre Glieder) die etwa fehlenden mitgezählt) durch die Glieder einer arithmetischen Reihe folgweise multiplicirt werden, so hat die daraus entstehende neue Gleichung eine Wurzel mit der gegebenen gemein, oder beide haben einen gemeinschaftlichen Theiler von der Form x — p. Diesen gemeinschaftlichen Theiler lehrt Hudde finden. Hat die Gleichung drey gleiche Wurzeln, so wird nach Huddens Vorschrift die Gleichung auf die besagte Art mit einer arithmetischen Reihe multiplicirt, und die dadurch entstehende Gleichung auf ähnliche Art wieder mit einer solchen Reihe. Die nun hervorgehende Gleichung hat einen gemeinschaftlichen Factor mit der gegebenen, wie x — p. und die Wurzel p kommt dieser dreymahl zu. Auf ähnliche Art werden auch die Wurzeln gefunden, die in einer Gleichung vier oder mehrmahls vorhanden sind. Hudde lehrt das Verfahren in einer Abhandlung de reductione aequationum, die der vorher gedachten Ausgabe von Descartes Geometrie angehängt ist.

Mit der Construction der Gleichungen beschäftigte man sich im 17ten Jahrhunderte viel. Descartes hatte dazu bloß den Kreis und die Parabel gebraucht. De Slüse, Canonicus in Lüttich und Abt von Amas, erweiterte diese Methode, und zeigte, daß man sie auf unendliche Arten durch den Kreis und einen der Kegelschnitte construiren und dadurch auflösen könne. Seine Abhandlung hat den Titel: Mesolabum, seu duae mediae proportionales per circulum et ellipsin vel hyperbolam infinitis

modis exhibitae. Leod. 1659. 4, und 1668, cum parte altera de Analysi et Miscellaneis. In der ersten Ausgabe zeigt er nicht, wie er die Constructionen gefunden habe, welches in der zweyten geschieht, die zugleich viele feine geometrische Untersuchungen enthält. Thomas Baker, ein Engländer, lehrte 1684 in einer Schrift: The geometrical key, or the gate of equations unlocked (Geometrischer Schlüssel, oder aufgeschlossene Thür der Gleichungen) alle cubische und biquadratische Gleichungen, ohne vorgängige Verwandlung, mittelst eines Kreises und einer einzigen angenommenen Parabel zu verzeichnen. Dieses Verfahren ist noch unter dem Namen, Bakers Centralregel, bekannt (s. Anwendung d. Geom. auf die Algebra, III.). Weil Bakers Vorschriften, wie von den Vorzeichen + und — bald das eine, bald das andere zu gebrauchen ist, zu große Achtsamkeit erfordern, so suchte Halley eine bequemere Verzeichnungsart, die er in den Philos. Trans. 1687. nr. 188, bekannt machte. Diesen Aufsatz hat 's Gravesand seiner Ausgabe von Newtons Arithm. univ. beygefügt. In diesem Werke zeigt Newton, wie die Conchoide zur Verzeichnung cubischer Gleichungen gebraucht werden könne, und auch, wie dazu jeder Kegelschnitt diene. Halley zeigte ferner, wie die Anzahl der möglichen Wurzeln, ihre Gränzen und ihre Beschaffenheit für alle Fälle cubischer und biquadratischer Gleichungen geometrisch dargestellt werden können. Philos. Trans. 1687. nr. 190.

Newton gab in seiner allgemeinen Arithmetik eine feine Regel, die Anzahl der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung zu finden, die inzwischen bisweilen in so fern trügen kann, daß mehr unmögliche Wurzeln vorhanden sind, als sie angiebt. Sie beruht darauf, daß gewisse algebraische Zusammensetzungen größer oder kleiner seyn müssen, als andere, wenn alle Wurzeln möglich sind. Man darf aber diesen Satz nicht umkehren, da das Grössere oder Kleinere einen Spielraum zuläßt, so daß dieselbe Ungleichheit auch bey unmöglichen Wurzeln Statt haben kann. Newton hat den Beweis seiner Regel nicht mit-

getheilt. **Maclaurin** hat den Beweis mit andern Vorschriften zur Entdeckung der unmöglichen Wurzeln in den Phil. Transf. 1726 und 1729 nr. 394 und 408 vorgetragen. Auch **Campbell** hat daselbst nr. 404 einen Beweis der Regel geliefert. Diese Abhandlungen sind in der angeführten Ausgabe von Newtons allg. Arithm. anzutreffen. Maclaurin hat in seiner Algebra P. II. ch. 11. einen Beweis gegeben. De Gua hat sich auch damit beschäftigt in den Mem. d. Paris 1741, und du Sejour in denselben für das Jahr 1772. (s. unmögliche Wurzeln)

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, gab Newton eine neue Methode in dem gedachten Werke, wozu er die Sätze von den Summen der Potenzen der Wurzeln benutzte, die er vielleicht selbst entdeckt hat, wenn gleich schon Albert Girard darauf lange vor ihm gekommen ist. Sie wurden wenigstens durch Newton bekannt, und daher ihm zugeschrieben. Er hat ihnen auch eine andere Form gegeben, als sie bey Girard haben, (s. Combination VII).

Tschirnhausen trug in den Actis Erud. 1683 eine allgemeine Methode zur Auflösung der Gleichungen vor, von welcher er sich aber zu viel versprach. Sie erfordert oft die Auflösung einer höhern Gleichung als die vorgegebene ist, (s. Gleichung V).

Abraham de Moivre zeigte in den Transactionen 1698, wie aus einer Gleichung mit unbestimmt vielen Gliedern die Wurzel gezogen werden kann, das ist, wie eine Reihe umgekehrt wird. Dieses hatte Newton auch schon gefunden (Newt. epist. ad Oldenburgium 1676. Opusc. I. p. 354), aber noch nicht bekannt gemacht.

De Lagny gab allgemeine Gränzformeln für die Wurzeln, nachdem diese bis auf einen Bruchtheil in ganzen Zahlen gefunden sind. Méthodes nouvelles et abrégées pour l'extraction et l'approximation des racines et pour resoudre par le cercle et la ligne droite plusieurs problêmes solides et sursolides, etc. par M. de Lagny. Seconde édition, à Paris

1692. Dieses veranlaßte Halley, bequeme Gränzformeln für die Wurzeln aus dem Binomium $a^n + b$ zu suchen, deren eine irrational ist, und die Wurzel (für ein positives b) zu groß angiebt, die andere rational und zu klein ist. Zugleich zeigt er auch, wie die Annäherung zu dem Werthe einer Wurzel schnell bewerkstelligt werden kann, in den Phil. Transf. 1694. n. 210.

Raphson lehrte ein allgemeines Verfahren die Wurzeln durch Näherung zu finden, in seiner Analysis aequationum universalis 1690 (zweyte Ausg. 1697), welches Werk Halley rühmt. **Brook Taylor** theilte in den Transactionen für 1718 eine Verbesserung der Annäherungsmethode mit, die er darin im Jahre 1700 vorgetragen hatte.

Wie die Cardanische Regel für cubische Gleichungen auch auf den Fall, da alle drey Wurzeln möglich sind, anzuwenden sey, blieb den Algebraisten dunkel, ehe man nicht die Wurzel aus einer zweytheiligen Größe durch eine Reihe darstellen konnte. Sie konnten nur in solchen Fällen sie anwenden, da die Cubikwurzeln die Form ihrer Cuborum haben, indem alsdann das Unmögliche sich hebt. Das hatte Bombelli schon gefunden. Die Methode ist aber indirect. **Leibnitz** machte zuerst die Bemerkung in einem Briefe an Wallis, vom Jahr 1698, daß die Cardanische Formel in jenem Falle eine wahre Größe ist, ob sie gleich die Form einer unmöglichen hat, weil nämlich das Unmögliche sich virtualiter, wie er sich ausdrückt, aufhebe; es verschwinde, wenn die Cubikwurzel aus jedem der beiden Theile der Formel gezogen werde, in dem Aggregat der Wurzeln. (Wallisii Opp. T. III. coll. epist. 27. und Leibn. Opp T. III p. 126; vergleiche einen Brief an Oldenburg vom Jahre 1675. Opp T. III. p. 35, wo Leibnitz von einer Regel redet, die keine Versuche erfordert, und das Unmögliche begreift.) Allein erst lange nachher nahm man diese Rechnung wirklich vor. **Nicole** that es in vier Abhandlungen, die in den Mem. de l'Acad. des Scienc. 1738. 1741 und 1743 befindlich sind. In einer Abhandlung in dem Jahrgange von

1744 giebt er den cubischen Gleichungen zweyerley Formen, die geschickt sind, alle drey Wurzeln durch Näherung zu finden, (s. Cardans Regel). Man hat sich noch in den neuesten Zeiten viel mit der Cardanischen Regel beschäftigt. Die mehresten Schriften darüber sind in dem gleich vorher angewiesenen Artikel angeführt.

Wenn man die Cardanische Formel allgemeiner macht, und die Wurzel einer Gleichung setzt $x = \frac{1}{2}(\sqrt{(1 + a^2)} + a)^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}(\sqrt{(1 + a^2)} - a)^{\frac{1}{n}}$, oder auch $x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{(a^2 - 1)})^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(a - \sqrt{(a^2 - 1)})^{\frac{1}{n}}$, wo n eine ungerade ganze Zahl ist, so führt dieses zu einer rationalen Gleichung für x, in welcher bloß die ungeraden Potenzen von x vorkommen, und die Coefficienten gewisse reguläre Functionen von n sind. Diese Gleichungen gab Moivre in den Phil. Trans. 1707. n. 309. Anhang zu Newtons Arithm. univ. p. 270. Die Wurzel ist der Sinus oder Cosinus eines hyperbolischen Sectors, (s. Goniometrie VII.)

Die Regel des Descartes über die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung erwies zuerst de Gua in den Mem. de l' Acad. des Sc. 1741; hernach auf andere Arten **Segner, Kästner, Äpinus, Milner.** (S. Gleichung VI. 5).

Fontaine gab in den Mem de l' Acad. des Sc. 1747. eine Methode an, die Wurzeln durch Näherung zu finden, welche ganz allgemein seyn soll, aber beschwerlich und langsam ist, auch eine weitläufige Vorarbeit erfordert, weil es auf Bedingungen wegen der Möglichkeit und Unmöglichkeit der Wurzeln ankommt, die für jeden Fall zur Hand seyn müssen. Die Methode ist nicht in Gebrauch gekommen. In der Encyclopédie méthodique, partie mathém. art. Equation, macht d' Alembert Erinnerungen wegen ihrer Zuverlässigkeit. Eine genauere Prüfung derselben hat la Grange in seinem Werke de la résolution des équations numériques (à Paris an VI.), p. 153 — 164 angestellt. Er findet sie für höhere Gleichungen als die vom vierten

Grade nicht anwendbar, und in gewissen Fällen trüglich. In den Pariser Mem. für 1747 ist nur ein Abriß der Methode enthalten. Vollständiger, aber auch ohne Beweise, findet sie sich in der Sammlung von Memoiren des Verfassers, die im Jahr 1764 herausgekommen ist.

Euler hat manche zur Algebra gehörige Abhandlungen geliefert. Eine merkwürdige ist: de formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio. Comm. Petr. T. VI. a. a. 1732. Darin ist eine neue Methode zur Auflösung biquadratischer Gleichungen enthalten, die in dem Artikel, **Gleichung** IV. befindlich ist. Von Euler sind zwey Abhandlungen über die unmöglichen Wurzeln, eine in den Mem. de Berlin 1749, die andere in den Nov. Comm. Petr. T. XIII. 1768; ferner über die Auflösung der Gleichungen jedes Grades, N. C. Petr. T. IX. 1762; und Bemerkungen über die Wurzeln der Gleichungen, N. Comm. Petr. XV. worin die Sätze von den Summen der Potenzen der Wurzeln bewiesen werden; auch eine Näherungsmethode für die Wurzeln Nova Acta Petr. 1788. In der Introd. in Anal. Infin. zeigt Euler, wie die rücklaufenden Reihen zur Berechnung der Wurzeln gebraucht werden können, und handelt darin auch die Construction der Gleichungen ab. In den Institt. Calc. diff. lehrt er eine Anwendung der Differentialrechnung zur Auflösung der Gleichungen durch den Gebrauch des Taylorschen Lehrsatzes, ferner wie mittelst der Lehre vom Größten und Kleinsten die wirklichen Wurzeln entdeckt werden können, und welche Kennzeichen der unmöglichen Wurzeln sich angeben lassen.

Lambert hat Untersuchungen über die Gleichungen jedes Grades in den Mem. de Berlin 1763 angestellt. Eine lehrreiche Abhandlung über die Verwandlung und Auflösung der Gleichungen ist in seinen Beyträgen zur Mathematik, im 2ten Theil enthalten.

La Grange hat durch Hülfe einer feinen Theorie die numerische Auflösung der Gleichungen sehr erleichtert. In den beiden Abhandlungen über diesen Gegenstand, Mem. de Berlin 1767 und 1768 wird gezeigt, wie man

die den Wurzeln nächsten ganzen Zahlen finden, die unmöglichen Wurzeln entdecken, und die Wurzeln näherungsweise durch Kettenbrüche, deren Theorie hier zugleich erweitert wird, angeben könne. Diese beiden Abhandlungen sind mit sehr wichtigen Zusätzen neu herausgegeben, unter dem Titel, de la résolution des équations numériques de tous les degrés, par J. L. Grange, à Paris An VI. 266 p. in 4. welches Werk die Materie erschöpfen möchte. Auch die literalen Gleichungen durch Reihenausdrücke für die Wurzeln aufzulösen zeigt la Grange eine neue Methode in den Mem. de Berlin 1768. Sehr tiefsinnige Bemerkungen über die Natur der Gleichungen sind enthalten in seinen reflexions sur la resolution algébrique des équations, Nouv. Mem. de Berlin 1770. 1771.

Die Form der unmöglichen Wurzeln mit völliger Schärfe zu erweisen, bemühten sich **d'Alembert**, **Euler**, **la Grange**, **Foncenex**, **Gauß**. (S. Gleichung VI.)

Die Reduction mehrerer, für eben so viele unbekannte Größen gegebener, Gleichungen auf eine Gleichung für eine dieser Größen allein, oder die Lehre von der Elimination, ist in den neuern Zeiten mit Fleiß betrieben worden. Die Reduction für zwey Gleichungen lehrten **Euler**, **Cramer**, **la Grange**; und für mehr als zwey Gleichungen **Bezout** in einem großen Werke: Théorie générale des équations algebriques, à Paris 1769. 469 p. in 4. (s. Elimination).

Algebraisch, was zur Algebra gehört oder damit in Verbindung steht.

Algebraische Auflösung ist, die durch Hülfe der Algebra gefunden, und nach den Regeln derselben ausgeführt wird, im Gegensatz gegen eine **geometrische**.

Algebraische Formel ist der symbolische Ausdruck einer Größe durch diejenigen, aus welchen sie zusammengesetzt wird. Z. B. die Formeln für die Wurzeln einer quadratischen oder cubischen Gleichung.

Algebraische Gleichung ist entgegengesetzt der analytischen. Jene enthält die Art, wie eine Größe aus an-

dern zusammen gesetzt wird; diese ist eine Verknüpfung zweyer verschiedener Formen von gleicher Quantität. (S. Gleichung im Anfang.) Eine Gleichung heißt auch **algebraisch** im Gegensatz gegen die transscendenten, welche transscendente Größen, als Kreisbogen, Exponentialgrößen mit veränderlichen Exponenten, und die Integralgrößen zu unintegrirbaren Differentialen enthalten. Diese alle können nur durch unendliche Reihen dargestellt werden.

Algebraische Größe ist eine solche, die aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, es sey in der Form ganzer Zahlen oder von Brüchen, zusammengesetzt wird, im Gegensatz gegen transscendente, die gleich vorher namhaft gemacht sind.

Algebraische krumme Linie, oder Curve, ist diejenige, deren Natur durch eine endliche algebraische Gleichung zwischen ihren Coordinaten dargestellt werden kann, im Gegensatz gegen die transscendenten, deren Gleichungen Kreisbogen und Exponentialgrößen enthalten, oder aus unendlich vielen Gliedern bestehen. S. krumme Linien.

Algebraische Zahl oder Cossische Zahl war in der alten numerischen Algebra eine Zahl, welche das Zeichen einer Potenz oder Wurzel vor sich hat. Die Alten hatten für jede Potenz oder Wurzel eigene Zeichen.

Algebraische Zeichen sind die Symbole, die in der Algebra und der allgemeinen Rechnung überhaupt gebraucht werden. Sie bezeichnen theils die Größen selbst, theils ihre Formen, theils ihre Verbindung. S. Zeichen.

Algorithmus, auch Algorismus, bedeutete in den mittlern Zeiten, als die Rechnung mit den dekadischen Ziffern in Europa eingeführt ward, diese neue Rechnungsart. Das Wort ist aus dem arabischen Artikel, *Al*, und dem Griechischen, *Arithmos*, Zahl, zusammengesetzt, wie Almagestum u. a. Eine Arithmetik in Versen, welche der Arithmetik des Joh. de sacro Bosco beygefügt ist, fängt sich mit folgenden Zeilen an:

Haec Algorismus ars praesens dicitur, in qua
Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris, etc.

mit den beygezeichneten Ziffern. Von einem unbekannten Verfasser, vermuthlich aus dem 13ten Jahrhundert, ist ein Werk: Opusculum de praxi numerorum, quod Algorismum vocant, mit des Jac. Fabri Epitome seu brevis Introd. in Boëthii Arithmeticam von Jodocus Clichtováus 1503 herausgegeben. Von Georg Purbach oder Peurbach im 15ten Jahrhundert ist eine Arithmetik vorhanden, welche den Titel hat: Algorithmus de numeris integris, fractis, regulis communibus et de proportionibus, im 16ten Jahrhundert mehrmahls gedruckt.

Von den Neuern wird Algorithmus bisweilen für jede Art der Rechnung gebraucht, als Algorithmus infinitesimalis, exponentialis, sinuum, etc. In der Encycl. méthod. heißt es pleonastisch: Algorithme du calcul intégral, du calcul exponentiel, du calcul des sinus.

Alhazens Aufgabe. S. zweyte Abtheilung dieses Werks.

Aliquantus wird von einem Theile einer Zahl oder einer Größe gebraucht, wenn der Theil sich zu dem Ganzen nicht verhält, wie die Einheit zu einer ganzen Zahl. So ist 5 eine pars aliquanta von 16.

Aliquotus wird von dem Theile eines Ganzen gebraucht, wenn er sich zu diesem verhält, wie die Einheit zu einer ganzen Zahl. So ist 5 eine pars aliquota von 20.

Aliza regula ist der Titel, welchen Cardan einem Buche giebt, worin er schwerere Fragen aus der Arithmetik und Algebra vorträgt, insbesondere die cubischen Gleichungen und den schwierigen Fall bey seiner Formel für dieselben. Die Abstammung des Wortes ist nicht bekannt. S. Kästners Geschichte der Mathematik. Th. I. S. 162.

Allgemein ist, was nicht auf eine bestimmte Größe oder bestimmte Formen der Größen eingeschränkt wird. In der Geometrie wird den Größen

nie eine bestimmte Quantität gegeben, sondern die gezeichnete Figur dient als Repräsentantiun für alle mögliche, bey welchen dieselben Bedingungen der Construction sich finden. Die angewandte Geometrie giebt den geometrischen Größen eine bestimmte Quantität. In der Wissenschaft selbst sind die Sätze nur ihrer Ausdehnung nach verschieden. Der pythagoräische Lehrsatz z. B. ist ein besonderer Satz. Allgemeiner ist der Satz: wenn über den Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks ähnliche Figuren verzeichnet werden, so ist die Figur über der Hypotenuse so groß, als die beyden über den Katheten beschriebenen zusammen genommen. Ein allgemeiner geometrischer Satz ist, daß alle ähnliche Körper sich verhalten, wie die Würfel der daran oder in denselben auf einerley Art gezogenen Linien. Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, sind Linien von derselben Ordnung, und haben gewisse allgemeine Eigenschaften neben den besondern, die jeder dieser Linien allein zukommen.

In der Arithmetik pflegt man Sätze und Auflösungen an bestimmten Zahlgrößen zu erweisen, doch so, daß daraus die Allgemeinheit derselben erhellt. Für Anfänger legt man eine Aufgabe in bestimmten Zahlen vor, um sie für die Auflösung in unbestimmten Zahlen vorzubereiten. Wenn man die Potenzen eines Binomium, $a + b$, nach der Reihe entwickelt, so erhält man Sätze, die der Quantität nach allgemeine, aber der Form nach besondere oder vielmehr individuelle sind.

Wird der Exponens unbestimmt gelassen, so erhält man ein allgemeines Theorem, entweder mit Einschränkung auf ganze Werthe der Exponenten, wie es die ältern Analysten vortrugen, oder unbedingt allgemein, wie es durch Newton gefunden ist. Das allgemeine Glied einer Reihe ist der Ausdruck irgend eines Gliedes derselben durch gewisse gegebene Größen und die Stelle desselben. Eine allgemeine Gleichung für die Kegelschnitte ist eine solche, die jeden derselben, bey jeder Lage der Abscissenlinie, und für jeden Ordinatenwinkel darstellen kann. In diesen, so wie in den allgemeinen Gleichungen für Linien höherer Ordnun-

gen, entsteht die Allgemeinheit daher, daß alle mögliche Bestimmungen für die krummen Linien darin aufgenommen werden. In andern Fällen entsteht die Allgemeinheit daher, daß die besondern Bestimmungen weggelassen werden. Die allgemeinen Sätze für die Quadratur, Cubatur und Rectification der krummen Linie, die Bestimmung des Schwerpunctes, des Schwingungspunctes, und manche andere enthalten gar keine gegebene Größen. Das Theorem von la Grange, wenn y irgend eine Function von x ist, jede Function von x durch y auszudrucken, ist eines der allgemeinsten in der Mathematik.

Die Mathematik sucht allenthalben Allgemeinheit in den Sätzen und Aufgaben, in den Beweisen und Auflösungen. Die besondern Sätze und Aufgaben sind deswegen aber nicht unwichtig; denn sie enthalten oft sehr schöne Beziehungen der Größen gegen einander.

Im Lateinischen hat man zwey Worte für das deutsche Wort, allgemein, nämlich generalis und universalis. Das erste scheint von Sätzen gebraucht zu werden; das zweyte von dem, was allgemein anwendbar ist. Man sagt demonstratio universalis, problema universale, constructor aequationum universalis; in der angewandten Mathematik, mensura universalis, horologium universale. Newtons Werk über die Algebra und ihre Verknüpfung mit der Geometrie führt den Titel, Arithmetica universalis. Nach einigen Schriftstellern giebt es auch eine Mathesis universalis, welche aber nur ein kleiner Theil der mit mehrerm Rechte so zu nennenden Analysis ist.

Alligations=Regel oder Allegationsregel (Règle d' alliage) ist eine Rechnungsregel, welche lehrt, wie viel von jeder unter zweyer Sachen, die mit einander vermischt oder zusammen gethan werden sollen, zu nehmen ist, damit die Mischung oder das Ganze einen bestimmten Werth erhalte. Sie ist folgende:

Man schreibe den gegebenen höhern und niedrigern Werth unter einander, und den bestimmten Mittelwerth zur Seite linker Hand, dann subtrahire man den Mittel-

werth von dem höhern, und setze den Unterschied neben den niedrigern Werth rechts; den Unterschied des Mittelwerthes von dem niedrigern setze man neben den höhern; so zeigen diese Unterschiede an, wie viel von jeder der beiden Sorten im Verhältnisse gegen die andere zu nehmen ist.

Z. B. Es verlangte jemand 13löthiges Silber, habe aber kein anderes als 10- und 15löthiges, wie viel muß er von jedem nehmen, daß die Mischung 13löthig werde. Der Werth der Silbergattungen wird durch die Anzahl der Lothe fein Silber in einer Mark, oder durch das Löthige angezeigt. Man mache nun den Ansatz, wie folget:

	15	3
13		
	10	2

Von dem bessern Silber sind 3 Theile gegen 2 Theile von dem schlechtern zu nehmen. Theilt man also das ganze Gewicht des zu verfertigenden Werks in 5 Theile, so kommen 3 dieser Theile an feinem Silber, und 2 an schlechtem zu demselben.

Den Beweis dieser Regel giebt die Auflösung der 5ten Aufgabe in dem Artikel, Gleichung. I.

Man kann den Beweis an dem gegebenen Beyspiele auch folgender Gestalt führen. Der Goldschmied büßet auf jede Mark des feinern Silbers 2 Loth fein ein, wenn er es für 13löthiges rechnet, gewinnt hingegen auf jede Mark des 10löthigen 3 Loth fein, wenn er es als 13löthiges verkauft. Damit weder er noch der Käufer Schaden leiden, muß die Menge von der einen und der andern Art Silber sich umgekehrt verhalten wie der Gewinn und Verlust an demselben.

Die Probe der Rechnung ist, daß man aus den berechneten Mengen und ihren Werthen den Werth der Mischung berechne, und daraus den Werth der Einheit für die Menge der Mischung, welcher der bestimmte seyn muß.

Z. B. Man habe in dem Beyspiele 20 Mark Silber zu der Mischung bestimmt, so sind dazu zu nehmen 12 Mark des bessern und 8 Mark des schlechtern Silbers.

Jene enthalten 12. 15 Loth fein Silber oder 180 Loth; diese enthalten 80 Loth fein Silber, zusammen 260 Loth fein Silber in 20 Mark, also 13 Loth in 1 Mark, wie es seyn soll.

Die Allegations-Regel könnte ihren Namen von dem Falle haben, bey welchem sie am meisten gebraucht wird, dem Legiren der edlen Metalle mit einander oder mit unedlen. Von Clausberg nennt sie so. Es scheint aber Alligationsregel gewöhnlicher zu seyn. Stifel, nennt die beiden gegebenen Zahlen numeros alligandos, und die mittlere Zahl, numerum, ad quem fit alligatio. So bedeutet Alligation das Verknüpfen zweyer Zahlen mit einer dritten.

Zweytes Exempel. Es hat jemand 457 Mark 4 Loth Silber, welche die Mark zu 11 Thlr. gerechnet werden. Dieses will er mit Kupfer beschicken, von welchem $\frac{1}{2}$ Pfund oder 1 Mark 4 Ggr. oder $\frac{1}{6}$ Thlr. kostet, so daß die Mark auf 10 Thlr. komme; wie viel ist an Kupfer zuzusetzen? Nach der obigen Art ist der Ansatz:

	11	$9\frac{5}{6}$	59
10			
	$\frac{1}{6}$	1	6

das heißt: auf 59 Theile Silber sind zu nehmen 6 Theile Kupfer an Gewicht. Demnach sind auf $457\frac{1}{4}$ Mark Silber zu nehmen $46\frac{1}{2}$ Mark Kupfer.

Wenn mehr als zweyerley Materien zu vermischen sind, so ist die Aufgabe unbestimmt, und man hat die Freyheit, noch irgend eine Bestimmung zuzufügen. Die Vorschriften der Rechenmeister sind nicht leicht zu fassen. Ein wenig Buchstabenrechnung stellt das Verfahren ganz deutlich dar.

Die Materien seyn dreyerley Silber. Das erste ist m löthig, das zweyte n löthig, das dritte p löthig; die Mischung sey r löthig. Die ganze Mischung habe das Gewicht a Mark. Von den drey Arten Silber seyn zu nehmen nach der obigen Ordnung x, y, z Mark. Es ist nun

$$\text{I. } mx + ny + pz = ra$$
$$\text{II. } x + y \div z = a$$

Man nehme an, daß von dem zweyten und dritten Silber gleich viel genommen werden solle, oder daß $y = z$ sey, so ist

$$\text{I. } mx + (n + p)y = ra$$
$$\text{II. } x + 2y = a$$

Multiplicirt man die zweyte Gleichung mit r, so ist

$$\text{II. } rx + 2ry = ra$$

also

$$\text{III. } mx + (n + p)y = rx + 2ry$$

oder

$$\text{III. } (m - r)x = (2r - n - p)\ y.$$

und

$$x : y = 2r - n - p : m - r$$

oder

$$x : 2y = 2r - n - p : 2m - 2r$$

Diese Proportion zeigt, wie das Gewicht des ersten Silbers sich zu dem Gewichte der beiden andern Arten Silber zusammen genommen verhält. Aus dieser Proportion folgt (s. Verhältniß.)

$$x + 2y : x = 2m - n - p : 2r - n - p$$

oder

$$a : x = 2m - n - p : 2r - n - p$$

Exempel. Für das Silber A sey $m = 15$; für B sey $n = 11$; für C sey $p = 7\frac{1}{2}$; die Mischung soll 13löthig seyn, so daß $r = 13$. Hier ist $2m - n - p = 11\frac{1}{2}$; $2r - n - p = 7\frac{1}{2}$, folglich $a : x = 11\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2} = 23 : 15$. Von dem Silber B und dem C sind zu nehmen von jedem 4 Theile.

Oder man nehme eines der Gewichte wie z nach Belieben an, z. B. so viel als davon vorhanden ist. Die beiden Gleichungen für x und y sind nun

$$\text{I. } mx + ny = ra - pz$$
$$\text{II. } x + y = a - z$$

Die zweyte mit n multiplicirt ist

$$\text{II. } nx + ny = na - nz.$$

Diese von I. abgezogen, wenn n kleiner als m ist, giebt

$$\text{III. } (m - n)\,x = (r - n)\,a + (n - p)\,z$$

also $$x = \frac{(r - n)\,a + (n - p)\,z}{m - n}.$$

Eben so ist $$y = \frac{(m - r)\,a - (m - p)\,z}{m - n}.$$

Wenn r kleiner als n ist, so ist das Stück des Zählers, $(r - n)\,a$ subtractiv. Eben so ist $(n - p)\,z$ und $(m - r)\,a$ subtractiv, jenes, wenn n kleiner als p, dieses, wenn m kleiner als r ist. Hingegen ist $(m - p)\,z$ additiv, wenn m kleiner als p ist. Alle Fälle werden durch den Gebrauch entgegengesetzter Größen aus dem bey der Rechnung zum Grunde gelegten leicht hergeleitet.

Exempel. Es sey $m = 14$; $n = 11$; $p = 9$; $r = 12$. Das Gewicht der Mischung $a = 50$ Mark. Von dem dritten Silber wolle man nehmen, 16 Mark.

Es ist $$x = \frac{1.\,10 + 2.\,16}{3} = \frac{82}{3} = 27\tfrac{1}{3};$$

$$y = \frac{2.\,50 - 5.\,16.}{3} = \frac{20}{3} = 6\tfrac{2}{3}.$$ Beide Gewichte geben mit $z = 16$ das Gewicht 50.

Man setze, daß $m = 11$; $n = 9$; $p = 14$; und wie vorher $r = 12$; $a = 50$; $z = 16$ sey, so daß nun die Menge des besten Silbers bestimmt ist. Nun ist

$$x = \frac{3.\,50 - 5.\,16}{2} = 35; \text{ und}$$

$$y = \frac{-1.\,50 + 3.\,16}{2} = -1.$$

Da hier y negativ ist, so paßt die Annahme der Größen nicht auf eine Mischung, sondern auf einen Tausch. Wer 35 Mark 11löthiges Silber und 16 Mark 14löthiges erhält, und dagegen eine Mark 9löthiges zurückgiebt, hat nun $+ 385 + 224 - 9$ Loth fein Silber $= 600$ Loth

fein, und + 35 + 16 — 1 Mark legirtes Silber = 50 Mark. Die Menge des feinen Silbers 600 Loth dividirt durch die Zahl der Marke giebt 12. — Fände sich x oder y größer, als die Menge des von der ersten oder zweyten Gattung vorhandenen, so müßte man die Annahmen ändern, wie es auch geschehen muß, wenn kein Tausch geschehen, sondern eine wirkliche Mischung vorgenommen werden soll.

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn vier oder mehr Materien zu vermischen gegeben sind, so daß ein Maaß (Pfund, Mark u. dgl.) der Mischung einen bestimmten Werth erhalte. Bey vier Materien kann man zwey Bestimmungen nach Gutdünken machen, bey fünf drey u. s. f.

Von Clausberg demonstrative Rechenkunst Th. IV. §. 1319 — 1354.

Kästners Fortsetzung der Rechenkunst, S. 396.

Almucabala ist eine alte Benennung der Algebra, so fern sie die Relation der Größen durch Gleichungen ausdruckt. Lucas Paciolus nennt den Theil seines Werks, der von der Algebra handelt, l' Arte maggiore, ditta dal volgo la Regola della Cosa, over Alghebra e Almucabala, und erklärt den letztern Ausdruck durch Oppositio. S. Algebra.

Alterna ratio (verwechseltes Verhältniß) ist, wenn in einer Proportion die mittlern Glieder verwechselt werden, in dem Falle, daß in derselben alle Glieder gleichartig sind.

Alterni anguli (Wechselwinkel), s. Parallelen.

Ambe, eine Verbindung von zwey Nummern im Lotto. In der Combinationslehre heißt eine Verbindung von zwey Größen eine Binion.

Ambigena hyperbola ist der Name, welchen Newton dem hyperbelförmigen Theile einer Linie von der dritten Ordnung giebt, wenn der eine Schenkel innerhalb des Asymptotenwinkels liegt, der andere aber außerhalb dieses Winkels, so daß dieser seine Asymptote irgendwo schneidet, und von da an außerhalb des Asymptotenwin-

kels sich an derselben hin erstreckt. Newt. enumeratio linearum tertii ordinis s. Linien der dritten Ordnung.

Amblygonium triangulum, ein stumpfwinklichtes Dreyeck.

Amicabiles numeri, s. Befreundete Zahlen.

Amplitudo arcus, **Weite eines Bogens**, der durchgehends nach einer Seite hin hohl ist, ist der Winkel, welchen die Normalen an den Endpuncten mit einander machen. Dieser Winkel ist gleich dem äußern Winkel der Berührungslinien an den Endpuncten des Bogens. Die **Weite eines parabolischen Bogens** ist die auf die Axe der Parabel senkrechte Sehne. In dieser Bedeutung kommt der Ausdruck besonders vor, wenn die Parabel als die Bahn einer Bombe oder Kugel betrachtet wird. Die Weite ist hier die horizontale Linie von den Wurfspuncte an bis an den Punct, wo die Bombe den Horizont beym Niederfallen trifft. Sie heißt die **Wurfsweite** oder **Schußweite**, auch für die Linie, die in der Luft, als einem widerstehenden Mittel, beschrieben wird (s. Parabel). In der Astronomie kommt der Ausdruck: amplitudo, auch vor.

Analogie (Analogia) ist gleichbedeutend mit Proportion. Es ist das griechische Wort, ἀναλογια, wodurch Euklides die Gleichheit zweyer Verhältnisse ausdruckt, s. Proportion.

Analysis, als wissenschaftliches System, ist die allgemeine Darstellung und Entwickelung der Zusammensetzungsarten der Größen durch Rechnung. Sie behandelt alle Größen wie Zahlen, aber als unbestimmte in Absicht auf die Einheit und die Menge der Einheiten. Dadurch unterscheidet sie sich von der Geometrie, welche die ausgedehnten Größen, so wie die Lagen der Linien und Ebenen, im Ganzen mit einander vergleicht, ohne sie als Vielheit von irgend einer Einheit und Theilen der Einheit zu betrachten, selbst bey proportionalen Größen diese Vorstellung nicht erfordert. Da aber die ausgedehnten Größen

und die Winkel sich als Zahlgrößen ansehen lassen, so kann die Analysis auch zur Darstellung und Entwickelung geometrischer Verbindungen von Größen angewandt werden, nur daß diese, wo es auf die Lage der Linien und Ebenen ankommt, oft umständlicher und schwieriger ist, als die geometrische Zusammensetzung, die durch ein der Geometrie eigenthümliches Verfahren geschieht, s. die Artikel: Anwendung der Algebra auf die Geometrie; Krumme Linien.

Da die analytische Behandlung der Verbindungen der Größen allgemeine Lehrsätze und Auflösungen liefert, so ist ihr eine allgemeine Bezeichnungsart der Größen und ihrer Formen (Arten der Zusammensetzung) nothwendig. Diese wird in der **Buchstabenrechnung** gelehrt, welche zugleich die leichtesten und gemeinsten Rechnungsarten oder Umwandlungen der Formen enthält, (s. Buchstabenrechnung).

Die Verbindungen der Größen mit einander werden durch symbolische Formeln, durch Gleichungen, ausgedruckt, (s. **Gleichung**.) Die Eigenschaften dieser Formeln, die Zusammensetzung mehrerer Gleichungen und die Auflösung derselben (die Entwickelung des Unbekannten aus dem Bekannten) sind der Gegenstand der **Algebra**. Diese ist der erste Theil der Analysis. Zuweilen wird dadurch auch die ganze allgemeine Rechnung verstanden, so daß Algebra und Analysis als gleichbedeutend genommen werden. Es ist aber besser, die Algebra so einzuschränken, wie hier geschehen.

Die **Analysis im engern Verstande**, oder die eigentliche Analysis, und zwar sofern sie sich mit endlichen Größen beschäftigt, ist die Wissenschaft von den Formen der Größen, und lehrt theils die Umwandlung einer Form in eine andere, theils die Darstellung der Glieder einer stetigen Fortschreitung von Größen durch die zugeordneten Glieder einer andern Reihe nach irgend einem Gesetze. Man nennt sie zuweilen auch die **Theorie der Functionen**, weil Function der Ausdruck einer Größe durch andere ist. Die Algebra und Analysis betrachten die Größen auf verschiedene

Art. Jene unterscheidet sie in bekannte und unbekannte, diese in unveränderliche oder bestimmte, und in veränderliche oder unbestimmte. Beide gebrauchen zur Darstellung oder Zusammensetzung der Größen Gleichungen, die sich aber wesentlich unterscheiden. Z. B. in der algebraischen Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ wird die Relation einer oder dreyer Größen zu den gegebenen a, b, c, auf eine noch nicht entwickelte Art ausgedruckt. In der analytischen Gleichung $(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$ werden zweyerley Formen mit einerley Bestandtheilen aufgestellt, woraus dieselbe Größe entsteht. Es ist die Verwandlung eines Products in ein Aggregat. Die analytische Gleichung $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ giebt das Gesetz der gemeinschaftlichen Bildung aller durch y bezeichneten Größen durch die zugehörigen x mittelst der unveränderlichen Größen A, B, C, D, etc. zu erkennen. Die algebraische Gleichung $0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ enthält die Relation zwischen den gegebenen Größen und denjenigen x, für welche $y = 0$ ist. Überhaupt ist die Analysis im engern Verstande der wichtigere Theil, sowohl wegen des Inhalts, da die Betrachtung der Formen eigentlich das Interessante in der Mathematik ist, als wegen ihrer mannichfaltigen Anwendung. Die Algebra macht sich durch ihre Dienste bey der Erfindung des Unbekannten mehr nothwendig, als durch die Behandlung ihres Gegenstandes angenehm.

Der nachstehende Entwurf der Analysis endlicher Grössen, mit Ausschluß der Buchstabenrechnung und der Algebra, wird dem Leser den großen Umfang dieses wichtigen Theils der reinen Mathematik zeigen, und ihm behülflich seyn, sich die dahin gehörigen Untersuchungen in einer guten Ordnung aus diesem Wörterbuche bekannt zu machen.

I. Die Lehre von den **Functionen** oder Formen der Größen.

1. Verschiedene Arten der Functionen.
2. Verwandlungen der Functionen,
   a) Der Aggregate in Producte.

b) Gebrochner Functionen in Reihen.

c) Zerlegung eines Bruches in mehrere Brüche mit zweytheiligen einfachen Nennern, von der Form a + x, wenn sich solche aus dem Nenner des vorgegebenen Bruches absondern lassen.

d) Verwandlung einer Function durch Substitution einer andern Größe für die darin befindliche.

e) Darstellung einer gebrochenen Function durch einen Kettenbruch.

II. Anfang der Theorie der **Reihen**.

1. Verschiedene Arten, wie Reihen entstehen.

2. Wie die Coefficienten einer aus mehrerern Reihen zusammengesetzten Reihe bestimmt werden.

3. Reihen vom häufigsten Gebrauche.

a) arithmetische.

α. gemeine.

β. höhere.

b) Geometrische.

c) Rücklaufende.

III. Lehre von den **Combinationen**.

1. Versetzungen einer gegebenen Menge von Dingen oder Elementen, entweder durchgehends verschiedenen, oder mit untermischten gleichen.

2. Aufzählung der Combinationen jeder Classe ohne oder mit Wiederholungen.

3. Aufstellung der Combinationen mit bestimmten Namen der Zahlenstellen ihrer Elemente.

4. Andere Anordnungen der Combinationen.

5. Relationen zwischen den Combinationen und den Summen der Potenzen von den combinirten Größen.

IV. Die **combinatorische Analysis** im Allgemeinen.

1. Ihr Zweck.

2. Ihre Methode.

3. Ihre Charakteristik.

V. **Producte** von gleichen zweytheiligen, vieltheiligen und unendlichen Factoren; wie auch Zerlegung einer

Function in gleiche Factoren. — **Der binomische und polynomische Lehrsatz.**

Eigenschaften der Binomial-Coefficienten.

VI. Producte aus ungleichen binomischen Factoren. (Cf. Euleri Introd. in Anal. Infin. P. I. cap. 15. 16.)

1. Summirung der Potenzen reciproker Zahlen und anderer Reihen.
2. Zerfällung der Zahlen in ihre aliquanten ganzen Theile (partitio numerorum).

VII. Producte aus binomischen Factoren, die in arithmetischer Progression genommen werden, eine Art der von Euler sogenannten Functionum inexplicabilium. Instit. Calc. diff. P. II. cap. 16. Kramps **numerische Facultäten.** (Analyse des refractions, Chap. 3.).

VIII. **Logarithmische Functionen.**

1. Reihen, den Logarithmen durch die zugehörige Zahl oder eine Function derselben, und die Zahl durch ihren Logarithmen darzustellen.
2. Methode zur leichten Berechnung der Logarithmen. (Logarithmotechnie).
3. Logarithmische oder Exponentialgleichungen, der Hyperbel angehörig, und Gleichungen zwischen den hyperbolischen Sinus, Cosinus und Quersinus, deren zugehörige Sectoren ein gegebenes Verhältniß haben. Entlehnt aus der Integralrechnung, wegen des Zusammenhanges mit der Theorie der Logarithmen, und ihrer Verwandtschaft mit den gleichartigen Formeln für die zu Kreisbogen gehörigen Linien.

Anm. Die Deduction der logarithmischen Functionen durch Hülfe der Analysis des Unendlichen wird darum nicht zurückgesetzt, wenn sie hier der Analysis der Endlichen zugeeignet werden. Die andere Methode hat auch ihre Vorzüge. Man muß eine Theorie von mehr als einer Seite ansehen, und alle Zugänge zu ihr kennen. Eben dieses gilt auch von den circularen Functionen.

IX. Circulare Functionen.

1. Formeln für die Sinus und Tangenten zusammengesetzter Winkel aus den Sinus und Tangenten der Theile dieser Winkel. Die Sammlung derselben heiße Goniometrie.
2. Reihen für die Winkel oder Bogen und ihre zugehörigen Linien, und für diese durch jene, was man Cyklometrie nennen mag.
3. Cyklotechnie, d. i. die Methode alle am Kreise vorkommende Größen leicht und mit der überflüssigsten Genauigkeit zu berechnen.
4. Vergleichungen der circularen und hyperbolischen oder logarithmischen Functionen.

Anm. Der Kreis gehört freylich ursprünglich der Geometrie zu, allein durch die analytische Behandlung wird er ein Gemeingut der Geometrie und Analysis. Die zum Kreise gehörigen Formeln und Functionen erfordern, ausser bey der ersten Gründung, gar keine weitere Hülfe der Geometrie, und werden ganz durch analytische Rechnung entwickelt. Man könnte, wenn man von der Differentialgleichung zwischen Sinus und Winkel, als bloße Größen betrachtet, ausgienge, die Geometrie bey den circularen Functionen ganz entbehren. Diese werden oft gebraucht, wo gar nicht von Linien und Winkeln die Rede ist, als allgemeine Größen.

X. Anwendung der circularen Functionen auf die Zerlegung einer Function in dreytheilige mögliche Factoren, wenn sie in zweytheilige einfache und mögliche nicht zerlegt werden kann.

Cotesischer Lehrsatz.

XI. Reihen, zur Fortsetzung des zweyten Abschnitts.

1. Verwandlung der Reihen.
2. Allgemeines Glied einer Reihe, oder das Gesetz derselben.
3. Summirung der Glieder einer Reihe. Bernoullische Zahlen.
4. Umkehrung einer Reihe.

5. Interpolation der Glieder einer Reihe.

XII. **Gleichungen zwischen zwey oder mehreren veränderlichen Größen.**

1. Eintheilung in algebraische und transscendente.
2. Eintheilung der algebraischen Gleichungen in Ordnungen und Classen.
3. Entwickelung des Werthes einer von zwey veränderlichen Größen durch eine Reihe, die nach den Potenzen der andern geordnet ist.

   Newtons Parallelogramm.

XIII. **Analysis der krummen Linien**, in welcher alle Sätze aus den Eigenschaften der Gleichungen mit Zuziehung der analytischen Trigonometrie und der Formeln für circulare Functionen hergeleitet werden. Sie ist zur Versinnlichung der allgemeinen Theorie in dem vorhergehenden Abschnitte nothwendig, und verschafft dem Geiste eine so wohl für die Anwendung nützliche, als auch ohne Rücksicht darauf angenehme Beschäftigung. Die Behandlungsart setzt sie mit der Analysis in die engste Verbindung.

XIV. **Endliche Differenzen-Rechnung.**

Die Vorbereitung zur Differentialrechnung, sehr wichtig zur genauern Einsicht in die Beschaffenheit der Functionen.

XV. **Verbindung** der Analysis endlicher Größen **mit der Differentialrechnung.**

1. Durch den Taylorschen Lehrsatz, und einige Anwendungen in der Lehre von den Reihen.
2. Durch den allgemeinen Satz von la Grange, für die Umkehrung und Verwandlung der Functionen, (s. la Grange's Satz).
3. Durch die Bestimmung der größten und kleinsten Werthe einer Function.
4. In der Geometrie der krummen Linien durch Bestimmung der Berührungslinien, der Normalen und ausgezeichneter Puncte; durch die Formeln für verschiedene Erzeugungsarten der Linien, als

Evolution, Rotation, Zurückwerfung der aus einem gegebenen Puncte oder auch unter sich parallel an eine Linie gezogenen geraden Linien, Trajection, u. a.

XVI. **Unbestimmte** oder diophanteische **Analytik**, welche man auch als das zweyte Hauptstück der Algebra ansehen mag.

Der zweyte Haupttheil der Analysis, welcher durch die große Allgemeinheit und Fruchtbarkeit der Methoden die Quelle so großer Entdeckungen in der neuern Mathematik geworden ist, ist die **Analysis der unendlichen Größen.** Sie beschäftigt sich mit den Gränzverhältnissen der Unterschiede der veränderlichen Größen in zwey oder mehrern zusammen geordneten Reihen. Sie besteht aus zwey Haupttheilen.

1. Die **Differentialrechnung** sucht die Gränzverhältnisse aus der gegebenen Relation der Größen, (s. Differentialrechnung).

2. Die **Integralrechnung** sucht diese Relation aus den Gränzverhältnissen. Sie ist der bey weitem schwerere, aber auch höchst wichtige Theil, der immerfort noch Erweiterungen erhält, (s. Integralrechnung).

Die Analysis wird durch die Vorschriften zur Auflösung der Gleichungen, durch ihre Methoden zur Umwandlung der Formen und Entwickelung der Größen, durch ihre allgemeinen Sätze über die Relationen der Größen in ihren mannichfaltigen Verbindungen unter einander selbst, und die gegenseitige Abhängigkeit derselben von der Relation der Unterschiede oder Veränderungen, ein vortreffliches Hülfsmittel zur Auflösungs- und Erfindungskunst. Daher hat die neuere Mathematik, sowohl die reine als die angewandte, in einem Zeitraume von weniger als zweyhundert Jahren, besonders in dem letzten Jahrhundert, so große und schnelle Fortschritte gemacht. Wo die schon bekannten Methoden nicht zureichten, gaben sie doch Veranlassung zur Erfindung neuer Wege. Wer aber auch nur die leichtern Methoden zu benutzen zufrieden seyn muß, hat durch die Analysis das Vergnügen manches selbst zu

erfinden, ohne es andern, vielleicht auf eine für ihn nicht bequeme Art, schuldig zu seyn. Man braucht nicht sehr viele Formeln und Methoden im Gedächtnisse zu behalten, um sich gewöhnlich selbst helfen zu können, wohin man immer zu streben hat, um die Analysis sich recht eigen zu machen. Die Kunst, welche zur Erfindung aller analytischen Lehrsätze und Methoden angewandt ist, verdient sehr die Aufmerksamkeit des Philosophen, weil man dadurch von einer besondern Art der Untersuchungskraft belehrt wird, und des Mathematikers insbesondere darum, weil er dadurch diese Kraft mit Überlegung anwenden lernt. Die Bezeichnungsart macht es allein möglich, weitläufige und verwickelte Verhältnisse zu übersehen. Dadurch, daß die verschiedenen Größen durch bestimmte Symbole, und die Arten ihrer arithmetischen Verbindung durch gewisse Zeichen, nach unveränderlichen Vorschriften angedeutet werden, kann man in wenigen Zeilen eine Untersuchung fassen, die in Worten vorgetragen ganze Blätter einnehmen, und in den meisten Fällen sich durchaus gar nicht vortragen lassen würde.

Das wichtigste Werk für die Analysis endlicher Grössen ist noch immer Eulers Introductio in Analysin Infinitorum, 2 Tomi. Lausannae 1748, und zu Leiden 1797, 2 Bde. Es enthält in dem ersten Theile zwar kein völliges System der eigentlichen Analysis endlicher Größen, aber viele wichtige Capitel derselben. Wegen der Verbindung, worin diese Untersuchungen mit der Analysis der unendlichen Größen stehen, und wegen des Gebrauchs, der hier selbst von der Idee des Unendlichen gemacht wird, hat das Werk den Titel bekommen. Der zweyte Theil enthält eine sehr lichtvolle analytische Theorie der krummen Linien, welche man aus keinem Werke besser als aus diesem erlernen wird, dessen Verfasser immer Tiefsinn mit Deutlichkeit zu vereinigen wußte. Ein zweytes hierher gehöriges Werk von Euler ist seine Differentialrechnung (Institutiones Calculi differentialis, Petrop. 1755), wovon der zweyte und größere Theil die Anwendung der Differentialrechnung auf die Analysis endlicher Größen, beson-

ders auf die Theorie der Reihen, enthält. Dieses muß man vorzüglich zur Hand nehmen, wenn man tiefer in die Analysis dringen will. Michelsen hat es ins Deutsche übersetzt. Die genaue Verbindung der Analysis endlicher Größen mit der Rechnung des Unendlichen kennen zu lernen, dient ein neues sehr scharfsinniges Werk, Théorie des fonctions analytiques par I. L. la Grange, à Paris an V. Es enthält schätzbare Anwendungen auf die Geometrie und reine Mathematik. Man muß dazu gute Fertigkeit für allgemeine und sehr abstracte Rechnungen mitbringen. Das neueste Werk über die Analysis endlicher Größen ist: Du calcul des Dérivations par L. F. A. Arbogast, à Strasbourg, An. VIII. (1800). 404 pag. 4. Die wichtigsten und schwersten Rechnungen werden darin nach einer neuen Methode ausgeführt, die mit der Combinations-Theorie in enger Verbindung steht, (s. Derivations Rechnung.)

Analysis, als Methode bey mathematischen Untersuchungen, ist die Entwickelung des Zusammenhanges der gesuchten Größen mit den gegebenen, oder der veränderlichen unter einander und mit den unveränderlichen Größen. Zur Auflösung irgend einer Aufgabe ist es nothwendig, den Zusammenhang der dazu gehörigen Größen, auch derer, die nicht unmittelbar gegeben werden, zu erforschen. Die Erfindung der Lehrsätze beruht eben darauf. Die mathematische Analysis vollständig kennen zu lernen, muß man die von den Alten gebrauchte, und die bey den Neuern übliche unterscheiden. Die **Analysis der Alten** bezog sich auf die Geometrie, und bediente sich also bloß geometrischer Hülfsmittel; die **Analysis der Neuern** erstreckt sich auf alle meßbaren Gegenstände, und gebraucht die allgemeine Arithmetik, indem sie den Zusammenhang der Größen in Gleichungen bringt.

Von der Analysis der Alten giebt **Pappus** in seiner Sammlung geometrischer Untersuchungen, in der Vorrede zu dem 7ten Buche einen guten Unterricht. Dieser Theil seines Werks enthält die Hülfssätze und manche Bey-

spiele aus den analytischen Schriften der Alten, Lemmata de loco resoluto, (λεμματα τȣ 'αναλυομενȣ τοπȣ). Er scheint unter aufgelöseten Ort die Sammlung von Lehrsätzen, die zur Auflösung dienlich sind, zu verstehen, unter Analysis aber die Methode. Hier folgen seine Worte selbst.

„Was man die Lehre (den Ort) von der Auflösung nennt, ist ein Vorrath von Sätzen, der denjenigen zum Gebrauch bestimmt ist, welche sich mit den Anfangsgründen bekannt gemacht haben, und nun die Auflösung der ihnen vorkommenden Aufgaben selbst zu finden wünschen. Zu diesem Zweck allein ist die Sammlung eingerichtet. Drey Männer haben dazu ihre Beyträge geliefert, Euklides, der Verfasser der Elemente, Apollonius von Pergä, und der ältere Aristäus. Das dabey gebrauchte Verfahren ist theils analytisch, theils synthetisch. Die **Analysis** ist diejenige Methode, da man von dem Gesuchten, als zugestanden angenommen, durch die daraus gezogenen Folgerungen auf etwas Gegebenes kommt, welches zu der Synthesis führt. Bey der Auflösung nämlich betrachtet man das Gesuchte als gefunden, und forscht, woraus es zunächst folget; dann, woraus dieses sich ergebe, und so immer weiter, bis daß man auf diesem Rückwege etwas trifft, das gegeben ist, oder zum Grunde gelegt werden kann. Dieses Verfahren heißt Analysis, gleichsam eine umgekehrte Auflösung. Bey der **Synthesis** hingegen macht man mit demjenigen, was bey der Analysis zuletzt erhalten ward, als etwas gegebenen, den Anfang, und läßt das, was dort folgte, nun vorangehen, in der natürlichen Ordnung nach einander, bis man zu der Darstellung des Gesuchten gelangt. Dieses nennt man die **Synthesis**. Es ist aber die **Analysis** von gedoppelter Art, die theoretische, welche richtige Sätze sucht, und die problematische, welche Aufgaben aufzulösen bemüht ist. Nach der **theoretischen Analysis** sieht man den Satz den man prüft, als wahr an, und zieht aus dieser Voraussetzung Folgerungen, bis daß man auf einen ausgemacht wahren oder falschen Satz kommt. Ist das

erste, so ist auch der Satz, von dem die Frage ist, wahr, und der Beweis geht den umgekehrten Weg der Analysis. Ist der gefundene Schlußsatz falsch, so ist auch der angenommene Satz irrig. Bey der **problematischen Gattung** wird man von dem Gesuchten als bekannt angenommen, durch das, was daraus eins nach dem andern richtig gefolgert wird auf etwas bestimmtes geführt. Ist dieses etwas mögliches, was sich darstellen läßt (ποριςον), was die Mathematiker ein **Datum** nennen, so ist die vorgelegte Aufgabe aufzulösen möglich, und der Beweis nimmt den Weg der Analysis rückwärts. Kommt man aber auf etwas offenbar unmögliches, so ist auch die Aufgabe unmöglich. **Diorismus** ist die Bestimmung, ob und wie, und auf wie mancherley Art einer Aufgabe Genüge geleistet werden mag."

Hierauf macht Pappus die zur Analysis gehörigen Schriften namhaft. Sie sind: die Data, die Porismata, und die Schrift von den Örtern an einer Oberfläche, von Euklides, die Schriften des Apollonius de sectione rationis, (eine von Newton sehr geschätzte Schrift) de sectione spatii, de sectione determinata, de tactionibus, de inclinationibus, de locis planis, und von den Kegelschnitten; die Schrift des Aristaeus de locis solidis, und des Eratosthenis de mediis proportionalibus. Aus diesen Schriften hat Pappus viele Beyspiele in dem 7ten Buche seiner Sammlung angeführt. Sie sind alle, ausser die Data des Euklides, die in einer arabischen Übersetzung erhaltene Schrift des Apollonius de sectione rationis, und das Hauptwerk desselben von den Kegelschnitten, verloren gegangen. In dem 17ten Jahrhundert, vor der Anwendung der Analysis des Unendlichen, wurde die geometrische Analysis mit Fleiß bearbeitet, als von Vieta, Fermat, Viviani, Ghetaldi, Snellius, Huygens, Burrow, u. m. Man bemühte sich die verlornen geometrischen Schriften der Alten wieder herzustellen. Die Engländer lieben die geometrische Analysis sehr, und sind gegenwärtig die Meister in derselben. Newton, der in seinen schweren Untersuchungen über die höhere Mechanik die geometrische Einkleidung und Synthesis gebraucht, pflegte die Anwendung der algebraischen Rechnung

auf die Geometrie zu tadeln. In dem 18ten Jahrh. haben sich die Engländer noch häufig mit den verlornen Schriften des Apollonius beschäftigt. Halley gab die Bücher de sectione rationis und sectione spatii heraus, Oxford 1706; Robert Simson, die loca plana, Glasgow 1749 (deutsch von Camerer in Leipzig 1796), Horsley, die Bücher de inclinationibus, Oxford 1770; Lawson, die Bücher de tactionibus, Lond. 1771. und die de determinata sectione Lond. 1772; Walis, die letztern gleichfalls, London 1772. Dieselben sind von Robert Simson wieder hergestellt und mit zwey Büchern vermehrt, nach dessen Tode auf Kosten des Grafen Stanhope, nebst dem Euklidischen Werke über die Porismata, und einigen andern von Simson nachgelassenen Schriften, zu Glasgow 1776 herausgekommen. Burrow gab die Bücher de inclinationibus, Lond. 1779 heraus.

Die Erfindung der geometrischen Analysis wird von Diogenes Laertius und Proklus (Commentar über das erste Buch des Euklides) dem Plato zugeschrieben. Wir haben von diesem berühmten Philosophen keine mathematische Schrift, daher man sein Verfahren nicht bestimmt kennt. Einige merkwürdige Anwendungen der geometrischen Analysis finden sich in dem zweyten Buche von der Kugel und dem Cylinder des Archimedes, besonders bey der dritten Aufgabe oder 5ten Satze (S. 76 der schätzbaren Ausgabe dieser Archimedischen Schrift von Hauber, Tübingen 1798). Archimedes vergleicht die Größen mit einander, ohne Unterschied, ob sie gegeben oder unbekannt sind, und kommt durch eine Verbindung von Sätzen, die auf den Eigenschaften der Kugel und des Kegels beruhen, endlich auf eine Proportion, die in die algebraische Sprache übersetzt, unmittelbar eine Gleichung vom dritten Grade geben würde, von welcher die Auflösung der Aufgabe abhängt. Man sieht aber auch hier, daß die Analysis der Alten in jedem Falle eigenthümliche Kunstgriffe erforderte.

Die theoretische Analysis, deren Pappus erwähnt, wird kaum anders brauchbar seyn, als bey der Prüfung eines

Satzes, den ein Schriftsteller aufstellt oder anwendet, ohne ihn zu beweisen. Denn man wird nicht leicht durch Vermuthung auf einen mathematischen Satz gerathen. Man pflegt sich auch dieser Beweisart in mathematischen Schriften nicht zu bedienen, kaum anders als bey der Umkehrung eines erwiesenen Satzes, da man zeigt, daß das Gegentheil des aufgestellten umgekehrten Satzes falsch ist, (s. Beweis). Der Leser würde nicht einsehen, welcher Weg zu dem aufgestellten Satze geführt habe, dagegen man bey einem directen Beweise bemerken kann, welche Sätze zu dem gegenwärtigen geleitet haben. Ein Beyspiel einer theoretischen Analysis findet man in Pappi Coll. math. L. VII. prop. 26, worauf aber in prop. 27. eine synthetische folgt.

Zu der Anwendung der alten Analysis auf geometrische Aufgaben lassen sich keine bestimmten Vorschriften geben; man kann hier keine so unveränderlichen Anweisungen ertheilen, daß dadurch in allen Fällen das Gesuchte gefunden würde. Immer ist eine gewisse Vorbereitung nöthig, die Aufspürung und Einführung der Hülfsgrößen oder Mittelglieder, um die gegebenen Größen mit den gesuchten zu verbinden. Man muß aufmerksam auf dasjenige seyn, was durch das unmittelbar Gegebene bestimmt wird, um dadurch sich den Weg zu dem Gesuchten zu bahnen. Hier bleibt es der Erfindungskraft eines jeden überlassen, wie er sich zu helfen habe, da die Mittel zum Zwecke mancherley sind, so wie die Beschaffenheit der Aufgaben sehr verschieden ist. Übung ist hier hülfreicher als Regeln. Man muß, ehe man die Auflösungen geometrischer Aufgaben von andern lernt, seine Kräfte daran versuchen. Die Sätze der Elementar-Geometrie muß man vollkommen gegenwärtig haben, besonders die Eigenschaften des Kreises, die häufig große Dienste thun. Folgende Bemerkungen werden bey diesem Geschäfte von Nutzen seyn. Sie sind von einem mit dem Verfahren der alten Geometern sehr bekannten Manne, Newton in der Arithm. univ. pag. 87. edit. Lugd.

Man hat oft einige der gegebenen Linien zu verlängern, bis sie andere schneiden, oder von einer bestimmten Länge

wenden. Oder man ziehe von einem ausgezeichneten Puncte Parallelen oder Perpendikel, oder verbinde Puncte durch Linien. Wenn zwey nicht parallele Linien mit einer dritten gegebene Winkel machen, so verlängere man sie bis zu ihrem Durchschnitte, wodurch ein der Art nach gegebenes Dreyeck (specie datum) erhalten wird, worin die Verhältnisse der Seiten gegeben sind. Wenn ein Winkel gegeben wird, oder einem andern gleich ist, so bilde man mit demselben ein Dreyeck, das der Art nach gegeben, oder einem andern ähnlich ist, entweder durch Verlängerung einiger Linien, oder durch eine andere Legung der gegenüber stehenden Seite. Ist das Dreyeck schiefwinklicht, so ist es oft in zwey rechtwinklichte zu zerlegen. Vielseitige Figuren sind durch Diagonalen in Dreyecke zu zertheilen. Überhaupt hat man dahin zu sehen, daß man die ganze Zeichnung in Dreyecke, gegebene, ähnliche oder rechtwinklichte zerlege.

Einige Beyspiele werden zur Erläuterung nöthig seyn.

1. Aufg. Eine gegebene Linie AB Fig. 2. (Tab. I.) so einzutheilen, daß das unter der ganzen und einem der beiden Abschnitte enthaltene Rechteck dem Quadrate des übrigen Abschnittes gleich sey.

Aufl. Es sey P der gesuchte Punct. Über AB und BP beschreibe man die Quadrate ABCD, PBNO, und verlängere OP bis M auf CD, so ist das Rechteck AM = Quadr. PN, oder $AP \times PM = PBq$, daher das Rechteck CO oder $CN \times NO = BCq$, oder eine gegebene Größe. Es werde BC in E halbirt, so ist (Eukl. II. 6) $CN \times NO + BEq = ENq$, das ist $ABq + BEq = ENq$. Man ziehe AE, so ist $AEq = ABq + BEq$. Daraus ist $AE = EN$, also BN der gesuchte Abschnitt BP.

Hieraus wird man leicht die synthetische Auflösung finden, die Euklides in seinen Elementen II. 11. giebt.

2. Aufg. In dem gegebenen Kreisabschnitte APB (Fig. 3. Tab. I.) von den Endpuncten der Chorde AB

an einen Punct des Umfangs P zwey Linien AP, BP zu ziehen, deren Verhältniß einem gegebenen F:G gleich sey.

Aufl. Es sey P der gesuchte Punct. Der Winkel APB ist gegeben, weil der Abschnitt des Kreises gegeben ist, worin alle Winkel am Umfange sich gleich sind. Man verlängere AP, und mache den W. ABC = APB, so erhält man die ähnlichen Dreyecke APB und ABC, in welchen ist AP : BP = AB : BC. Also ist das Verhältniß AB : BC gegeben, und dadurch die Linie BC, welche den Kreis in dem verlangten Puncte schneidet.

Hieraus ergiebt sich die synthetische Auflösung ganz leicht. Pappus giebt L. VII. prop. 155 eine andere Auflösung, die nicht so leicht ist. Er zieht durch P eine den Kreis berührende. Der Durchschnittspunct derselben mit der verlängerten AB ist gegeben.

3. **Aufg.** Zwey Linien AB, AC, (Fig. 4. Tab. I.) sind der Lage nach gegeben, nebst einem Puncte D innerhalb des spitzen W. BAC; es soll ein Kreis beschrieben werden, der durch D geht, und die beiden Linien berührt.

Aufl. Es sey P der Mittelpunct des gesuchten Kreises, und PM, PN seyn senkrecht auf AB, AC, so sind PM, PN Halbmesser des Kreises, M, N die Berührungspuncte der Linien AB, AC mit dem Kreise, und der Mittelpunct P liegt auf der Linie AE, welche den Winkel BAC halbirt. Man verbinde die Puncte A, D, und P, D durch AD, PD. In dem Dreyecke APM ist das Verhältniß AP, PM gegeben, weil der W. PAM nebst dem rechten Winkel darin gegeben sind: daher auch in dem Dreyecke APD das Verhältniß AP : PD. Es ist also nun die Lage der durch den gegebenen Punct D gehenden DP zu suchen. Man nehme auf AE irgend einen Punct F, ziehe FG parallel mit PM, oder senkrecht auf AB, und FH parallel mit DP, so ist AP : PM = AF : FG; wie auch AP : PD = AF : FH, daher FG = FH.

Hieraus wird die Construction der Aufgabe hergeleitet. Denn man ziehe, wie hier geschehen ist, FG

senkrecht auf AB, und lege von F an AD die Linie FH, welche FG gleich ist, so ist DP mit dieser parallel, und der Durchschnitt der mit FH parallelen DP und der gegebenen AE ist der gesuchte Mittelpunkt des Kreises. Weil FH noch eine Lage, nach A hin, haben kann, so ist auch noch ein DP, und ein Mittelpunct eines Kreises möglich, wodurch die Forderung erfüllt wird.

4. **Aufg.** Aus dem Winkelpuncte A eines Quadrats ABCD (Fig. 5. Tab. I.) eine Linie zu ziehen, auf welcher die Seite BC und die verlängerte DC ein gegebenes Stück MN abschneiden.

Aufl. Man muß auf der verlängerten AB einen Punct suchen, dessen Abstand von A oder B durch die gegebenen Linien AB und MN gegeben sey, und durch welchen zugleich einer der Puncte M oder N gegeben werde. Es sey geschehen, was verlangt wird, und N der Durchschnittspunct mit der verlängerten DC. Man ziehe von N auf die verlängerte AB die lothrechte NP, und zugleich durch N auf AN die senkrechte NQ, welche die verlängerte AB in Q treffe. Da der W. PNQ = QAN, und PN = AB, so sind die rechtwinklichten Dreyecke NPQ und ABM sich gleich, und PQ = BM.

Nun ist $CNq + CMq = MNq$, also eine gegebene Größe. Da CM ein Theil einer gegebenen Linie CB ist, so addire man das Quadrat der letztern zu den gleichen Größen. Es ist $CBq = CMq + BMq + 2CM \times MB$, also ist $CNq + 2CMq + BMq + 2CM \times MB = MNq + CBq$, eine gegebene Größe, oder $CNq + BMq + 2BC \times CM = MNq + CBq = MNq + ABq$. In den ähnlichen Dreyecken ABM, NCM ist $AB : BM = CN : CM$, also ist $AB \times CM$ $(= BC \times CM) = BM \times CN$. Daher ist $CNq + BMq + 2BM \times CN = MNq + ABq$, das ist, (weil $CN = BP$, und $BM = PQ$ ist) $BPq + PQq + 2BP \times PQ = MNq + ABq$, oder $BQq = MNq + ABq$. Solchergestalt ist BQ eine gegebene Größe.

Hieraus folgt nun die Construction. Man nehme auf AD das Stück AE gleich der gegebenen MN, ziehe BE, mache BQ = BE, beschreibe über AQ als Durchmesser einen Halbkreis, welcher DN in N schneide, ziehe AMN, so ist das Stück MN auf AN der gegebenen AE gleich.

Der Kreis schneidet die Linie DN noch in einem Puncte R. Zieht man durch A und R die Linie ARS bis an die verlängerte BC in S, so ist RS = MN. Denn weil die Bogen QN und AR gleich sind, so sind auch die Bogen QR und AN gleich, und daher der W. RAQ = NQA, und ihre Complemente zum Rechten, DAR = BAM. Daher ist DR = BM, und RC = CM. Ferner ist der W. SRC = DRA = AMB = CMN; also ist Δ SCR = NCM, und RS = MN.

Die Aufgabe, durch den Winkelpunct A eines Quadrats ABCD eine Linie zu legen, auf welcher von den Schenkeln des Winkels BCD ein Stück von gegebener Länge abgeschnitten werde, wird auf dieselbe Art wie die vorgetragene aufgelöset. Die Aufgabe kann unmöglich seyn.

Pappus trägt den ersten Fall der Aufgabe, auf welchen hier die Analysis gerichtet ist, allein vor, L. VII. prop. 72. Seine Analysis gründet sich auf einen vorher bewiesenen Satz, daß $BQ^2 = BC^2 + MN^2$ ist.

5. **Aufg.** Ein Kreis PMN und eine gerade Linie AB (Fig. 6. Tab. I.) sind der Lage und Größe nach gegeben; es ist auf dem Umfange des Kreises der Punct P zu finden, der so liegt, daß die Durchschnittspuncte M, N der Linien AP, BP mit dem Kreise in einer mit AB parallelen Linie MN liegen.

Aufl. Es liege AB ganz ausserhalb des Kreises, und es sey P der gesuchte Punct. Da ein Winkel am Umfange, wie hier MPN ist, dem Winkel der Berührungslinie mit der Chorde des Bogens, worauf jener Winkel steht, und zwar auf der entgegengesetzten Seite, gleich ist (Eucl. III. 32.) so sey MQ die berührende in M. Dadurch ist der W. NMQ = MPN. Wegen der

parallelen MN, AB ist W. NMQ = AQM, also W. MPN = AQM. Demnach ist das Dreyeck PAB ähnlich dem Dreyecke QAM, und es ist AB : AP = AM : AQ. Man ziehe aus A die berührende AC an den Kreis, so ist AP : AC = AC : AM (Eucl. III. 36.); also ist, durch Zusammensetzung der Verhältnisse (ex aequo, Eucl. V. 22.), AB : AC = AC : AQ. Da AC gegeben wird, so ist nun AQ auch gegeben, und dadurch M, der Berührungspunct einer durch Q an den Kreis gezogenen Berührungslinie. Die mit AB parallele MN ist dadurch auch gegeben.

Da durch Q noch eine berührende an den Kreis gezogen werden kann, so giebt es für die Linien AB, BP noch eine Lage, bey welcher der Punct P auf derselben Seite der mit AB parallelen Chorde liegt, auf welcher AB sich befindet.

Andere Auflösung.

Man ziehe noch durch B die berührende BD an den Kreis, so ist BP : BD = BD : BN. Aus dieser Proportion folgt BP : BN = BPq : BDq, (durch die Zusammensetzung des Verhältnisses BP : BN aus den beiden BP : BD und BD : BN, oder BP : BD und BP : BD). Eben so ist AP : AM = APq : ACq. Da wegen der beiden Parallelen ist AP : AM = BP : BN; so ist APq : ACq = BPq : BDq, und daher AP : AC = BP : BD, oder verwechselt, AP : BP = AC : BD. Folglich ist über der gegebenen AB ein Dreyeck APB zu zeichnen, worin die Seiten AP, BP ein gegebenes Verhältniß haben, und dessen Spitze in den Umfang des gegebenen Kreises falle. Für die erste Bedingung ist ein Kreis, dessen Größe und Lage durch AB und das gegebene Verhältniß bestimmt wird, der geometrische Ort (s. Kreis und Ort, geometrischer.). Die beiden Durchschnitte dieses Kreises mit dem gegebenen sind jeder der verlangte Punct, wie P, an welchen die Linien AB, BP zu ziehen sind.

6. Aufg. Ein Kreis PMN und eine gerade Linie (Fig. 7. Tab. I.) sind der Lage und Größe nach gegeben, es ist auf dem Kreise der Punct P zu finden, der so liegt, daß die Linie durch die Durchschnittspuncte M, N der Linien AP, BP mit dem Kreise nach einem gegebenen Puncte C auf den verlängerten AB gehe.

Aufl. Es sey geschehen, was verlangt wird. Man ziehe MR parallel mit AB, und verlängere die Linie zwischen R und N bis nach Q auf AB. Es ist der W. MPN = MRN (Eucl. III. 27.) und der W. MRN = RQB wegen der parallelen MR, AB; also ist der W. MPN = NQB, und die beiden entgegengesetzten Winkel APN, AQN des Vierecks APNQ sind zwey Rechten gleich, wodurch auch die beiden Winkel A und PNQ zwey Rechten gleich sind. Die Puncte A, P, N, Q liegen daher auf dem Umfange eines Kreises (Eucl. III. 22.) und daher ist BA × BQ = BP × BN, indem beide Rechtecke oder Producte dem Quadrate der aus B an den Kreis durch A, Q, N, P gezogenen Berührungslinie gleich sind, (Eucl. III. 36.) Nun sey an den Kreis MPN von B aus die berührende BD gezogen, so ist BP × BN = BDq; also ist BA × BQ = BDq, und daher ist, weil BD gegeben wird, auch BQ gegeben, oder der Punct Q. Folglich sind von zwey gegebenen Puncten C und Q zwey Linien CN, QN an den Kreis gelegt, so daß MR, die Linie durch ihre beiden andern Durchschnittspuncte mit dem Kreise, der Linie ABC parallel ist. Wie dieses bewerkstelligt wird, ist in der 5ten Aufgabe gewiesen. Demnach ist der Punct N gegeben, und da B gegeben ist, so ist die Linie BP der Lage nach gegeben, also der Punct P in dem gegebenen Kreise, und dadurch auch die Lage von AP.

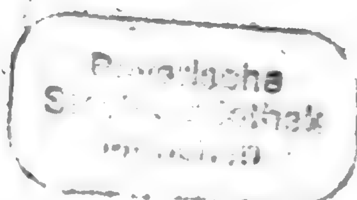
Die Synthesis ist dadurch folgende: Man ziehe von B an den gegebenen Kreis die berührende BD, und suche zu BA und BD die dritte Proportionallinie BQ. Aus den Puncten C und Q lege man die Linie CN, QN an den Kreis so, daß die Linie MR durch ihre beiden andern Durchschnittspuncte parallel mit CQ sey, ziehe BN, und

verlängere sie bis an den Kreis in P. Zieht man nun AP, so geht diese durch M. Denn da die Rechtecke oder Producte BP × BN und BA × BQ dem Quadrate von BD gleich sind, so sind sie einander gleich, und die Puncte P, N, Q, A, liegen auf dem Umfange eines Kreises. In diesem ist der Winkel der geraden Linie durch A und P mit PN gleich dem Nebenwinkel von AQN oder dem W. NQB. Es ist aber auch in dem gegebenen Kreise der W. MPN = MRN, und wegen der parallelen MR, CQ, der Winkel MRN = RQB, oder NQB, also der W. MPN = NQB. Daher ist der W. APN = MPN und die Linien AP, MP liegen in derselben geraden Linie.

Die Aufgabe steht in der Sammlung von Pappus L. VII. prop. 117.

Dieses mag hinreichend seyn, einen Begriff von der geometrischen Analysis zu geben, wenn gleich die Beyspiele nur in einzelnen Aufgaben bestehen konnten, worin der Geist der Alten nicht so sichtbar seyn kann, als in einem System von Sätzen. Die arithmetische oder algebraische Analysis sucht ebenfalls die Verbindungen der Größen, ohne einen Unterschied zwischen gegebenen und gesuchten zu machen. Sie stellt die Art der Verbindung durch eine Gleichung dar. Jede Gleichung ist als eine Bedingung in Betreff der Verbindung einiger Größen anzusehen. Giebt es mehrere Bedingungen, so wird man dadurch auf eben so viele unabhängige Gleichungen geleitet. Diese mit einander zu combiniren, daraus neue Gleichungen zu schaffen, besonders zu dem Zwecke, eine der unbekannten Grössen allein in eine Gleichung mit den gegebenen Größen zu bringen, und eine Gleichung aufzulösen, lehrt die Algebra durch Vorschriften. Die Bedingungen zu erfinden und sie rechnungsfähig zu machen, erfordert oft Erfindungskraft und Scharfsinn, wenn sie nicht unmittelbar gegeben werden. Die Lehrsätze für die Verwandlungen der Formen und andere Lehrsätze der Analysis, besonders die allgemeinen Formeln der Differential- und Integralrechnung sind ein reicher Vorrath von Hülfsmitteln,

G



um sehr verwickelte Relationen zu entdecken und aus einander zu setzen. Die Analysis der Alten hat keine allgemeinen Methoden zur Entdeckung von Lehrsätzen und Auflösung der Aufgaben; sie hat auch wenige und geringe Hülfsmittel: desto sinnreicher mußte sie aber auch in der Anwendung derselben seyn, und in jedem Falle fast ein eigenes Verfahren gebrauchen. Darum ist das Studium der alten Geometrie zur Übung des mathematischen Geistes sehr wichtig. Die Gewandtheit, welche man sich dadurch verschaffen mag, ist Gewinn genug, wenn auch viele Sätze von keinem Nutzen weder in der theoretischen noch angewandten Mathematik seyn werden.

Einer der größten Analysten unserer Zeit sagt von der geometrischen Methode der Alten, die man sehr uneigentlich Synthesis nenne, daß sie in einigen Fällen der algebraischen Analysis vorzuziehen seyn möchte, sowohl wegen ihrer einleuchtenden Darstellungsart, als auch wegen der Eleganz und Leichtigkeit ihrer Auflösungen. Es gebe sogar Fälle, wo die algebraische Analysis gewissermaßen unzureichend, und die geometrische Methode allein anwendbar scheinen möge. Er führt als Beyspiel die Aufgabe an, die Anziehung eines elliptischen Sphäroids auf einen innerhalb desselben oder auf der Oberfläche befindlichen Punct zu bestimmen. Maclaurin hat diese Aufgabe nach einer rein geometrischen Methode aufgelöset, wobey er bloß einige Eigenschaften der Ellipse und der elliptischen Sphäroiden zum Grunde legt. Seine Auflösung (in der Preißschrift über Ebbe und Fluth) ist ein Meisterstück, das man den schönsten Werken des Archimedes zur Seite stellen kann. (La Grange in den Mem. de Berlin 1773, wo er diese Aufgabe rein analytisch auflöset).

Die algebraische Rechnung macht nicht die analytische Methode aus. Man kann auch bey der Anwendung der Rechnung synthetisch verfahren, wenn man bey Lehrsätzen ihren Beweis bloß aus den vorher erwiesenen Sätzen construirt; und bey der Auflösung von Aufgaben, wenn man zeigt, wie man bloß aus gegebenen Größen zu den unbekannten gelangt. Die theoretische Analysis wird man

auch beym Gebrauche der Rechnung nicht zum Vortrage, sondern nur für sich anwenden, wenn man unbewiesene Sätze eines andern prüfen will. Zu der Auflösung von Aufgaben pflegt man sich fast immer der Analysis der Alten zu bedienen, wozu man gewöhnlich dadurch genöthigt wird, weil schon in wenig schwierigen Fällen das Unbekannte mit dem Bekannten zugleich in Gleichungen und Reihen eingehüllt ist, oder erst durch Integrationen gefunden werden muß.

Wenn man sich die Analysis der Alten geläufig machen will, so studiere man die Anfangs angeführten Schriften derselben. Die Sammlung des Pappus, besonders das 7te Buch, ist dazu sehr brauchbar.

Der deutschen Übersetzung von den Datis des Euklides, nach der Ausgabe durch Robert Simson, hat der Übersetzer, J. E. Schwab, eine lehrreiche Sammlung geometrischer, nach der analytischen Methode der Alten aufgelöseten Probleme beygefügt, die zugleich als Beyspiele der Anwendung von den Datis dienen. Stuttgardt 1780, in 8.

Ein weitschweifiges Werk über die mathematische Analysis und Synthesis sind: Caroli Renaldinii de resolutione et compositione mathematica Libri duo. Patavii 1668. 535 pag. Fol. Es ist ein reicher Vorrath von Beyspielen, auch aus der angewandten Mathematik, darin enthalten. Die Data des Euklides sind darin aufgenommen.

Die Lehre von den geometrischen Örtern thut große Dienste bey der geometrischen Analysis. Sie sind das, was die Gleichungen zwischen zwey veränderlichen Größen in der Analysis. So wie in dieser die Verbindung zweyer solcher Gleichungen eine determinirte Aufgabe auflöset, so geschieht solches in der Geometrie durch die Durchschnittspuncte zweyer Örter.

Analysis der krummen Linien, s. krumme Linien.

Analysis der Potenzen wird bisweilen das Verfahren genannt, aus einer Zahl, die als Potenz eines gegebenen Grades betrachtet wird, die dazu gehörige Wurzel zu finden, oder sie auf dieselbe Art zu zerlegen, wie sie als Potenz aus den Theilen der Wurzel zusammengesetzt wird. Man nennt dies sonst auch **Evolution**.

Analysis Diophantea, s. unbestimmte Analytik.

Analysis endlicher Größen, s. Analysis.

Analysis unendlicher Größen, s. Unendlich; Differentialrechnung; Integralrechnung.

Analytik, entweder einerley mit Analysis, oder der Inbegriff aller Verfahrungsarten bey der Entwickelung der Verbindungen der Größen, der Auflösung der Aufgaben, Entdeckung neuer Methoden, und Erweiterung der Untersuchungen in der Mathematik, kurz die **analytische Kunst**. Diese läßt sich nur unvollkommen in Bemerkungen, Maximen oder Vorschriften fassen. Man muß sie durch fleißige und genaue Beobachtung des Verfahrens der Meister in der Kunst sich erwerben, vorausgesetzt, daß man mathematisches Talent besitze.

Analytisch, was zur Analysis gehört, oder wobey die Analysis gebraucht und angewandt wird, oder was als Hülfsmittel in der Analysis dient, als analytische Gleichung, Formel; analytische Auflösung, Rechnung, Beweisart, Untersuchung, Methode; analytische Geometrie, Trigonometrie, Mechanik, Optik; analytisches Parallelogramm, Dreyeck; analytische Tafeln.

Man sehe insbesondere die Artikel: Gleichung, Formel, Methode, Geometrie, Trigonometrie, Newtonisches Parallelogramm.

Anatomie der Zahlen (anatomia numerorum) ist eine Tafel, worin alle Factoren der ganzen

theilbaren Zahlen neben denselben verzeichnet sind. Eine solche hat zuerst John Pell im 17ten Jahrhundert geliefert, s. Theilbare Zahl.

Angewandte Mathematik s. Mathematik.

Anguinea hyperbola ist ein Name, den Newton einem hyperbelartigen Zweige mehrerer krummen Linien aus der dritten Ordnung der Linien giebt, weil der Zweig mit beiden Schenkeln an derselben geradlinichten Asymptote, die er irgendwo schneidet, mit entgegengesetzten Wendungen, der eine Schenkel auf der einen Seite, der andere auf der andern, sich ins Unendliche hin erstreckt. Die krumme Linie hat entweder diese einzige Asymptote, oder noch zwey andere. Newton giebt dem hyperbolischen Zweige auch den angeführten Namen, wenn er zwischen zwey parallelen Asymptoten nach entgegengesetzten Richtungen hin sich erstrecket. Die schlangenförmige Hyperbel findet sich in den Gattungen 9, 26, 27, 33, 34, 35, 36, 52, 58, 59, 61, 62.

Anliegende Theile eines sphärischen rechtwinklichten Dreyecks. S. Nepers Regel für sphärische Dreyecke.

Anliegender Winkel, ist der Winkel, der eine benannte Seite einer Figur zu einem seiner Schenkel hat; oder auch der neben einem andern Winkel liegt, insbesondere, wenn beide zusammen zwey Rechte ausmachen, in welchem Falle sie am gewöhnlichsten **Nebenwinkel** heißen.

Anmerkung (Scholium) ist in dem förmlichen Vortrage der Mathematik, wenn jeder Satz mit dem ihm zukommenden Namen, Lehrsatz, Aufgabe, u. s. bezeichnet wird eine Einschaltung, worin dasjenige, was Dunkelheit, oder Zweifel, oder Mißverstand veranlassen könnte, gehoben wird worin; man ferner bey wichtigen Sätzen den Gang der Erfindung bemerklich macht, historische Nachrichten von derselben und der Erfindung mittheilt, andere Beweise

und Auflösungen anzeigt, die Anwendung eines Satzes lehrt, Schriften, die eine weitere Ausführung enthalten, empfiehlt, Instrumente beschreibt, u. dergl.

Antecedens rationis, das Vorderglied eines Verhältnisses, wie 7 in 7 : 5.

Antecedentalis Calculus ist Differential- oder Fluxionen-Rechnung auf eine andere als die gewöhnliche Art aufgestellt, von einem Engländer, James Glenie, der sie in einer Schrift beschrieben, betitelt: The antecedental Calculus: or, a geometrical methodus of reasoning, without any consideration of motion or velocity, applicable to every purpose to which Fluxions have been, or can be applied, London 1793, 16 pag. 4. Die Schrift bezieht sich auf eine Abhandlung des Verfassers in den Transactionen 1777, und eine andere lateinische, die 1776 herausgekommen ist, wie auch auf seine Doctrine of universal Comparison, or general Proportion, 1789. worin der Grund zu der Theorie in jener Schrift gelegt ist. Glenie glaubt, daß Bewegung, Zeit und Geschwindigkeit Begriffe seyn, die nicht in die reine Geometrie und abstracte Theorie gehören. Darum will er eine Methode, die allgemeiner als die Fluxionenrechnung, und zugleich auch als die Differentialrechnung sey, gebrauchen. In der That ist Glenie's Verfahren nur eine ganz unwesentliche Veränderung in der Herleitung der Differentialrechnung mit einer neuen Benennung. Es ist folgendes:

Es sey $x : B = A^m : B^m$

und $x + e : B = (A + N)^m : B^m$,

so ist

$$e = \frac{m A^{m-1} N + \frac{m.m-1.}{1.2} A^{m-2} N^2 + \text{etc.}}{B^{m-1}}$$

Ist aber

$$x + e : B = A^m : B^m,$$

und $$x : B = (A - N)^m : B^m,$$

so ist

$$e = \frac{mA^{m-1}N - \frac{m.m-1.}{1.\ 2}A^{m-2}N^2 + \text{etc.}}{B^{m-1}}.$$

Wenn nun die Verhältnisse $A + N : B$ und $A - N : B$ der Gleichheit näher kommen, als nur jede angebliche Größe eben der Art, so wird jeder der beiden Werthe $= \frac{mA^{m-1}N}{A^{m-1}}$. Diesen Werth nennt Glenie the antecedental der Größe, welche zu B dasselbe Verhältniß hat, als das Verhältniß m : 1 zu dem Verhältnisse A : B. Man redet sonst nicht von einem Verhältnisse eines Verhältnisses zu einem andern. Doch sieht man wohl, was es hier bedeuten soll, nämlich die Vervielfachung eines Verhältnisses. Die Bezeichnungen sind in dieser Vorstellung etwas geändert, um sie bequemer zu machen.

Archiv der reinen und angewandten Mathematik, 3tes und 4tes Heft. S. 352 und 481.

Ant-Evoluta einer krummen Linie ist eine solche, die dieser auf eine entgegengesetzte Art zugeordnet ist, als es die Evolute ist. Die Evolute ist der Ort aller Mittelpuncte der Krümmungskreise an einer krummen Linie. Werden die Krümmungshalbmesser über die krumme Linie hinaus verlängert, so weit als es die Länge jedes beträgt, so liegen die Endpuncte der Verlängerungen auf der Ant-Evoluta. Jakob Bernoulli hat diese Erzeugung einer krummen Linie erdacht, die aber nur bey der logarithmischen Spirale angewandt werden mag, deren Ant-Evolute, so wie ihre Evolute, dieselbe Spiral-Linie ist. Jac. Bernoulli Opp. T. I. nr. 49. Acta Erud. 1692.

Anthapsologarithmus ist eine nicht üblich gewordene aus der griechischen Sprache genommene, (von

ἀντι und ἅπτειν) Benennung des Logarithmen der Cotangente eines Winkels, in der Trigonometria Sphaericorum logarithmica, adornata a Nicolao Kauffmann Hollato, 1651, in 8. Der Logarithme der Tangente heißt daselbſt Hapſologarithmus; der Logarithme des Coſinus Antilogarithmus. Der Herausgeber dieſer Tafeln iſt der wegen ſeiner Conſtruction der Seecharten berühmte Mercator.

Anticauſtica einer krummen Linie iſt eine ſolche, die dieſer auf eine entgegengeſetzte Art, als die Cauſtica, zugeordnet iſt. Die von einer krummen Linie nach Art der Lichtſtrahlen zurückgeworfenen Linien berühren die Cauſtica. Verlängert man dieſe über die zurückwerfende Linie hinaus, und nimmt die Verlängerung ſo groß als den zurückgeworfenen Strahle, von dem Zurückwerfungspuncte bis an den Berührungspunct an der Cauſtica, ſo iſt der Endpunct der Verlängerung auf der Anticauſtica. Auch dieſe Entſtehungsart einer krummen Linie aus einer andern hat Jacob Bernoulli erdacht, (a. a. O.). Die Anticauſtica der logarithmiſchen Spiral linie, iſt, ſo wie ihre Cauſtica, ſie ſelbſt.

Antilogarithmus iſt eine von Neper gebrauchte Benennung des Logarithmen eines Coſinus, in Beziehung auf den Logarithmen des zugehörigen Sinus, die darin ihren Grund hat, daß in den Tafeln die Coſinus und ihre Logarithmen den Sinus und deren Logarithmen gegen über ſtehen. Neperi logar. canonis deſcriptio L. I. c. 3. Kepler bedient ſich auch dieſer Benennung. Tabularum Rudolphin. praecepta, Cap. VIII. Sie iſt jetzt nicht üblich.

Wallis verſteht unter Canon Anti-Logarithmicus ſolche logarithmiſche Tafeln, worin die Logarithmen in arithmetiſcher Progreſſion verzeichnet wären, von 0 bis 100, 000, mit Beyfügung der zugehörigen Zahlen, zu dem Ende, daß man daraus eben ſo leicht zu jedem Logarithmen die Zahl finden könnte, als man aus dem gewöhnlichen Canon zu einer Zahl den Logarithmen, und die Proportionaltheile

durchs Einschalten findet. Wallisii Algebra in Opp. Vol. II. p. 63. Er scheint sich nicht bestimmt genug ausgedruckt zu haben, da er die Kennziffern welche die Logarithmen haben sollen, nicht festsetzt.

In dem Dictionnaire encyclopédique wird Antilogarithme erklärt als das Complement des Logarithmen eines Sinus, einer Tangente oder Secante, das ist, als der Unterschied dieses Logarithmen von dem Logarithmen des Sinus totus. Dieses hat Hutton nachgeschrieben.

Antiparallele Linien sind ein System von vier geraden convergirenden Linien in einer Ebene, A, B, C, D, von welchen A und C sich unter denselben Winkeln schneiden, wie B, und D, als in (Fig. 8. Tab. I.) die Linien PA, PB, QC, QD. Hier ist der W. PEQ = QHB, und weil der W. CQD den beiden Dreyecken EQF, GQH, gemein ist, auch der W. QFE = QGH. Die äußern Winkel QGH, QHG sind den innern verwechselt genommen, nämlich QFE und QEF, gleich. Wären PA, PB parallel, so würden der äußere und innere Winkel auf derselben Seite der schneidenden QC, QD sich gleich seyn. Daher die Benennung, antiparallele. Leibnitz hat sie zuerst gebraucht. Acta Erud. 1691. p 279.

Der Fall ist häufig, daß zwey Linien von zwey andern auf die hier angegebene Art geschnitten werden. Es entstehen dadurch ähnliche Dreyecke, in welchen aber die gleichnamigen Glieder der Verhältnisse ihrer Seiten nicht eine gleiche Lage haben. Es ist

$$PE : PG = PH : PF,$$
$$QE : QF = QH : QG.$$

Ein Kreis, der durch drey der vier Puncte, E, F, G, H, beschrieben wird, geht auch durch den vierten. Denn an dem Kreise haben eben diese Proportionen zwischen den Segmenten zweyer Linien von ihrem Durchschnittspuncte an genommen Statt.

Wenn ein schiefer Kegel durch eine mit der Grundfläche antiparallele Ebene geschnitten wird, so ist der Durchschnitt ein Kreis wie die Grundfläche. Gewöhnlich nennt man einen solchen Schnitt eine sectio subcontraria (Wechselschnitt). Die stereographische Projection beruht darauf.

Antithesis ist Versetzung der Glieder einer Gleichung aus einem Theile derselben in den andern mit verwechselten Vorzeichen. Vieta und nach ihm Harriot gebrauchen dieses nicht mehr übliche Kunstwort.

Anwendung der Analysis auf die Geometrie besteht darin, daß man die geometrischen Größen durch Rechnung, für eine angenommene, oder unbestimmt gelassene Einheit bey jeder Art der Größen, findet.

Die reine Geometrie findet alle Größen durch Constructionen, das ist durch intellectuelle Zeichnung von Linien, deren Durchschnitte die verlangten Größen geben. Ihre Hülfsmittel sind vorzüglich die Lehre von der Gleichheit und Ähnlichkeit der Dreyecke, einige Lehrsätze über die Zusammensetzungen der Seiten, Segmente und anderer Linien in den Dreyecken, und die Eigenschaften der Linien, die anstatt der unbestimmten Gleichungen mit veränderlichen Größen dienen, und die geometrischen Örter heißen. Die Analysis kann alles dieses gebrauchen, und hat noch überdem die Eigenschaften der Gleichungen, die Methoden sie zu verbinden, die Mittel, die unbekannten Größen auszusondern, und mancherley Rechnungsweisen, wodurch das Gesuchte, auch bey sehr verwickelten Relationen, leicht gefunden wird. Die Analysis des Unendlichen macht manche Aufgabe zu einem Spiele, zur Übung für Anfänger, wozu die Alten die ganze Kraft ihres Geistes anwenden mußten. Das Rechnen macht die Auflösung leichter, als wenn man erst suchen muß, welche Hülfslinien zur Verbindung des Bekannten und Unbekannten gezogen werden müssen, und läßt sich oft fast mechanischer Weise ausführen, da man bey der geometrischen Construction immer die

Augen auf die oft sehr durch einander laufenden Linien richten muß. Durch die Lehre von den entgegengesetzten Größen kann man mehrere Fälle in einer Rechnungsformel begreifen, welche die Geometrie einzeln durchgehen muß. Zur Anwendung in der praktischen Geometrie und allenthalben, wo geometrische Größen vorkommen, besonders in der Astronomie, ist die Rechnung nothwendig, weil Constructionen nie die erforderliche Schärfe geben, oft höchst unsicher sind, wenn Linien sich unter sehr kleinen Winkeln schneiden, und unausführbar werden, wenn die Durchschnittspuncte, welche die gesuchten Größen bestimmen, sehr weit über die Gränzen des zu einer Zeichnung bestimmten Raums hinausfallen.

Die Anwendungen der Analysis sind, 1) die Berechnung aller Formeln für die Functionen der Winkel, oder die trigonometrischen Linien; 2) in der Trigonometrie, der ebenen und sphärischen, wenn darin alles auf Gleichungen gebracht wird, 3) bey der Berechnung der regulären Vielecke, sowohl ebener als sphärischer; 4) auf die Cyklometrie; 5) in der ganzen Theorie der krummen Linien, worin die Eigenschaften derselben aus ihren Gleichungen entwickelt werden. Die Eintheilung der Linien in Ordnungen, Classen und Geschlechter gründet sich allein auf die analytische Betrachtung der Gleichungen. Die Theorie der krummen Linien bey den Neuern tritt an die Stelle der geometrischen Örter der Alten. 6) In der Lehre von den Projectionen, daher eine analytische Perspectiv entsteht, welche der zeichnenden oft zu Hülfe kommen muß. Die stereographische Projection verbindet in der Ausübung das geometrische und analytische Verfahren. 7) Bey vielen einzelnen Lehrsätzen und Aufgaben, die durch Hülfe der Algebra mit Vortheil behandelt werden.

Newton hat in der Arithm. universali, in dem Abschnitte, wie geometrische Fragen auf Gleichungen gebracht werden, sehr gute Vorschriften und Bemerkungen zu diesem Zwecke vorgetragen. Die allgemeine, auch bey andern analytischen Untersuchungen zu beobachtende, Vorschrift ist, daß man den Anfang damit mache, zu untersuchen, wie

die Größen, welche die Aufgabe betrifft, von einander abhangen, ohne darauf zu sehen, ob sie gegeben sind, oder gesucht werden, damit man erfahre, welche unter ihnen diejenigen sind, wodurch die übrigen, mittelst einer fortschreitenden Verknüpfung, gefunden werden können. Unter diesen zur Synthesis schicklichen Größen nehme man diejenigen als bekannt an, von welchen es sich ergiebt, daß man durch sie am leichtesten auf die übrigen kommen möge. Mit diesen macht man den Anfang der Rechnung, und schreitet zu den übrigen Größen fort, so wie es ihre Verbindungen, zufolge der Bedingungen der Frage und anderer Umstände, an die Hand geben, bis man zwey Werthe derselben Größe erhält, es sey nun daß einer dieser Werthe eine in der Aufgabe als gegeben oder gesucht mit einem Buchstaben bezeichnete Größe ist, der andere ein durch die Rechnung gefundener, aus den Größen der Frage zusammengesetzter Werth, oder daß beyde zwey solche, auf verschiedene Art zusammengesetzte Ausdrücke von gleicher Quantität sind. Man muß hiebey wohl in Acht nehmen, welche Verbindungen sich am leichtesten algebraisch ausdrücken lassen, da es nicht selten sich ereignet, daß Größen, welche sich durch die Geometrie leicht aus einander bestimmen, der Algebra schwer fallen.

Bey der Berechnung hat man zuerst darauf zu sehen, wie die Größen aus andern, als aus Theilen, zusammengesetzt werden, oder durch Abziehung einiger Größen von andern entstehen.

Die Proportionalität der Linien ist für die Rechnung ein wichtiges Hülfsmittel, da das vierte Glied einer Proportion durch die drey andern gegeben wird, und da das Product der beiden äußern Glieder dem Producte der beiden mittlern gleich ist. Darum muß man die Sätze, aus welchen gleiche Winkel, für ähnliche Dreyecke, sich ergeben (1. und 3. Buch des Euklides), wohl gegenwärtig haben.

Zur Ausführung der Rechnung dient oft, daß Quadrate von Linien addirt werden, oder eins von einem andern subtrahirt wird. Dazu muß man sich rechtwinklichte Drey-

ecke durch Perpendikel verschaffen. Hierher gehören auch die Sätze 4 bis 10 im 2ten Buche Euklids. Die beiden Sätze 12 und 13 daselbst sind oft zu Vergleichungen dienlich. Auch sind folgende Sätze brauchbar: Wenn der Scheitelwinkel eines Dreyecks halbirt wird, so sind die Segmente der Grundlinie in dem Verhältnisse der Seiten (Eukl. VI. 3.); und das Rechteck der Seiten ist gleich der Summe von dem Rechteck der Segmente und dem Quadrat der den Winkel halbirenden Linie, (s. Dreyeck.) Auch ist in einem Dreyeck das Rechteck zweyer Seiten so groß, als das Rechteck von dem Perpendikel auf die dritte Seite und dem Durchmesser des umschriebenen Kreises. Wo Figuren in einem Kreise eingeschrieben vorkommen, ist der Satz brauchbar, daß das Rechteck der Diagonalen einer eingeschriebenen vierseitigen Figur gleich ist der Summe der beiden Rechtecke aus den einander gegen über liegenden Seiten.

Um diese Sätze anzuwenden, sind oft noch Hülfszeichnungen zu machen, wodurch die Größen mit einander verbunden werden. Die Bemerkungen, welche Newton wegen dieses Geschäftes macht, sind schon in dem Artikel Analysis, als Methode, angeführt.

Die Absicht bey der Anwendung der Analysis auf die Geometrie ist oft, daß man in schwerern Fällen durch die Rechnung auf eine geometrische Construction zu kommen sucht, wie es Newton in seinen Principien gemacht hat, worin die Sätze und Auflösungen durch Rechnung gefunden zu seyn scheinen, aber darauf durch die Geometrie allein bewiesen und ausgeführt sind.

Die Beyspiele, welche nun folgen, sind Aufgaben, welche größtentheils mit andern Fragen und Sätzen nicht in Verbindung stehen, und hauptsächlich nur zur Übung in der Auflösungskunst dienen. Die wichtigen Anwendungen der allgemeinen Rechnung kommen in den Artikeln vor, welche die Materien, wo sie gebraucht wird, enthalten.

1. Aufg. Eine gerade Linie AB in P so zu theilen, daß $BP^2 = AB \times AP$ sey.

Diese Aufgabe ist in dem Artikel, Analysis als Methode, geometrisch aufgelöset. Die algebraische ist folgende. Man setze, (Fig. 2. Tab. I.) $AB = a$; $BP = x$, so ist $AP = a - x$. Es ist besser BP durch x zu bezeichnen, als AP, damit man nicht nöthig habe, das Quadrat einer zweytheiligen Größe zu machen. Der Forderung gemäß ist $x^2 = a(a - x)$, also $x^2 + ax = aa$. Die Algebra giebt die Auflösung dieser Gleichung, nämlich $x = \sqrt{(aa + \frac{1}{4}aa)} - \frac{1}{2}a$, (s. Gleichung II.). Daraus ergiebt sich sogleich die geometrische Construction. Zur Berechnung ist $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$. Dieser Werth ist auch $x = 2a \sin 18°$ (s. Geometrie IX.)

Die Algebra giebt für x noch einen Werth, und zwar einen negativen $x = -\frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a$, der hier nicht brauchbar ist, aber für eine andere Aufgabe, der Quantität nach, gehört. Diese ist folgende:



Zu einer Linie AB eine BP zu setzen, daß $BP^2 = AB \times AP$ sey. Setzt man wiederum $AB = a$; $BP = x$, so ist $x^2 = a(a \times x)$ und $x^2 - ax = aa$, woraus sich ergiebt $x = \sqrt{(aa + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$, oder $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1) = 2a \sin 54°$. Dieser Werth ist die negative Wurzel in dem ersten Falle, entgegengesetzt genommen. Die Algebra begreift Addiren und Subtrahiren in eine Rechnung, daher ihre mehrfache Antwort auf eine Frage. Die Geometrie sondert die Fragen von einander, welche verschiedene Fälle in Absicht aufs Addiren und Subtrahiren enthalten.

2. **Aufg.** Es ist gegeben ein Halbkreis AEB (Fig. 9. Tab. I.) man soll an die berührende BD von A aus eine Linie AD ziehen, von welcher das Stück DE zwischen der berührenden und dem Kreise einer gegebenen Linie BF gleich sey.

Zwey geometrische Sätze verhelfen zu einer Gleichung. Erstlich ist $AD^2 = AB^2 + BD^2$; zweytens ist $DA \times DE = DB^2$, (Eucl. III. 36.) Man setze $AB = a$;

BF = DE = b; DA = x, so ist $DB^2 = x^2 - a^2$, und $DB^2 = bx$, also $x^2 - a^2 = bx$, und $x^2 - bx = a^2$. Daraus ist $x = \frac{1}{2} b + \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} b^2)}$. Hieraus ergiebt sich folgende Construction. Man halbire BF in C, ziehe ACG, auf welcher man CG = CB nehme, beschreibe mit AG um A als Mittelpunct einen Kreis, welcher BD in D schneide, ziehe AD, die den Kreis in E treffe, so ist geschehen, was verlangt ward.

Geometrische Aufl. Es sey geschehen, was verlangt wird. Man ziehe BE, so ist wegen des rechten Winkels E das Dreyeck AEB ähnlich dem ABD, und es ist AE : AB = AB : AD, daher AE × AD = ABq. Man beschreibe über BF als Durchmesser den Kreis BGFH, und ziehe durch den Mittelpunct C die AC, welche den Kreis in G und H schneide, so ist AH × AG = ABq. Folglich AE × AD = AH × AG. Macht man nun AD = AG, so ist AE = AH, und ED = HG = der gegebenen BF.

3. Aufg. Das Dreyeck ABC (Fig. 10. Tab. I.) aus der Seite BA, dem Verhältnisse der Seiten AC : BC, und dem Winkel C zu bestimmen.

Dieses ist die 2te Aufgabe in dem Artikel, Analysis als Methode; denn der gegebene Kreisabschnitt bestimmt den Winkel, welcher AB gegen über liegt. Es sey AB = a; AC : BC = m : n, und AC = x, so ist $BC = \frac{n}{m} x$. Nun ist (s. Trigonometrische Formeln) $a^2 = x^2 + \frac{nn}{mm} x^2 - \frac{2n}{m} x^2 \cos C$, also $x^2 = \frac{mm\,aa}{mm + nn - 2mn \cos C}$ Die Quadratwurzel aus dieser Größe ist der Werth von x, der hier einzig und positiv ist.

4. Aufg. In dem Halbkreise ACDB (Fig. 11. Tab. I.) sind drey an einanderstoßende Chorden eingeschrieben, man soll die Gleichung zwischen denselben und dem Durchmesser finden.

Diese Aufgabe gebraucht Newton, um daran zu zeigen, wie man auf mancherley Arten zu einer Gleichung zwischen den gegebenen und gesuchten Größen gelangen könne. Das leichteste Verfahren ist, daß man die Diagonalen AD, BC ziehe, so hat man, zufolge der Anfangs angeführten Eigenschaft des Kreises der Gleichung

$$AB \times CD + AC \times BD = AD \times BC.$$

Ferner ist wegen der rechten Winkel ACB, ADB, sowohl $AB^2 = AC^2 + BC^2$, als auch $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Es sey AB die gesuchte Größe, so würde man von den gegebenen nicht auf sie directe kommen können. Behandelt man aber den Durchmesser als gegeben, so wird man eine Gleichung für denselben aus den drey gefundenen herleiten können. Es sey $AC = a$: $CD = b$; $DB = c$, und $AB = x$; so ist $BC = \sqrt{(x^2 - a^2)}$; $AD = \sqrt{(x^2 - c^2)}$, also ist

$$bx + ac = \sqrt{(x^2 - a^2)}.\sqrt{(x^2 - c^2)}$$

und quadrirt

$$b^2x^2 + 2abcx + a^2c^2 = (x^2 - a^2)(x^2 - c^2),$$

das ist

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x = 2abc.$$

Aus dieser Gleichung wird der Durchmesser gefunden, wenn die drey Chorden gegeben werden, und eine der Chorden durch die beiden andern mit dem Durchmesser. Die cubische Gleichung für den Durchmesser hat, wegen der Vorzeichen, wenn alle drey Wurzeln möglich sind, zwey negative Wurzeln, (s. Gleichung III. 9). Ein negativer Werth des Durchmessers hat keine Statt, und die negativen Wurzeln dienen nur die Gleichung für x rational zu machen. Drey gegebene Chorden können nur einen Halbkreis bespannen. Daher nur eine einzige positive Wurzel der Gleichung. Eben so erhält eine Chorde in der quadratischen Gleichung, wodurch sie gefunden wird, zwar einen positiven und einen negativen Werth, letzterer aber kann hier nicht gebraucht werden.

Den Durchmesser aus den Chorden durch eine geometrische Construction zu finden, wird in dem Artikel von der Anwendung der Geometrie auf die Algebra gezeigt.

5. Aufg. Zwey Linien AB, AC (Fig. 4. Tab. I.) sind der Lage nach gegeben, nebst dem Puncte D innerhalb des spitzen W. BAC; es soll ein Kreis beschrieben werden, der durch D geht, und die beiden Linien berührt.

In dem Dreyecke APD ist gegeben der W. PAD, die Seite AD, und das Verhältniß der Seiten AP : PD = m : n, (s. Analysis als Methode, 3. Aufg.). Nun ist (s. Trigonom. Formeln)

$$DP^2 = AD^2 + AP^2 - 2AD, AP. \cos DAP,$$

oder, wenn AD = a; AP = x, und DAP = α gesetzt wird, da DP = $\frac{nx}{m}$ ist,

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2} x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2 = 0.$$

Diese Gleichung giebt zwey positive Werthe für x, wie die Construction a. a. O. Die Wurzeln der Gleichung sind möglich, wenn $\cos\alpha^2 > \frac{m^2 - n^2}{m^2}$, oder $\cos\alpha^2 > \cos PAM^2$, welches Statt hat, wenn PAD kleiner ist, als PAB. Es ist $\frac{n}{m} = \sin MAP$, da PM = PD ist, also $\frac{m^2 - n^2}{m^2} = \cos PAM^2$.

Setzt man A für MAP, so ist die Gleichung,

$$\cos A^2 . x^2 - 2a\cos\alpha . x + a^2 = 0.$$

6. Aufg. Zwey gerade Linien Bb, Cc, (Fig. 12. Tab. I.) die sich in A schneiden, sind der Lage nach gegeben; auf Bb wird ein Punct D, auf Cc ein Punct E genommen, und innerhalb des Winkels BAC wird ein Punct F gegeben; es soll durch F eine Linie MN an die beiden Linien Bb, Cc gezogen werden, welche darauf die Stücke DM, EN abschneidet, deren Verhältniß einem gegebenen, der Linien, P, Q, gleich ist.

Man ziehe FG parallel mit AC, und HF parallel mit AB, so ist AN : AM = GF : GM. Hier sind

GF = AH, und HF = AG gegeben; und es ist AN = EN — EA; AM = DM — DA; GM = DM — DA — AG, alles für den Fall der Figur. Man setze DA = a; EA = b; AG = c; AH = d; DM = x; EN = y, und x : y = 1 : m, so daß y = mx. Nun ist

$$y - b : x - a = d : x - a - c,$$

woraus die Gleichung folgt,

$$mx^2 - (m(a + c) + b + d)x + b(a + c) + ad = 0.$$

Diese Gleichung mag entweder durch Rechnung oder durch eine Construction aufgelöset werden. Für den Fall der Figur sind entweder zwey positive Werthe von x oder gar keine möglich.

Der in der Zeichnung angenommene Fall ist der Normalfall, mit welchem alle übrigen Fälle in Absicht auf die Lage der Linien zu vergleichen sind. Diejenigen Linien, die in einem andern Falle eine entgegengesetzte Lage in Beziehung auf die ihr gleichnamigen in dem Normalfalle haben, sind negativ, und ändern ihr Vorzeichen, wenn ihre Symbole bloß die Quantität anzeigen. Wenn also D und E auf der andern Seite von A liegen, als in der Figur, so sind a und b negativ. Die Lage von AG und AH kann man immer als positiv ansehen, weil man dem Winkel, in welchem sich der gegebene Punct befindet, immer die Lage, welche er in dem Normalfalle hat, geben kann. Wenn DM nach der Richtung von AG, und DN nach der Richtung von AH genommen werden, so sind sie positiv, in dem entgegengesetzten Falle negativ. Ist eine derselben positiv, die andere negativ, so ist m negativ.

Diese Aufgabe ist von Apollonius sehr umständlich behandelt worden, in einer Schrift de sectione rationis (περι λογου ἀποτομης), welche Halley aus einer arabischen Übersetzung lateinisch herausgegeben hat, Oxford 1706. 8. Es werden darin alle Fälle vorgenommen, daher die Schrift 138 Seiten stark ist.

7. Aufg. Zwey gerade Linien Bb, Cc, (Fig. 13. Tab. I.), die sich in A schneiden, sind der Lage nach

gegeben, und innerhalb des Winkels BAC ein Punct D; durch diesen soll an die beiden Schenkel des Winkels eine Linie MN gelegt werden, welche darauf die Stücke AM, AN abschneide, die ein Rechteck von einem gegebenen Inhalte einschließen.

Man ziehe durch D mit AC die parallele DE an AB, und mit AB die parallele DF. Das gegebene Rechteck habe die Seiten P, Q. Nun suche man zu der Linie AF und den Linien P, Q, die vierte Proportionallinie AG, so ist $AF \times AG = P \times Q$. Es ist aber auch $AM \times AN = P \times Q$, also ist $AF \times AG = AM \times AN$. Ferner ist $AM : AN = FD : FN$, so daß $AM \times FN = FD \times AN$ ist. Man setze $AE = a$; $AF = b$; $AG = c$; $AM = x$; $AN = y$, so ist erstlich $bc = xy$; zweytens $x(y - b) = ay$, oder $xy - bx = ay$; oder $bc - bx = ay$. Diese Gleichung multiplicire man mit x, setze für xy seinen Werth, dividire alle Glieder durch b, und bringe sie zusammen auf eine Seite, so erhält man die Gleichung

$$x^2 - cx + ac = 0.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind die beiden Werthe von AM, durch welche der Aufgabe Genüge geleistet wird. Soll sie möglich seyn, so muß $\frac{1}{4}c^2$ größer als ac, oder c größer als 4a seyn, (s. Gleichung II. 4.).

Nimmt man AM auf dem Schenkel Ab des Nebenwinkels, so erhält man die Gleichung $x^2 - cx - ac = 0$; und nimmt man AN auf dem Schenkel Ac des andern Nebenwinkels, so erhält man die Gleichung $x^2 + cx - ac = 0$. Die Wurzeln beider Gleichungen sind der Quantität nach dieselben, aber sich entgegengesetzt. Daher bedeutet die negative Wurzel der einen die positive Wurzel der andern, und die Algebra giebt mit der Auflösung für den Fall, da die Linie MN innerhalb des Winkels CAb gelegt wird, auch die Auflösung für den Fall, da MN innerhalb des W. BAc gelegt wird.

Man kann die Aufgabe allgemeiner nach Art der 6ten abfassen. Wenn nämlich auf Bb ein Punct H, und

auf Cc ein Punct K gegeben wird, so soll das Rechteck von den Stücken HM und KN, welche die Linie NDM abschneidet, einen gegebenen Inhalt haben. Apollonius hat auch diese Aufgabe nach allen besondern Fällen in einer Schrift abgehandelt, die den Titel hat, de sectione spatii (περι χωριου ἀποτομης). Halley hat sie nach den Anzeigen bey Pappus wieder hergestellt, und sie der Schrift de sectione rationis beygefügt.

Die hier vorgetragene Aufgabe ist einerley mit folgender: Innerhalb des gegebenen Winkels BAC ein Dreyeck MAN zu zeichnen, dessen Inhalt gegeben ist, und dessen Seite MN durch einen gegebenen Punct D geht. Denn das Dreyeck MAN ist gleich dem Dreyeck GAF, und dieses gleich dem Dreyeck von den Seiten P und Q, mit dem eingeschlossenen Winkel BAC. (Eucl. VI. 15.)

8. **Aufg.** Innerhalb des rechten Winkels BCN (Fig. 14. Tab. I.) eine Linie MN von gegebener Länge zu legen, welche durch den gegebenen Punct A geht, der von dem Schenkel CB des rechten Winkels und der Verlängerung CD des andern Schenkels gleichen Abstand hat.

Die gesuchte Linie sey AMN, welche CB in M schneide. Die Lage wird durch BM bestimmt. Diese als die Größe zu nehmen, für welche eine Gleichung gesucht werde, ist nicht rathsam, weil eben so gut CM gesucht werden könnte. Aus diesem Grunde wähle man auch für die unbekannte Größe weder AM noch AN, obgleich durch jede derselben die Lage der gesuchten Linie bestimmt wird. Vielmehr nehme man AR, wenn $MR = RN$ ist, als unbekannte Größe an. Es sey $AB = a$; MR oder $NR = b$, und $AR = x$. Nun haben wir die Gleichungen

$$AN^2 = AD^2 + DN^2,$$
$$DN = DC + CN,$$

und die Proportion

$$AM : AB = MN : CN.$$

Aus der Proportion ist $CN = \frac{2ab}{x-b}$, daher

$DN = \frac{a(x+b)}{x-b}$, und die erstere Gleichung ist

$$(x+b)^2 = a^2 + \frac{a^2(x+b)^2}{(x-b)^2},$$

oder $(x^2 - b^2)^2 = 2a^2x^2 + 2a^2b^2$,

das ist $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + b^4 - 2a^2b^2 = 0$.

Diese biquadratische Gleichung ist eine quadratische für x^2. Es ist

$$x^2 = a^2 + b^2 \pm a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}.$$

Demnach hat x vier Werthe, von welchen zwey und zwey sich gleich und entgegengesetzt sind. Es kann nämlich die Linie MN auf viererley Art gelegt werden, erstlich in dem W. BCN, zweytens in dem Scheitelwinkel DCE, ganz auf dieselbe Art wie in dem W. BCN, drittens in dem Winkel DCB, nämlich die Linie nm = NM, deren Hälfte mr = nr ist, wo aber Ar der Werth des andern Paars der Wurzeln ist; viertens in demselben Winkel bey Vertauschung der Schenkel Cm, Cn. Die Doppelheit der Lage derselben Linie wird in der Algebra durch die Doppelheit des Vorzeichens angedeutet. Die Wurzeln für die Lage innerhalb der Winkel BCN und DCE sind immer möglich, es mag b für einen Werth haben, welcher es auch sey. Allein innerhalb des W. DCB ist der kleinste Werth von nm derjenige, der in einem gleichschenklichten Dreyecke nCm ist. In diesem ist $b^2 = 2a^2$. Kleiner darf b^2 nicht seyn. Dasselbe besagt der Werth von x^2 mit dem untern Vorzeichen der Wurzelgröße. Dieser muß positiv seyn, wenn x möglich ist. Also ist $a^2 + b^2 > a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}$, oder $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > a^4 + 4^2b^2$, das ist $b^4 > 2a^2b^2$, und $b^2 > 2a^2$.

Hieraus ergiebt sich die in dem Artikel, Analysis als Methode, 4. Aufgabe gefundene Construction der Aufgabe. In dem gefundenen Werthe von x^2 setze man b^2 auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, so ist

$$x^2 - b^2 = a^2 + a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}$$

oder $(x-b)(x+b) = a(a+\sqrt{(a^2+4b^2)})$ für den Fall der Fig. 5. Hieraus entsteht die Proportion

$$a : x-b = x+b : a+\sqrt{(a^2+4b^2)}.$$

Man ziehe NQ senkrecht auf AN in Fig. 5, welche die verlängerte AB in Q schneide, so ist, wegen der ähnlichen Dreyecke ABM, ANQ,

$$AB : AM = AN : AQ.$$

Also ist $AQ = a+\sqrt{(a^2+4b^2)}$. Nimmt man nun $BQ = \sqrt{(a^2+4b^2)}$, und beschreibt über AQ einen Halbkreis, so liegt der Endpunct N von der einen der gesuchten Linien auf dem Umfange des Halbkreises. Er liegt aber auch auf dem Schenkel CN oder DC des rechten W. BCN oder BCD, also in dem Durchschnitte desselben mit dem Halbkreise. Die Lage der gesuchten Linie in dem Winkel DCB wird auf ähnliche Art durch eine Construction gefunden. Für diese Lage ist

$$b^2 - x^2 = a\sqrt{(a^2+4b^2)} - a^2,$$

und $a : b-x = b+x : \sqrt{(a^2+4b^2)} - a.$

Eine ähnliche Auflösung und Construction findet auch Statt, wenn anstatt des Quadrats ein Rhombus genommen wird. Um ein Beyspiel zu geben, wie das Verfahren für einen besondern Fall allgemeiner gemacht werden mag, folgt die Auflösung für diesen Fall mit einiger Abänderung des Verfahrens.

9. **Aufg.** Aus dem Winkelpuncte A eines Rhombus ABCD (Fig. 15. Tab. I.) innerhalb des äußern Winkels BCN eine Linie AN zu legen, auf welcher durch die Schenkel desselben das Stück MN von einer gegebenen Länge abgeschnitten wird.

Man mache den W. ANQ = ABC, und verlängere AB bis an NQ, so ist das Δ ABM ähnlich dem Δ ANQ. Noch mache man den W. PNQ = BAM, so ist das Δ ABM ähnlich dem Δ PNQ. Wegen der gleichen Winkel ABC, QPN sind auch CBP und NPB gleich, und daher sind in dem Vierecke BCNP, mit zwey parallelen Seiten die beiden andern BC, PN sich gleich; daher

ist $\Delta PNQ = BAM$, so daß $NQ = AM$, und $PQ = BM$ ist.

Ist AQ gefunden, so hat man nur über AQ einen Kreisbogen zu beschreiben, dessen Segment über AQ den stumpfen Winkel ANQ faßt. (Eucl. III. 33.) Diesen Kreis berührt die Seite DA des Rhombus, weil der Winkel, den die Chorde AQ mit der berührenden in A auf der Seite des entgegengesetzten Kreisabschnittes macht, dem W. ANQ in dem Abschnitte ANQ gleich ist. (Eucl. III. 32.)

Man setze AB oder $AD = a$; $MN = 2b$; $MR = b$; $AR = x$, und $AQ = y$. Jene unbekannte Größe ist nur Hülfsgröße für die letztere. Der Winkel BAD sey $= A$. Es ist erstlich $AB : AM = AN : AQ$, zweytens $AQ^2 = AN^2 + NQ^2 + 2AN \times NQ \cdot \cos A$, (Trigon. Formeln). Daraus haben wir die Gleichungen,

$$x^2 - b^2 = ay.$$

$$y^2 = (x+b)^2 + (x - b)^2 + 2(x+b)(x-b) \cos A,$$

oder $y^2 = 2x^2 + 2b^2 + 2(x^2 - b^2) \cos A.$

und für x^2 sein Werth $ay + b^2$ gesetzt,

$$y^2 = 2ay + 4b^2 + 2ay \cos A.$$

Das Quadrat der Diagonale des Rhombus, BD, ist $= 2a^2 + 2a^2 \cos A$. Dieses sey $= c^2$, so ist $c^2 = 2a^2(1 + \cos A)$, und es ist also

$$y^2 - \frac{c^2}{a} y = 4b^2, \text{ und}$$

$$y = \frac{c^2}{2a} \pm \sqrt{\left(4b^2 + \frac{c^4}{4a^2}\right)}$$

Diesen Werth von AQ suche man nun durch eine Construction. Der erste Theil ist die dritte Proportionallinie zu 2a und c; der zweyte ist die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks, dessen Katheten 2b, und jene Proportionallinie sind.

10. Aufg. Innerhalb des Winkels ECF (Fig. 16. Tab. I.) durch den gegebenen Punct A eine Linie MN von gegebener Länge zu legen.

Diese Aufgabe begreift beide vorhergehende in sich. Man ziehe durch A die Linie AB parallel mit CF, und AD parallel mit CE, so ist BM : BA = CM : CN, und $MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2CM \times CN. \cos ECF$. Man setze AB = a; AD = b; MN = c; CM = x, so ist $CN = \frac{ax}{x-b}$;

und $c^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{(x-b)^2} - \frac{2ax^2}{x-b} \cos C$.

Diese Gleichung gehörig reducirt, ist

$$x^4 - 2(a \cos C + b)x^3 + (a^2 + b^2 + 2ab \cos C - c^2)x^2 + 2bc^2x - b^2c^2 = 0.$$

Man ziehe die Diagonale AC, so ist $AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos C$. Es sey AC = d, so ist die Gleichung diese,

$$x^4 - 2(a \cos C + b)x^3 + (d^2 - c^2)x^2 + 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$

Diese Gleichung hat aus den oben angeführten Ursachen vier Wurzeln, von welchen zwey unmöglich seyn können. Denn wenn MN innerhalb des W. ECF von der gegebenen Länge gelegt werden kann, so kann dieses auf zweyerley Art geschehen, es müßten denn die Winkel bey M und N gleich groß seyn. Ferner ist eine Lage der Linie innerhalb der Nebenwinkel MCf allemahl möglich; dieses giebt noch einen Werth der Wurzel, auf dem Schenkel CE. Viertens kann MN auch in dem Nebenwinkel FCe allemahl gelegt werden, für welche Lage aber der Werth von x auf Ce negativ ist. Die drey Werthe von CM, welche von C nach E hinfallen, sind die positiven Wurzeln der Gleichung, die nach e hinfallende ist die negative. Die Verbindungen der Vorzeichen in der Gleichung zeigen bey vier möglichen Wurzeln drey positive und eine negative an, (s. Gleichung IV. 6.).

Diese Aufgabe gehört unter eine noch allgemeinere, nämlich die, zwischen zwey gegebenen Linien, geraden oder krummen, eine gerade Linie von gegebener Länge zu legen, die durch einen gegebenen Punct geht. Mit dieser Aufgabe haben sich die Alten viel beschäftigt. Apollonius hat zwey Bücher darüber geschrieben, die er nennt περι νευσεων, de inclinationibus. Sie sind verloren gegangen. Doch hat Pappus in dem 7. B. seiner Sammlungen eine Anzahl Aufgaben, die dahin gehören, aufgenommen. In der Vorrede giebt er eine kurze Nachricht von einigen unter der allgemeinen Aufgabe begriffenen besondern, worunter auch die hier befindliche 7te ist, welche er aber in seinem Werke nicht vorträgt. Das Werk des Apollonius haben mehrere Mathematiker wieder herzustellen versucht; Ghetaldus in dem Buche, das er Apollonius redivivus betitelt, Venedig 1607; Anderson in Supplemento Apollonii redivivi, Paris. 1612; Horsley zu Oxford 1770, und Burrow zu London 1779.

11. Aufg. Aus zwey gegebenen Puncten A, B, (Fig. 17. Tab. I.) an einen gegebenen Kreis die Linien AP, BP zu ziehen, welche sich in einem Puncte P des Umfanges schneiden, und den Kreis ausser diesem Puncte in zweyen Puncten M, N treffen, so daß MN parallel mit AB sey. Es ist die Lage der beiden Linien AP, BP durch Rechnung zu finden.

Man ziehe aus dem gegebenen Mittelpuncte die senkrechte CD auf AB, so sind AD, BD, CD, nebst dem Halbmesser CM oder CN gegebene Größen. Ferner ziehe man die berührenden AE, BF, so ist $AE^2 = AM \times AP$, und $BF^2 = BN \times BP$. (Eucl. III. 36.). Wegen der Parallelen AB, MN ist $AM : AP = BN : BP$, also $AM^2 : AM \times AP = BN^2 : BN \times BP$. Daher ist $AE^2 : BF^2 = AM^2 : BN^2$,
oder $AE : BF = AM : BN = AP : BP$.

Es kommt nun auf die Wahl der unbekannten Größe an, wodurch die Puncte P, M, N, bestimmt werden mögen. Die Linien AM, AP, BN, BP sind dazu nicht

schicklich, weil eine so gut als die andere genommen werden kann, und weil sie mit dem gegebenen Halbmesser des Kreises nicht in Verbindung stehen. Man nehme CQ von C bis an MN auf der senkrechten CD für die unbekannte Größe, welche durch eine Gleichung gefunden werden soll. Man ziehe MR, NS senkrecht auf AB. Durch MC und CQ sind MQ = QN gegeben, das ist RD = DS; dadurch AR und BS; dadurch und durch MR = NS, sind AM, BN gegeben, deren Verhältniß bekannt ist.

Es sey CM = a; CD = b; AD = c; BD = d; AE = e; BF = f; CQ = x. Es ist nun

$MQ = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; $AR = c - \sqrt{(a^2 - x^2)}$;

$MR = b - x$; $BS = d - \sqrt{(a^2 - x^2)}$ Also ist

$AM^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}$,

$BN^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

Wenn man noch die (in der Figur nicht ausgezogenen) Linien AC, EC, zieht, so ist $AD^2 + DC^2 = AC^2 = AE^2 + CE^2$, also ist

$b^2 + c^2 = e^2 + a^2$; und eben so $b^2 + d^2 = f^2 + a^2$

Daher ist

$AM^2 = e^2 + 2a^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}$;

$BN^2 = f^2 + 2a^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

Zufolge der anfangs gefundenen Proportion ist nun

$$e^2(f^2 + 2a^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}) = f^2(e^2 + 2a^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}),$$

oder

$$e^2(a^2 - bx - d\sqrt{(a^2 - x^2)}) = f^2(a^2 - bx - c\sqrt{(a^2 - x^2)}).$$

oder

$$(e^2 - f^2)(a^2 - bx) = (e^2 d - f^2 c)\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Man setze $\frac{e^2 d - f^2 c}{e^2 - f^2} = g$, so ist

$$a^2 - bx = g\sqrt{(a^2 - x^2)},$$

also durch Quadrirung und Reduction

$$(b^2 + g^2)\ x^2 - 2a^2bx + a^2(a^2 - g^2) = 0.$$

Aus dieser Gleichung werden zwey Werthe von CQ gefunden, (s. Gleichung, II. 1.).

Die Auflösung durch Rechnung ist beschwerlich, wie es gewöhnlich der Fall ist, wenn das Gesuchte die Bestimmung einer Lage ist. Die Geometrie giebt sie leichter an. Man sehe die Auflösung in dem Artikel, Analysis als Methode, 5. Aufg.

Bossut, in dem Cours des Mathem. T. II. p. 233. setzt $AM = x$; $MQ = y$, geräth aber dadurch auf eine Gleichung vom vierten Grade für x, da AM nicht bloß die in der Figur dadurch bezeichnete, sondern auch AP, und noch zwey solche Linien, bey einer andern Chorde MN, bezeichnet.

12. Aufg. In dem rechtwinklichten Dreyecke ACB (Fig. 18. Tab. I.) ist aus der Spitze des rechten Winkels C das Perpendikel CD auf AB gezogen, und es ist darin gegeben $AD + DC = a$, und $DB + BC = b$; man soll das Dreyeck ACB bestimmen.

Wegen der rechten Winkel ACB und ADC ist $AD : DC = DC : DB$ (Eucl. VI. 8.); auch ist $BC^2 = CD^2 + DB^2$. Man setze $DC = x$, so ist

$$AD = a - x; \quad DB = \frac{x^2}{a - x} \cdot BC = b - \frac{x^2}{a - x}$$

$$= \frac{ab - bx - x^2}{a - x}, \text{ also } x^2 + \frac{x^4}{(a - x)^2}$$

$$= \frac{(ab - bx - x^2)^2}{(a - x)^2}.$$ Hieraus entsteht durch Multiplication mit dem Nenner, und gehörige Reduction die Gleichung

$$x^4 - 2(a + b)x^3 + (a^2 + 2ab - b^2)x^2$$
$$+ 2ab^2x - a^2b^2 = 0.$$

Das gegebene Glied hat die Factoren a und b. Da es das Product aller vier Wurzeln der Gleichung ist, (s. Gleichung IV. 7.) so versuche man, ob diese Factoren für x

gesetzt der Gleichung ein Genüge thun. Setzt man $x = a$, so heben sich alle Glieder auf, und es ist a eine Wurzel der Gleichung. Sie hat daher den Factor $x - a$ (a. a. O. 8); den andern giebt die Division durch $x - a$, nämlich, $x^3 - (a + 2b)x^2 - b^2x + abb$. Weil nun nicht seyn soll $x - a = 0$, da in diesem Falle CB mit AB parallel wäre, so ist die Wurzel $x = a$ unbrauchbar, und es muß der andere Factor Null seyn, so daß die gesuchte Gleichung ist

$$x^3 - (a + 2b)x^2 - b^2x + ab^2 = 0.$$

Die zuerst gefundene Gleichung hat durch die Quadrirung der beiden Werthe von BC einen höhern Grad erhalten, als ihr zukommt, nach der Anzahl der Werthe, welche x haben kann; daher sie einen Factor bekommen hat, der sich absondern läßt.

Die Aufgabe läßt nur einen Werth für x zu. Denn BD und BC wachsen beide mit x zugleich, daher giebt es nicht zwey verschiedene x, für welche ihre Summe dieselbe Größe bekäme. Die cubische Gleichung hat also entweder zwey unmögliche Wurzeln, oder, wenn alle drey möglich sind, so sind zwey derselben Antworten auf eine andere, aber mit der vorgelegten verwandte Frage.

Man verändere die Aufgabe in die folgende: Es ist gegeben $DC - DA = a$, und $BC - BD = b$, so soll das Dreyeck daraus bestimmt werden. Setzt man wiederum $DC = x$, so kommt man auf dieselbe Gleichung, wie vorher, da es bey dem Quadriren gleichgültig ist, ob die Wurzel das eine oder das andere Vorzeichen hat.

Noch verändere man die Aufgabe folgendergestalt. Es sey $AD - DC = a$; $BC + BD = b$, und $DC = x$, so bleibt die Rechnung dieselbe, ausser daß die Vorzeichen des Gliedes, welches x^2 enthält, und des gegebenen sich ändern. Die Gleichung ist nämlich

$$x^3 + (a + 2b)x^2 - b^2x - ab^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind denjenigen der zuerst gefundenen gleich, aber entgegengesetzt.

Die Gleichung für den ersten Fall,

$$x^3 - (a + 2b)x^2 - b^2 x + ab^2 = 0.$$

hat, zufolge der Verbindungen der Vorzeichen, zwey positive Wurzeln und eine negative. Jene beiden gehören für die erste und zweyte Aufgabe; die negative als positiv betrachtet ist der Werth des Perpendikels DC in der dritten Aufgabe. Die Algebra begreift die Auflösungen dreyer Aufgaben in eine einzige Formel. Zwey Fälle werden zugleich unmöglich.

Eine andere Auflösung.

Man suche das Verhältniß AD : CD, als woraus sich auch das von DB : BC ergiebt, und woraus ferner die Größen selbst, vermittelst ihres Verhältnisses zu den Summen, gefunden werden. Da es hier bloß auf die Verhältnisse ankommt, so lasse man ACB ein dem gesuchten Dreyeck ähnliches seyn, in welchem $AD = 1$ ist, und $DC = t$. Nun ist $AC^2 = 1 + t^2$; $DB = t^2$; $BC = t\sqrt{(1 + t^2)}$, weil $AD : CD = AC : BC$ ist. Zufolge der Bedingung in der Aufgabe ist

$$1 + t : t^2 + t\sqrt{(1 + t^2)} = a : b,$$

woraus ist

$$b(1 + t) = at(t + \sqrt{(1 + t^2)}).$$

Hieraus ergiebt sich

$$2abt^3 + (a^2 + 2ab - b^2)t^2 - 2b^2 t - b^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat zufolge der Vorzeichen ihrer Glieder nur eine positive Wurzel. Die negativen Wurzeln sind die entgegengesetzten der positiven Wurzeln in der Gleichung

$$2abt^3 - (a^2 + 2ab - b^2)t^2 - 2b^2 t + b^2 = 0,$$

auf welche man geräth, wenn $DA - DC = a$ und $BC \pm BD = b$ gesetzt wird.

Man kann vielerley Aufgaben über Dreyecke vorlegen, wenn man aus den Seiten, Winkeln, Perpendikeln und Segmenten der Grundlinie und gewisser Verbindungen

derselben gegebene Grössen macht, die gerade zureichen, das Dreyeck zu bestimmen. Die hier vorgetragene wird eine der lehrreichsten seyn.

13. Aufg. Auf einem um den Mittelpunct C beschriebenen Kreise, (Fig. 19. Tab. I.) nehme man einen Bogen AB, ziehe BD senkrecht auf den Halbmesser AC, halbire den Bogen AB in E, und ziehe ED; es soll aus dem Winkel BDE das Verhältniß von BD zu AD (d. i. des Sinus ACB zum Quersinus) gefunden werden.

Da AE die Hälfte des Bogens AB ist, so sind durch BD und CD für diesen Bogen EF und CF für den Bogen AE, nebst dem Unterschiede DF der Linien CF, CD, gegeben. Hieraus wird erhalten tang BDE = tang DEF $= \frac{DF}{EF}$, eine gegebene Größe. Die Gleichung zwischen dieser Tangente und dem Quotienten $\frac{BD}{AD}$ zu erhalten dient der Winkel ACE als vermittelnde Größe.

Man setze $\frac{BD}{AD} = u$; $\frac{DF}{EF} = t$, und $ACE = \varphi$; $ACB = 2\varphi$, so ist $u = \frac{\sin 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$, und $t = \frac{\cos\varphi - \cos 2\varphi}{\sin\varphi}$, wo die trigonometrischen Grössen wegzuschaffen sind. Es ist $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi$, und $1 - \cos 2\varphi = 2 \sin\varphi^2$, s. (Goniometrie, 35. 36.), also $u = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, und $t = u - \frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi}$.

Ferner ist $\cos 2\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$, und

$u^2 + 1 = \frac{\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2}{\sin\varphi^2} = \frac{1}{\sin\varphi^2}$; auch

$u^2 - 1 = \frac{\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2}{\sin\varphi^2}$, so daß

$$\cos 2\varphi = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \text{ und } \frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi} = \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2 + 1)}}.$$

Demnach $t = u - \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2 + 1)}}$. Durch Wegschaffung der Irrationalität entsteht die Gleichung,

$$u^3 - \frac{t^2 + 3}{2t} u^2 + u + \frac{1 - t^2}{2t} = 0.$$

Diese Gleichung als eine für zwey zusammengehörige Größen, t, und u, betrachtet, liefert für einen gegebenen Quotienten u zwey Werthe von t, aber für ein gegebenes t drey Werthe von u. Nämlich, wenn der Bogen AB durch den Quotienten BD : AD gegeben wird, so ist die Hälfte desselben nicht allein der Bogen AE = EB, sondern auch die Hälfte der Summe jedes Vielfachen des ganzen Umfanges und des Bogens AB. Bey geraden Vielfachen trifft die Halbirung immer auf den Punct E, bey ungeraden auf den Punct e des Umfanges, der von dem Endpuncte a des Durchmessers um den Bogen ae = AE absteht, und für diesen ist $t = \frac{Df}{ef}$, wenn ef senkrecht auf Aa ist, positiv, wenn f zwischen D und a liegt.

Daß u drey Werthe für dasselbe t haben kann, hat folgenden Grund. Der Werth von t ist = 0 für $\varphi = 0$ und für $\varphi = 120°$. Es giebt also für die zwischen diesen beiden befindlichen Werthe von φ je zwey gleiche positive t, zu welchen zwey verschiedene φ, also auch zweyerley u gehören. Wird φ zwischen 120 und 180 Grad genommen, so ist t negativ, und wächst von 0 bis zum Unendlichen, daher hier wieder Werthe von t vorkommen, die in Absicht auf die Quantität allein für Werthe von φ unter 120° sich schon gefunden haben. In der Gleichung zwischen t und u kann man aber, ohne sie zu ändern, t und u beyde negativ nehmen, daher auch umgekehrt zwey zusammengehörige negative Werthe von

t und u beide als positiv betrachtet werden können. Der Werth von u für ein negatives t ist negativ, weil φ alsdann größer als ein Rechter ist. Der größte Werth von den positiven t ist = 1, 18 nahe, (s. Größtes und Kleinstes), und das dazu gehörige $\varphi = 68^\circ\ 32'$; hat t einen größern Werth, so hat die Gleichung für u nur eine mögliche Wurzel. Ist t kleiner, so hat sie drey mögliche Wurzeln, und zwar alle drey positiv, wenn t kleiner als 1 ist, aber eine negative mit zwey positiven, wenn t größer als 1 ist, (s. Gleichung III. 9). Man bemerke, daß $t = 1$ für $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ ist.

Die Aufgabe kommt bey der Untersuchung über die scheinbare Gestalt des Luftgewölbes vor. Smith in seiner Optik, (S. 56. der deutschen Übers.) nimmt diese Wölbung für das Segment einer Halbkugel, woran ein verticaler Bogen durch eine Linie halbirt wird, die mit dem Horizont einen Winkel von 23° macht. Wenn demnach der Bogen BAb, dessen Chorde Bb horizontal ist, einen verticalen Bogen des Luftgewölbes darstellt, so soll aus dem Winkel BDE = 23° das Verhältniß BD : AD gefunden werden. Es ist $t = 0{,}424475$; $\log t = 9{,}6278519$; $\log t^2 = 9{,}2557038$. Wenn man hieraus die Coefficienten der Gleichung berechnet, so wird man finden

$$u^3 - 3{,}74601\, u^2 + u + 0{,}96569 = 0.$$

Setzt man $u = 3{,}3$, so ist der Werth der Gleich. $= -0{,}592$.
" " $u = 3{,}4$. " " " " $= +0{,}365$
also ist nahe $u = 3{,}36$. Smith findet $u : 1 = 10 : 3$; Kästner $u : 1 = 52 : 180$.

14. Aufg. Ein Halbkreis ABC (Fig. 20. Tab. I.) ist gegeben, und auf dem Durchmesser ein Punct D; man soll durch D einen Halbkreis wie DEF, aus einem Mittelpuncte G auf AC, beschreiben, so daß auf der berührenden CEB das Stück EB von dem Berührungspuncte bis an den Umfang des gegebenen Kreises dem Stück AD gleich sey.

Es sey $AD = BE = a$; $DC = b$; $DF = 2x$, und der Mittelpunct von DEF in G, so ist $FC = b - 2x$, $GC = b - x$. Nun ist erstlich $CE^2 = CD \times CF$. Zieht man GE an den Berührungspunct, und AB von A nach B; so sind beide auf die Linie CEB senkrecht, und es ist zweytens, $CE : CG = EB : AG$. Daher entsteht die Gleichung

$$b(b - 2x)(a + x)^2 = x^2(b - x)^2,$$

welche gehörig reducirt, diese wird

$$2bx^2 + (a^2 + 4ab - b^2)x - 2ab^2 = 0.$$

Die Gleichung hat arithmetisch betrachtet zwey mögliche Wurzeln, von welchen eine negativ ist, da das letzte Glied das Vorzeichen $-$ hat (Gleichung II. 3.). Diese ist aber hier nicht brauchbar. Denn wenn DG negativ genommen würde, so würde AG kleiner als AD, oder kleiner als EB seyn, welches nicht möglich ist. Durch die Quadrirung ist die Gleichung auf einen höhern Grad gebracht, als der Frage zukommt. Sie ward zuerst selbst vom dritten Grade mit einer Wurzel, $x = 0$. Die negative Wurzel dient nur als Mittel, die Relation von x gegen a und b rational darzustellen, und ist für die geometrische Frage als eine fremde Wurzel anzusehen. Dieses Beyspiel dient zur Erläuterung von dem, was in dem Artikel, Gleichung VI. von Wurzeln dieser Art gesagt wird.

Setzt man $FC = x$, so erhält man die Gleichung

$$(2a + b - x)^2 bx = a^2(b + x)^2,$$

und daraus

$$bx^3 - (a^2 + 4ab + 2b^2)x^2 + (2a^2b + 4ab^2 + b^3)x - a^2b^2 = 0.$$

Nimmt man $x = b$, so werden die beiden Producte in der erstern Form der Gleichung identisch, und die Gleichung wird durch diesen Werth von x auf Null gebracht. Sie läßt sich daher durch $x - b$ dividiren, und um einen Grad erniedrigen, (Gleichung, VI.). Der Quotient ist

$$bx^2 - (a^2 + 4ab + b^2)x + a^2b = 0,$$

wenn x nicht = b seyn soll, als welches den Durchmesser des gesuchten Kreises Null machen würde. Die Wurzel b ist eine fremde zur Frage nicht gehörige. Die quadratische Gleichung hat zwey positive Wurzeln, von welchen aber nur die kleinere hier brauchbar ist. Die brauchbare Wurzel ist kleiner als b. Setzt man x = b, so wird der Werth der Gleichung negativ. Dieser Werth liegt daher zwischen den beiden Wurzeln, (Gleichung II. 11.).

Manche Aufgaben von der Art, wie die hier vorgetragenen findet man in folgenden Schriften:

Franc. a Schooten exercitationum mathematicarum libri quinque, Lugd. Bat. 1657. 4.

Ejusd. Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico, bey der Ausgabe von Cartesii Geometria, Amsteld. 1683.

Newtoni Arithmetica universalis, Lugd. Bat. 1732, p. 82 — 179.

Guisnée Application de l' Algébre à la Géometrie, à Paris 1705. 4. Zweyte Ausg. 1733.

Thom. Simpson's select exercises for young proficients in Mathematicks, London 1752. 8.

Anwendung der Geometrie auf die Algebra, ist die Auflösung der Gleichungen durch Hülfe der Geometrie, der construirenden, oder der analytischen. Die erstere Art heißt insbesondere die Construction der Gleichungen.

Wie die arithmetischen Ausdrücke einer Linie, als $\frac{ab}{c}$; $\sqrt{ab}$; $\sqrt{(a^2 \pm b^2)}$ und andre construirt werden, wird in dem Artikel, Construction, gezeigt. Hier soll von der Construction der Gleichungen gehandelt werden.

Diese besteht darin, daß zwey Linien gefunden werden, deren Durchschnittspuncte durch die zugehörigen Ordinaten, die für beide Linien in den Durchschnittspuncten dieselben sind, die Wurzeln der Gleichung geben. Eine dieser Linien kann eine gerade seyn, die krumme Linie muß alsdann von demselben Grade seyn, von welchem die Gleichung ist, da eine krumme Linie von einer geraden in so vielen Puncten geschnitten werden kann, als die Zahl ihres Grades anzeigt, aber nicht in mehreren. Zwey Kegelschnitte, worunter auch der Kreis gehört, können sich in vier Puncten schneiden, und dienen daher zur Auflösung cubischer und biquadratischer Gleichungen. Höhere Gleichungen werden durch die Durchschnitte zweyer Linien construirt, deren Grade mit einander multiplicirt den Grad der Gleichung geben. Man hat überhaupt die Linien von einem so niedrigen Grade zu nehmen als möglich ist, wenn nicht die Leichtigkeit der Zeichnung eine Linie von einem höhern Grade zu nehmen veranlaßt. So hat Newton die Conchoide, eine Linie vom vierten Grade, zur Construction cubischer und biquadratischer Gleichungen angewandt (Arithmet. univ. p. 216.), weil diese Linie sich leicht beschreiben läßt. Bey höhern Gleichungen als denen vom vierten Grade ist die geometrische Auflösung schwieriger als die arithmetische, weil die Zeichnung der krummen Linien von höheren Graden als die Kegelschnitte zu mühsam ist. Sie gewährt auch in der sinnlichen Zeichnung nicht die Genauigkeit, die man in der Rechnung erreichen mag. Die Constructionen der Gleichungen vom dritten und vierten Grade durch zwey Kegelschnitte sind zwar in der sinnlichen Ausführung auch nicht scharf genug, allein sie können doch zur Annäherung in der Rechnung bequem dienen, und stellen alle Wurzeln einer Gleichung auf einmahl in ihrer Verbindung dar, da sie durch die Rechnung ohne Zusammenhang einzeln gefunden werden. Der Kreis und die Parabel genügen für alle Fälle, und dieselbe Parabel läßt sich für alle Gleichungen vom dritten und vierten Grade gebrauchen. Bey allen Constructionen kann sich die Unbequemlichkeit ereignen, daß man die Einheit für

die Linien, als Halbmesser oder Parameter, entweder sehr klein nehmen muß, oder nicht Raum genug für die ganze Zeichnung hat.

Allgemein ist das Verfahren folgendes. Man hat für die eine gewählte Linie eine Gleichung zwischen ihren Coordinaten x und y, für die andere eine Gleichung zwischen ihren Coordinaten x und z. Man setzt z = y, so hat man zwey Gleichungen zwischen x und y; aus welchen man durch die Wegschaffung der x eine bestimmte Gleichung für die gemeinschaftlichen Ordinaten y in den Durchschnittspuncten erhält. Diese Gleichung hält man gegen die gegebene, so lassen sich die zur Zeichnung der beiden Linien nöthigen unveränderlichen Größen dadurch bestimmen. Für Gleichungen vom zweyten Grade ist dieses Verfahren nicht nöthig. Sie werden durch die Durchschnitte einer geraden Linie mit einem Kreise construirt, und der Kreis schneidet auf jener sogleich die gesuchten Wurzeln von einem gegebenen Puncte an ab.

Descartes hat zuerst die geometrische Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade durch den Kreis und die Parabel gelehrt, in dem dritten Buche seiner Geometrie. Hier zeigt er auch, wie Gleichungen vom fünften und sechsten Grade durch die Durchschnitte eines Kreises mit einer parabolischen Conchoide, einer Linie vom dritten Grade, aufgelöset werden. Nach ihm beschäftigten die Mathematiker sich viel mit der geometrischen Auflösung der Gleichungrn, und suchten die Construction der Gleichungen vom dritten und vierten Grade noch auf mancherley Art abzuändern. (s. Algebra). Da die Geometrie von ihnen als der wesentlichste Theil der Mathematik angesehen ward, so suchten sie auch arithmetische Aufgaben auf geometrische Art, als welche ihnen die vollkommenste war, aufzulösen. Gegenwärtig, da die algebraische Auflösungskunst weiter gebracht ist, wird die Construction weniger geachtet. Sie ist aber als eine Methode schätzbar, welche die Verbindung zweier unbestimmten Gleichungen, durch die Elimination einer der veränderlichen Grössen, und die Entstehung der gegebenen bestimmten Gleich-

ung, auf einmahl anschaulich darstellt. Sie dient auch zur Erläuterung der Eigenschaften der Gleichungen.

I. Construction quadratischer Gleichungen.

1. Aufg. Die Gleichung $x^2 - ax + bc = 0$ zu construiren.

Aufl. Man ziehe (Fig. 21. Tab. I.) zwey gerade Linien AP, AQ unter einem beliebigen Winkel A, nehme auf AP die Theile $AB = b$; $AC = c$, und auf AQ den Theil $AD = a$. Man halbire BC in E, und AD in F, ziehe die Perpendikel EO, FO. welche sich in O schneiden, beschreibe aus O als Mittelpunct mit dem Halbmesser $OB = OC$ einen Kreis, welcher auf AQ die Theile AG, AH abschneidet, so sind AG, AH die Wurzeln der Gleichung. Denn nach der Eigenschaft des Kreises (s. Kreis), ist $AG \times AH = AB \times AC$. Setzt man $AG = x$, so ist $AH = a - x$, also $ax - xx = bc$, welches die gegebene Gleichung ist. Setzt man $AH = x$, so ist $HD = a - x$, das ist $AG = a - x$, also gleichfalls $ax - xx = bc$.

Wenn der Kreis die Linie. AQ berührt, so hat die Gleichung zwey gleiche Wurzeln. Trifft er sie gar nicht, so sind beide Wurzeln unmöglich.

2. Aufg. Die Gleichung $x^2 + ax - bc = 0$ zu construiren

Aufl. Man ziehe (Fig. 22. Tab. I.) zwey gerade Linien unter einem beliebigen Winkel in A; nehme auf der einen $AB = b$, und nach der entgegengesetzten Seite $AC = c$; ferner auf der andern $AD = a$. Nun halbire man BC in E, und AD in F, ziehe die senkrechten OE, OF, die sich in O schneiden. Aus O beschreibe man mit dem Halbmesser $OB = OC$ einen Kreis, welcher die andere Linie in G und H schneidet, so sind AG, AH die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax - bc = 0$, und zwar AG die positive, und AH die negative. Es ist zufolge einer Eigenschaft des Kreises $AB \times AC = AG \times AH$, woraus auf dieselbe Art wie vorher die Gleichung folgt.

Die Gleichung $x^2 - ax - bc = 0$ wird ganz auf dieselbe Art construirt. Es ist hier AH die positive Wurzel und AG die negative.

Der Kreis schneidet die Linie HG in allen Fällen, so wie die Gleichung immer zwey mögliche Wurzeln hat.

II. Construction der cubischen Gleichungen, worin das zweyte Glied fehlt.

Es sey AX (Fig. 23. Tab. II.) die Axe einer Parabel MAN, und C der Mittelpunct eines Kreises, welcher durch den Scheitelpunct der Parabel geht. Ein anderer Durchschnittspunct sey M. Man ziehe von C und M die senkrechten CB, MP auf die Axe, und die Halbmesser CA, CM. Es sey $AB = b$; $BC = c$, $AC = r$, der Parameter der Parabel $= p$; die Abscisse $AP = x$; die Ordinate $PM = y$. Nun giebt erstlich die Parabel die Gleichung

$$px = yy.$$

Anstatt die Abscissen für den Kreis auf AX von A aus, und die Ordinaten parallel mit PM zu nehmen, nehme man die Abscissen auf der verlängerten CB von C aus, und die Ordinaten darauf senkrecht. Für den Punct M ist die Abscisse $CV = c + y$, und die Ordinate $VM = b - x$, also
$$r^2 = (c + y)^2 + (b - x)^2,$$
woraus, weil $r^2 = b^2 + c^2$ ist, die zweyte Gleichung zwischen x und y erhalten wird,

$$x^2 + y^2 - 2bx + 2cy = 0.$$

Für x setze man den Werth $\frac{yy}{p}$ aus der erstern Gleichung, so ist

$$y^3 - (2b - p)py + 2cp^2 = 0.$$

Eine gegebene Gleichung sey

$$y^3 - Apy + Bp^2 = 0,$$

wo wegen der in den Coefficienten Ap, Bp^2 abgesonderten Factoren p, p^2 die andern Factoren A, B Linien

sind. Wird $p = 1$ gesetzt; so sind A, B, die vollständigen numerischen Coefficienten. Den Parameter p kann man willkührlich annehmen, da hier nur zwey Gleichungen durch die Coefficienten zur Bestimmung der drey Grössen b, c, p, gegeben werden. Der Parameter dient als Maaßstab, die andern Größen zu bestimmen. Seine eigene Quantität ist, wie überhaupt die Maaß-Einheit, willkührlich.

Die Zusammenhaltung der Normal-Gleichung mit der gegebenen giebt $b = \frac{1}{2}(A + p)$, und $c = \frac{1}{2}B$.

Man nehme also in der mit dem Parameter p beschriebenen Parabel auf der Axe von dem Scheitel an die Länge $AB = \frac{1}{2}(A + p)$, und die darauf lothrechte $BC = \frac{1}{2}B$, und beschreibe mit dem Halbmesser CA einen Kreis. Schneidet dieser die Parabel ausser in A noch in drey Puncten, wie in M, m, N, so hat die Gleichung drey mögliche Wurzeln, welche durch die Ordinaten MP, mp, NQ dargestellt werden. Die Ordinaten, welche die Lage, wie PM haben, sind positive Wurzeln, diejenigen, welche eine dieser entgegengesetzte Lage haben, wie QN, sind negative Wurzeln. Denn wenn man in der Rechnung den Durchschnittspunct N statt M genommen hätte, so wäre die Gleichung folgende:

$$y^3 - (2b - p)py - 2cp^2 = 0.$$

Diese hat dieselben Wurzeln als jene in Rücksicht der Quantität, aber von entgegengesetzter Beschaffenheit. Ihre positiven Wurzeln sind also die Ordinaten, welche wie QN liegen; ihre negativen diejenigen, welche die Lage wie PM haben.

Hat die gegebene Gleichung zwey gleiche Wurzeln, so berührt der Kreis die Parabel in einem Puncte, welcher nun für zwey Puncte, die darin zusammenfallen, gilt, so wie die beyden gleichen Wurzeln in der Aufzählung der Wurzeln der Gleichung für zwey gerechnet werden. Schneidet der Kreis die Parabel nur in einem einzigen Puncte, ausser dem Puncte A, ohne sie irgend wo zu be-

rühren, so hat die Gleichung nur eine einzige mögliche Wurzel.

Wenn A in der Gleichung das Vorzeichen +, und B das − hat, so ist jenes und dieses negativ. Ein negatives B macht c negativ, daher BC nach der andern Seite der Axe hin genommen wird. Ein negatives b wird in einer derjenigen Lage entgegengesetzten genommen, welche AB in der Figur hat. Die Lage von AB und BC in der Figur gilt für positive Werthe dieser Linien.

Es entsteht hier eine Frage, die der Mühe werth ist sie zu beantworten, nämlich was für eine Linie der Ort sey, in welchem die Mittelpuncte der die Parabel irgendwo berührenden Kreise liegen, die zugleich durch den Scheitelpunct A gehen.

Man setze die beiden gleichen Wurzeln einer cubischen Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt, jede $= \alpha$, die dritte $= \beta$, beiderseits nach der absoluten Größe genommen. Sind jene positiv, so ist diese negativ, da ihr Aggregat, wegen des fehlenden zweyten Gliedes, Null ist. Nun ist jeder Werth der Gleichung ein Product aus den Factoren $(y - \alpha)^2$ und $(y + \beta)$, (s. Gleichung III. 10). Also ist, wenn y irgend eine der Wurzeln bedeutet, $(y - \alpha)^2 (y + \beta) = 0$, das ist

$$y^3 - (2\alpha - \beta)\, y^2 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta)\, y + \alpha^2\beta = 0.$$

Die Zusammenhaltung mit der Gleichung

$y^3 - (2b - p)\, py + 2cp^2 = 0$

giebt I. $2\alpha - \beta = 0$. II. $\alpha^2 - 2\alpha\beta = (p - 2b)\, p$; III. $\alpha^2\beta = 2cp^2$. Schafft man mittelst der ersten Gleichung aus den beiden andern β weg, so erhält man IV. $(3\alpha^2 = 2b - p)\, p$; V. $\alpha^3 = cp^2$. Daraus ist

VI. $\alpha = \dfrac{3cp}{2b - p}$, und VII. $\alpha^2 = \dfrac{9c^2p^2}{(2b - p)^2}$. Aus

IV. und VII. folgt VIII. $27c^2p = (2b - p)^3$, oder

$$\frac{27}{8}pc^2 = (b - \tfrac{1}{2}p)^3.$$

Dieses ist die Gleichung für die semicubische oder Neilische Parabel, in welcher b — $\frac{1}{2}$p und c die Coordinaten für den Anfang der Abscissen D sind. Sie ist in Fig. 24. Tab. II. mit ihren beiden unendlichen Zweigen DE, De gezeichnet. Die zugehörige Parabel ist GAg, die Axe derselben und der Paraboloide EDe ist AX; der Brennpunct der Parabel F; der Abstand AF = $\frac{1}{4}$ p, und der Abstand AD der Spitze der Paraboloide von dem Scheitel der Parabel AD = $\frac{1}{2}$ p. Die rechtwinklichten Coordinaten an der Paraboloide seyn AT = t; TU = u. Diese setze man statt b und c in der gefundenen Gleichung für diese beiden Größen, so ist die Gleichung für den verlangten Ort, $27\,pu^2 = 8\,(t - \frac{1}{2}p)^3$. Ein Kreis aus einem Puncte U als Mittelpuncte durch den Scheitel A beschrieben, berührt die Parabel irgendwo in M. Nimmt man den Mittelpunct eines Kreises durch A innerhalb des Raumes EDe, so schneidet derselbe die Parabel ausser dem Puncte A noch dreymahl; nimmt man ihn ausserhalb dieses Raumes, so schneidet der Kreis die Parabel ausser in A nur noch einmahl.

Denn in D ist t = $\frac{1}{2}$p, das ist dem Halbmesser des Krümmungskreises der Parabel im Scheitel, (s. Krümmungskreis §. 12.). Daher geht ein Kreis, der aus einem entferntern Puncte der Axe wie T durch A beschrieben wird, ausserhalb der Parabel weg, begegnet ihr aber wieder in einem Puncte auf jedem ihrer beiden Zweige. Der Kreis aus einem Puncte U der Paraboloide durch A beschrieben, schneidet die Parabel in A, und liegt von A bis M innerhalb derselben, da er den Zweig in M berührt. Folglich muß ein Kreis, der aus einem Puncte von TU zwischen T und U durch A beschrieben wird, den Zweig AG zweymahl treffen, auf der einen und auf der andern Seite von M, dagegen ein Kreis aus einem von T entferntern Puncte als U auf TU den Zweig AG nicht treffen wird. Nämlich die berührende an dem erstern dieser Kreise in A liegt zwischen den berührenden an der Parabel und dem Kreisbogen AM in demselben Puncte A. Der Kreis geht daher zwischen beiden durch, und trifft den, mit UM be-

schriebenen zum zweytenmahle in dem Durchschnitte mit der Abscissenlinie AX.

Die Gleichung $y^3 - Apy + Bp^2 = 0$ hat also drey mögliche Wurzeln, wenn $27pc^2 < (2b - p)^3$; zwey gleiche, wenn $27pc^2 = (2b - p)^3$; zwey unmögliche, wenn $27pc^2 > (2b - p)^3$ ist. Setzt man für b und c ihre vorher gefundenen Werthe, welche sie dieser Gleichuug gemäß haben, so ist die Bedingung für die Möglichkeit aller drey Wurzeln, daß $\frac{27p}{4}B^2 < A^3$ sey. Oder wenn $p = 1$ genommen wird, damit A und B die numerischen Coefficienten bedeuten können, so hat die Gleichung $y^3 - Ay + B = 0$ drey mögliche Wurzeln, oder zwey gleiche, oder zwey unmögliche, nachdem $27B^2$ kleiner, so groß oder größer als $4A^3$ ist. Dieses stimmt mit dem überein, was in dem Artikel, Gleichung III, 13. auf einem andern Wege gefunden wird.

Die Evolute der Parabel ist auch eine semicubische Parabel, aber darin von dem hier gefundenen Orte der Mittelpuncte der berührenden Kreise verschieden, daß ihre Gleichung ist, $27pu^2 = 16(t - \frac{1}{2}p)^3$. Beide unterscheiden sich nur in ihren Parametern.

III. Construction biquadratischer Gleichungen und vollständiger cubischer.

Es sey MAN (Fig. 25. Tab. II.) eine Parabel, deren Axe AQ und Scheitel A ist. Mit der Axe parallel in dem Abstande DE ist die Abscissenlinie DX gezogen, auf welcher der Anfang der Abscissen in der Parabel in D genommen werde. Ein Kreis aus C beschrieben schneide die Parabel in den Puncten M, m, N, n, von welchen Durchschnittspuncten in andern Fällen zwey wegfallen mögen, so wie auch gar keiner Statt haben mag. Von dem Mittelpuncte des Kreises C ist CB senkrecht auf DX gezogen, von dem einen Durchschnittspuncte des Kreises mit

der Parabel eben so MP, und MV von M auf die verlängerte BC.

Der Parameter der Parabel ist $= p$; der Halbmesser des Kreises $= r$; der Abstand der Abscissenlinie von der Axe DE $= a$; der Abstand des Mittelpunctes des Kreises von der Abscissenlinie, CB $= c$; und DB $= b$. Die Coordinaten seyn DP $= x$; PM $= y$. Die Ordinate PM treffe die Axe in R.

Für die Parabel ist die Gleichung

$$p\left(\frac{a^2}{p} + x\right) = (y - a)^2,$$

weil $DE^2 = p \cdot AE$. Die Entwickelung dieser Formel giebt

I. $px = y^2 - 2ay$.

An dem Kreise ist

II. $r^2 = (y - c)^2 + (x - b)^2$.

Setzt man in dieser Gleichung für x seinen Werth, so ist

III. $r^2 = (y - c)^2 + \left(\frac{yy}{p} - \frac{2ay}{p} - b\right)^2$

Diese mit p^2 multiplicirt, und entwickelt, wird

$$\text{IV. } \begin{array}{lllll} y^4 - 4ay^3 & + 4a^2y^2 & + 4abpy & + b^2p^2 & \\ & - 2bp. & - 2cp^2. & + c^2p^2 & = 0. \\ & + p^2. & & - r^2p^2 & \end{array}$$

Mit dieser Gleichung vergleiche man eine gegebene biquadratische,

$$y^4 - Ay^3 + Bpy^2 + Cp^2y - Dp^3 = 0.$$

Beide Gleichungen sind als Normal-Gleichungen anzusehen; alle Größen sind in ihnen positiv, oder bloß der Quantität nach zu nehmen. Ändern diese in andern Fällen ihre Vorzeichen, so sind sie negativ, und wenn sie negativ werden, bekommen sie eine entgegengesetzte Lage in Beziehung auf diejenige, welche sie in der Figur haben.

Die Zusammenhaltung beider Gleichungen giebt
I. $4a = A$; II. $4a^2 - 2bp + p^2 = Bp$;
III. $4ab - 2cp = Cp$; IV. $r^2 - b^2 - c^2 = Dp$.

Daraus wird erhalten

$$a = \frac{1}{4} A$$

$$b = \frac{2aa}{p} + \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} B$$

$$c = \frac{2ab}{p} - \frac{1}{2} C$$

$$r^2 = b^2 + c^2 + Dp$$

Der Terminus $\frac{2aa}{p}$ ist $= 2AE$; ferner ist $\frac{2ab}{p}$ die vierte Proportional-Linie zu p, a, 2b; und Dp ist das Quadrat der mittlern Proportional-Linie zwischen D und p.

Mit einem willkührlichen Parameter zeichne man eine Parabel MAN, und ziehe in dem Abstande $DE = \frac{1}{4} A$ mit der Axe derselben die Parallele DX, wie in der Figur, wenn A positiv ist; das ist, das Vorzeichen — hat. Von dem Puncte D, wo sie die Parabel trifft, ziehe man DE senkrecht auf die Axe, nehme von E aus $EF = \frac{1}{2} p$, und von F aus $FG = 2AE \left(= \frac{2aa}{p}\right)$, dann von G rückwärts $GH = \frac{1}{2} B$, wenn B positiv ist. So ist $EH = b$, das ist $DB = b$, wenn HB senkrecht auf DX ist. Dann ziehe man durch D und F eine gerade Linie, welche die verlängerte BH in J schneide, so ist $BJ = \frac{2ab}{p}$, da $EF : ED = DB : BJ$ ist. Auf BJ nehme man $JC = \frac{1}{2} C$ nach B hin, wenn C positiv ist, so ist C der Mittelpunct des zu beschreibenden Kreises, dessen Halbmesser noch zu finden ist. Man suche zuerst die Linie, deren Quadrat dem Rechtecke von D und p oder dem Producte Dp gleich ist.

Ist D positiv, so zeichne man ein rechtwinklichtes Dreyeck CDK (Fig. 26. Tab. II.), worin die Kathete $DC = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, und die ander Kathete DK der Seite jenes Quadrats gleich ist; die Hypotenuse CK ist der gesuchte Halbmesser. Ist aber D negativ, so beschreibe man über DC einen Halbkreis, trage darin die Chorde DL gleich der Seite jenes Quadrats, und ziehe CL, so ist CL der gesuchte Halbmesser. Das erstere ist der Fall mit der Normal-Gleichung, die durch unsere Figur construirt wird, wenn sie vier mögliche Wurzeln hat. Sie hat, wegen der drey Abwechslungen der Vorzeichen drey positive Wurzeln, nämlich die drey positiven Ordinaten in M, m, n, und eine negative, die Ordinate in N, (s. Gleichung, IV. 6.)

Mit dem gefundenen Halbmesser beschreibe man nun einen Kreis, welcher die Parabel in vier verschiedenen Puncten schneidet, wenn die Gleichung vier verschiedene mögliche Wurzeln hat. Er schneidet sie in zweyen, und berührt sie in einem Puncte, wenn die Gleichung unter den vier möglichen Wurzeln zwey gleiche hat. Er schneidet sie in nicht mehr als zwey Puncten, wenn die Gleichung nur zwey mögliche verschiedene Wurzeln hat, und berührt sie in einem einzigen, wenn die beiden einzigen möglichen sich gleich sind. Schneidet der Kreis die Parabel gar nicht, so hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzel. Ist D negativ, und Dp größer als $b^2 + c^2$, so ist r^2 negativ, welches sogleich, ohne Construction, zu erkennen giebt, daß die Gleichung keine mögliche Wurzeln habe. Segner hat sich geirrt, da er in den Elem. Anal. finit. pag. 475. sagt, daß man r immer möglich machen könne, weil man die Einheit nach Gefallen annehmen, und dadurch b^2 immer groß genug machen möge. Die Einheit ist durch den Parameter, den er = 1 setzt, bestimmt. — In dem Falle, da eine Gleichung drey gleiche Wurzeln hat, giebt unsere Construction sie nur als einzeln ausser der vierten Wurzel an. Für diesen Fall müßte die Abscissenlinie gegen die Axe geneigt seyn, damit für den Berührungspunct und einen der

Durchschnittspuncte die Ordinaten gleich groß seyn mögen.

Die für biquadratische Gleichungen angewiesene Construction ist auch auf vollständige cubische anwendbar. Eine solche sey $y^3 - Ay^2 + By + C = 0$. Man multiplicire sie mit y, so wird sie diese: $y^4 - Ay^3 + By^2 + Cy = 0$, in welcher eine Wurzel $= 0$ ist. Demnach setze man in der vorher behandelten biquadratischen Gleichung $D = 0$, so erhält man die veränderte cubische. In der Construction ist CD der Halbmesser, und der Kreis geht durch den Anfang der Abscissen, so daß die Ordinate in diesem Puncte die hinzugefügte Wurzel $y = 0$ bedeutet.

Bakers Centralregel ist im Wesentlichen das für die biquadratischen Gleichungen hier gewiesene Verfahren; allein die Vorschriften wegen der Lage der Linien erfordern zu viele Aufmerksamkeit, um sich nicht zu irren, weil es an einer bestimmten Regel fehlt, was positiv, und was negativ seyn soll. Die Regel trifft man in Tob. Mayers mathematischem Atlas, Supplement, Tab. VI. an. Man mag auch Wolfs Elementa Matheseos, T. I. Analysis Finit. §. 622 vergleichen. Bey diesem Artikel sind zwey Abhandlungen von Halley aus den Transactionen, die auch in der 's Gravesandschen Ausgabe von Newtons Arithm. univ. befindlich sind, benutzt worden. Die Regeln wegen des Positiven und Negativen daselbst sind nicht einfach genug. Die Beweise der Constructionen sind nicht beygefügt.

IV. Arithmetisch-geometrische Construction der Gleichungen.

Man berechne einige Werthe einer gegebenen Gleichung für gewisse Werthe der unbekannten Größe, und setze diese, für eine beliebige linearische Einheit, als Ordinaten auf eine Abscissenlinie, in den Puncten, welche von dem Anfange der Abscissen den Abstand haben, der in den Werthen der Gleichung für die unbekannte Größe gesetzt

ist. Durch diese Puncte ziehe man aus freyer Hand eine krumme Linie mit möglichster Beobachtung der allmähligen Krümmung, so erhält man an den Stellen, wo die Endpuncte der aufgetragenen Ordinaten nahe genug liegen, die krumme Linie, deren Ordinaten die Werthe der Gleichung für jede Abscisse darstellen. Die Abstände ihrer Durchschnittspuncte mit der Abscissenlinie von dem Anfange der Abscissen geben die Wurzeln der Gleichung, desto genauer, je vollkommner die Zeichnung ist.

Z. B. Es ist (Fig. 27. Tab. II.) die Abscissenlinie XY, und darauf der Anfang in A. Die Abscissen nach der rechten Hand hin bedeuten die positiven Werthe von x in der Gleichung für x; die nach der andern Seite hin die negativen. Man setze auf diese die zu verschiedenen Werthen von x gehörigen Werthe der Gleichung, als in A selbst den Werth Aa, oberhalb der Abscissenlinie, wenn der Werth positiv ist, unterhalb, wenn er negativ ist. So ist der zu AB gehörige Werth Bb negativ, der zu AC gehörige Cc positiv. Nach Beschaffenheit der Umstände hat man mehr oder weniger Werthe der Gleichung zu berechnen und aufzutragen. Die durch die gefundenen Puncte gezogene krumme Linie schneide die Abscissenlinie in M, N, P, so sind AM und AN positive Wurzeln der Gleichung, und AP eine negative. Ist die Gleichung eine cubische, so sind nicht mehr Durchschnitte möglich, und die krumme Linie erstreckt sich mit zwey Zweigen NQ, PR ins Unendliche auf beiden Seiten der Abscissenlinie nach entgegengesetzten Gegenden fort. Letzteres ist der Fall bey allen Gleichungen von einem ungeraden Grade. Die Anzahl der möglichen Durchschnitte mit der Abscissenlinie ist nicht größer als die Zahl, welche den Grad der Gleichung ausdrückt, kann aber kleiner seyn; es kann selbst nur ein einziger Durchschnitt Statt haben, wenn nämlich die Abscissenlinie oberhalb oder unterhalb aller Biegungen der krummen Linie liegt, oder die krumme Linie gar keine Biegung hat.

In Fig. 28. Tab. II. ist eine Gleichung vom vierten Grade durch den Zug einer krummen Linie abgebildet.

Die Zeichnung ist aber, so wie die vorhergehende, nach keiner bestimmten Gleichung entworfen, weil die Ordinaten der krummen Linie für den Raum der Zeichnung zu groß werden würden, wenn die Wurzeln eine hinlängliche Größe erhalten. Die Abscissenlinie ist XY; der Anfang der Abscissen ist in A; die Durchschnitte der krummen Linie mit der Abscissenlinie sind M, N, P, Q, welche drey positive Wurzeln und eine negative geben. Zwischen den Abscissen, wodurch die Wurzeln der Gleichung dargestellt werden, liegen die Abscissen AB, AC, AD, deren zugehörige Ordinaten Bb, Cc, Dd größte sind, nämlich in Beziehung auf die nächst vorhergehenden und folgenden. Die negativen Ordinaten, welche der Quantität nach Größte sind, heißen aber, als negative Größen, Kleinste, weil sie aus den vorhergehenden durch die Hinzusetzung einer subtractiven Größe entstehen, und daher in Rücksicht dieser kleiner sind. Die krumme Linie geht mit zwey Zweigen PS, QT nach derselben Gegend von der Abscissenlinie an ins Unendliche fort, da das höchste Glied der Gleichung für eine negative Abscisse positiv ist, und von einem gewissen Werthe an schon allein größer bleibt als alle subtractiven Glieder der Gleichung zusammen genommen. Das ist der Fall bey allen Gleichungen von einem geraden Grade. Ist die Ordinate Aa in dem Anfangspuncte negativ, wie in der Figur, so hat die Gleichung wenigstens zwey mögliche Wurzeln, da die Abscissenlinie die beiden unendlichen Zweige schneiden muß, wenn sie auch über allen Biegungen der krummen Linie weg geht. Ist aber die Ordinate in A positiv, so hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzeln, wenn die Abscissenlinie unterhalb aller Biegungen liegt.

Die geometrische Abbildung der Gleichungen ist sehr geschickt die Theorie derselben auf eine sinnliche Art zu erläutern. Wenn in der Folge der Ordinaten unter den vorhergehenden und nachfolgenden eine absolut Kleinste sich findet, so geht daselbst die Abscissenlinie unter oder über einer Biegung weg, unter, wenn das Kleinste positiv, über, wenn das Kleinste, absolut genommen, negativ ist.

Man lege in Fig. 28. die Abscissenlinie so, daß sie unter dem Puncte c und über d liege, in einer der vorigen parallelen Lage. Dadurch fallen zwey mögliche Wurzeln weg, und die Ordinate in C ist ein positives Kleinstes. Liegt die Abscissenlinie auch unterhalb des Punctes d, so sind alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung, welche die Zeichnung abbildet, unmöglich. Man sieht, wie bey der parallelen Verrückung der Abscissenlinie, das ist, bey einer Veränderung des absoluten Gliedes der Gleichung, zwey ungleiche Wurzeln sich immer näher kommen, und bey der Berührung mit der krummen Linie an dem Biegungspuncte, wie b oder c oder d, sich gleich werden, bey weiterer Verrückung aber sich in unmögliche verwandeln. Der Übergang von der Möglichkeit zur Unmöglichkeit geschieht also hier durch die Gleichheit zweyer Wurzeln. Die Summe zweyer nächsten Wurzeln, wie AN, AP, ist = 2AC − CN + CP, wenn C der zu einer größten oder kleinsten Ordinate gehörige Punct der Abscisse ist. Der Theil AC hängt nicht von dem absoluten Gliede der Gleichung (= Aa) ab, oder wenn dieses in den irrationalen Theilen von AC enthalten ist, muß es bey der Entwickelung herausgehen. Aber CN und CP hängen von dem absoluten Gliede ab, so daß sie Null sind, wenn die Abscissenlinie durch c geht.

Die krumme Linie, welche eine Gleichung vom nten Grade abbildet, kann n − 1 Biegungen, nicht mehrere, haben. Es können aber eine oder mehrere Biegungen wegfallen. Wenn z. B. in Fig. 28. die positiven Ordinaten von M an beständig zunehmen, so behält die krumme Linie nur eine einzige Biegung, und ist parabelförmig. Die zu der Linie gehörige Gleichung kann gar nicht mehr als zwey Wurzeln haben, wie auch das absolute Glied verändert werden mag. Wenn die Biegung NcP wegfällt, so wird AC eine unmögliche Größe. Eine Linie zu einer Gleichung eines ungeraden Grades kann alle Biegungen verlieren, und mit zwey Zweigen, die entgegengesetzte Krümmung haben, (der eine concav, der andere nach derselben Gegend convex,) ins Unendliche hin sich erstrecken.

Die Gleichung kann alsdann nicht mehr als eine einzige Wurzel haben. Mit jeder wegfallenden Biegung fallen zwey Durchschnitte mit der Abscissenlinie weg, daher die Anzahl der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung immer gerade ist.

Man kann die linearischen Werthe einer Gleichung auch durch eine Construction finden, welches an dem Beyspiele einer cubischen Gleichung gezeigt werden wird. Diese sey $\frac{ax^3}{p^3} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} + d = o$, wo p der Parameter der krummen Linie heißen mag. Die Größen a, b, c, d sind Linien, wie p und x. Setzt man $p = 1$ so werden die übrigen Linien Zahlen, und zwar die Exponenten des Verhältnisses des Parameters zu ihnen. Man zeichne (Fig. 29. Tab. II.) ein Rechteck AEFK, woran die Grundlinie EK = p, und die Seite AE = a + b + c + d ist, nämlich AB = a; BC = b; CD = c; De = d. Man nehme auf der Grundlinie das Stück ET = x, und ziehe TP parallel mit AE. Nun ziehe man BF, und durch ihren Durchschnittspunct Q auf PT die mit EK parallele Gg; darauf CG, welche PT in R schneidet, und durch R die parallele Hh mit EK; dann DH, und durch ihren mit TP gemeinschaftlichen Punct S die mit EK parallele Ji. Dieses geschehen, so ist $TS = \frac{ax^3}{p^3} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} + d$, als der Werth der gegebenen Gleichung für x = ET.

Denn es ist $AB : Bg = p : x$, also $Bg = \frac{ax}{p}$.

Ferner ist $Cg : Ch = p : x$, also $Ch = Cg \cdot \frac{x}{p}$ $= (CB + Bg)\frac{x}{p}$, das ist $Ch = \frac{bx}{p} + \frac{ax^2}{p^2}$.

Noch ist $Dh : Di = p ; x$, also $Di = Dh \cdot \frac{x}{p}$

$= (DC + Ch)\frac{x}{p}$, das ist $Di = \frac{cx}{p} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{ax^3}{p^3}$. Da $TS = Ei$, und $DE = d$ ist, so ist

$$TS = d + \frac{cx}{p} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{ax^3}{p^3}.$$

Auf diese Art lassen sich auch die Werthe anderer Gleichungen construiren. Die Methode ist aber mühsam, weil man das Rechteck mehrmahls zeichnen muß, damit man unter den vielen Linien keinen Mißgriff thue. In der Zeichnung der Figur sind die Coefficienten a, b, c alle kleiner als p, und $\frac{x}{p}$ ist ein Bruch. Wäre jene und x größer als p, so kann die Construction unbequem werden, indem TS oder der Werth der Gleichung eine beträchtliche Größe in Vergleichung mit EK erhält.

Wenn einige der Coefficienten a, b, c. d, etc. negativ sind, so hat man die Theile auf AE, welche sie darstellen, in entgegengesetzter Richtung, das ist von E nach A hin, zu nehmen. Z. B. für die Gleichung $\frac{ax^3}{p^3} - \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} - d = 0$ hat man BC von B nach A hin, und DE von D nach A hin zu tragen. Für negative Werthe von x wird ET in der entgegengesetzten Richtung genommen.

Man wird sich vorstellen können, wie zu folge dieser Construction ein Instrument aus einigen befestigten und mehrern verschiebbaren Linealen mit Einschnitten oder Nuthen und Stiften, zusammen zu setzen sey, das mit einer Reißspitze in S die krumme Linie durch einen fortgehenden Zug beschriebe. Ein solches Instrument ist in der Encyclopédie méthodique, Mathematique, in dem Artikel, Equation, beschrieben, und dabey auch abgebildet.

Es ist für quadratische Gleichungen eingerichtet. Die Bewegungen geschehen mittelst gezähnter Räder, die in gezahnte Lineale eingreifen. Ein ähnliches Instrument hat Rowning in den Englischen Transactionen 1770 angegeben. Die Construcion, worauf diese Instrumente beruhen, hat Segner in den neuern Petersburger Comment. T. VII. gelehrt, sie auch in seinen Elem. Analyseos finit. §. 705 ff. vorgetragen. Der Beweis ist in diesem Artikel sehr abgekürzt. Die Instrumente sind mehr sinnreich als brauchbar.

V. Auflösung quadratischer und cubischer Gleichungen durch die Goniometrie (trigonometrische Formeln).

1. Die Formeln für die Sinus, Cosinus und Tangenten vielfacher Winkel durch eben solche Functionen des einfachen können angewandt werden, um die letztern aus den erstern sehr genau zu finden, da alle diese Functionen der Winkel in den Tafeln mit großer Genauigkeit angegeben sind. Da aber in diesen Formeln nur zwey Größen unbestimmt bleiben, der Sinus totus oder die Tangente von 45 Grad, und die Function des vielfachen Winkels, wenn die Function des einfachen gesucht wird, so kann man dadurch nur die Gleichungen vom zweyten und dritten Grade auflösen, und die letztern nur, wenn das zweyte Glied darin fehlt, wodurch die zwey Coefficienten gegeben werden, welche den Sinus totus und den Sinus oder Cosinus des dreyfachen Winkels bestimmen. Die goniometrischen Formeln für die Functionen größerer Vielfachen eines Winkels enthalten gewisse Relationen der Coëfficienten, welche in einer gegebenen Gleichung sich auch finden müssen, wenn sie durch die Theilung eines Winkels aufgelöset werden soll.

2. Eine quadratische Gleichung sey

$$x^2 - ax + b = o,$$

worin die Größen a, b positiv oder absolute, genommen werden. Die Gleichung zwischen dem Sinus eines Winkels und dem des doppelten ist $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi . \cos\varphi$ (Goniometrie; 35). Diese werde quadrirt, so ist

$$\sin 2\varphi^2 = 4 \sin\varphi^2 (1 - \sin\varphi^2),$$

das ist,

$$4 \sin\varphi^4 - 4 \sin\varphi^2 + \sin 2\varphi^2 = 0 .$$

Hier bedeuten $\sin\varphi$ und $\sin 2\varphi$ die numerischen Sinus für den Sinus totus $= 1$. Für den S. totus $= r$, sey der Sinus von $\varphi = y$, und der Sinus von $2\varphi = f$, so ist $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, und $\sin 2\varphi = \frac{f}{r}$, indem der Ausdruck $\sin\varphi$ sich immer auf den Sinus totus $= 1$ bezieht. Es ist nun

$$y^4 - r^2 y^2 + \tfrac{1}{4} r^2 f^2 = 0.$$

Diese Gleichung halte man gegen die gegebene, $x^2 - ax + b = 0$, so ist $x = y^2$; $r^2 = a$; $\frac{1}{4} r^2 f^2 = b$, folglich $\frac{f}{r} = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, das ist, $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

Da $y = r \sin\varphi$ ist, so ist
$x = r^2 \sin\varphi^2$, oder $x = a \sin\varphi^2$.

Es gehört f auch zu dem Winkel $\pi - 2\varphi$, wo π zwey Rechte bedeutet, daher auch dieser Winkel in zwey Theile zu theilen ist, (Goniom. V.). Also ist der zweyte Werth von $y = r \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = r \cos\varphi$, und $x = a \cos\varphi^2$.

Man suche also den Winkel 2φ, dessen Sinus $= \frac{2\sqrt{b}}{a}$ ist, so sind die beiden Wurzeln der obigen Gleichung, $a \sin\varphi^2$ und $a \cos\varphi^2$. Die Summe derselben ist $= a(\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2) = a$; ihr Product $= a^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2 = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi^2 = b$, wie es seyn muß, (Gleichung I. 8). Es muß aber $2\sqrt{b} < a$ seyn, da $\sin 2\varphi < 1$ ist, oder $b < \frac{1}{4} a^2$, wenn die

Wurzeln möglich seyn sollen, einstimmig mit (Gleichung I. 4.)

Da $a = \frac{2\sqrt{b}}{\sin 2\varphi} = \frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi . \cos\varphi}$ (Goniom. 35),

so sind die beiden Wurzeln der Gleichung, $\tang\varphi . \sqrt{b}$ und $\cot\varphi . \sqrt{b}$, (eben das. 14.).

2. Exempel. Es sey die Gleichung $x^2 - 64x + 720 = 0$ aufzulösen. Es ist

$$\begin{array}{rl} \log b = & 2{,}8573325 \\ \hline \log\sqrt{b} = & 1{,}4286662 \\ \log 2 = & 0{,}3010300 \\ -\log a = & -1{,}8061800 \\ \hline \log\sin 2\varphi = & 9{,}9235162 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\varphi = 56^\circ 59' 5'' \\ \varphi = 28 . 29 . 32{,}5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\sin\varphi = & 9{,}6785562 \\ & 9{,}6785562 \\ \log a = & 1{,}8061800 \\ \hline & 1{,}1632924 \ldots \text{I. } 14{,}5644 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\cos\varphi = & 9{,}9439300 \\ & 9{,}9439300 \\ \log a = & 1{,}8061800 \\ \hline & 1{,}6940400 \ldots \text{II. } 49{,}4356 \end{array}$$

Die Summe der beiden Wurzeln ist $= 64$; ihr Product, wie durch die Addition ihrer Logarithmen gleich erhellt, ist $= 720$.

Nach der zweyten Form der Wurzeln ist

$$\begin{array}{rl|rl} \log\text{tg}\,\varphi = & 9{,}7346263 & \log\cot\varphi = & 0{,}2653737 \\ \log\sqrt{b} = & 1{,}4286662 & \log\sqrt{b} = & 1{,}4286662 \\ \hline \log. \text{I.} = & 1{,}1632925 & \log \text{II.} = & 1{,}6940399 \end{array}$$

3. Die quadratische Gleichung sey

$$x^2 + ax - b = 0.$$

Diese läßt sich nicht durch Hülfe des Sinus auflösen, weil der Sinus des Winkels 2φ für sie unmöglich wird. Man nehme aber die Formel 46 der Goniometrie

$$\text{tang}\, 2\varphi = \frac{2\,\text{tang}\,\varphi}{1 - \text{tang}\,\varphi^2},$$

und setze $\text{tang}\,\varphi = \frac{t}{r}$, $\text{tang}\, 2\varphi = \frac{f}{r}$, so ist

$$t^2 + \frac{2r^2}{f}t - r^2 = 0.$$

Hält man diese Gleichung gegen die für x, so ist $t = x$; $\frac{2r^2}{f} = a$; $r^2 = b$, also $\text{tang}\, 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, und $x = \text{tang}\,\varphi . \sqrt{b}$.

In diesem Ausdrucke liegt ein doppelter Werth. Ist 2φ der kleinste Winkel zu der Tangente f, so gehört dieselbe Tangente auch zu $\pi + 2\varphi$ (Goniom. 8.), und es ist x sowohl $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\pi + 2\varphi).\sqrt{b}$ als $\text{tang}\,\varphi.\sqrt{b}$. Es ist aber $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\pi + 2\varphi) = -\text{tang}\,(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = -\cot\varphi$. Demnach ist, wenn $\text{tang}\, 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ genommen wird,

$x = \text{tang}\,\varphi.\sqrt{b}$, und $x = -\cot\varphi.\sqrt{b}$.

Die Summe von den entgegengesetzten dieser Wurzeln ist $= (\cot\varphi - \text{tang}\,\varphi)\sqrt{b}$, das ist (Goniom. 45) $= 2\cot 2\varphi.\sqrt{b} = \frac{2\sqrt{b}}{\text{tang}\, 2\varphi} = a$, wie es seyn muß (Gleichung I. 8). Das Product ist $= -\text{tang}\,\varphi.\cot\varphi.\sqrt{b}.\sqrt{b} = -b$.

4. Die Gleichung $x^2 - ax - b = 0$ hat dieselben Wurzeln der Quantität nach mit der Gleichung $x^2 + ax - b = 0$, aber entgegengesetzt. Setzt man demnach

$\tan 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, so ist $x = + \cot\varphi . \sqrt{b}$, und $x = - \tan\varphi . \sqrt{b}$.

5. Die Auflösungen der beiden Fälle einer quadratischen Gleichung haben etwas übereinstimmendes und auch verschiedenes. Für die Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ wird $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ gesetzt, und die beiden Wurzeln sind $+ \tan\varphi . \sqrt{b}$ und $+ \cot\varphi . \sqrt{b}$. Für die Gleichung $x^2 + ax - b = 0$ wird $\tan 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ genommen, und die beiden Wurzeln sind $+ \tan\varphi . \sqrt{b}$, und $- \cot\varphi . \sqrt{b}$.

6. Für den Sinus eines dreyfachen Winkels ist die Formel (Goniometrie IV.)

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin\varphi^3.$$

Es sey $\sin\varphi = \frac{x}{r}$, und $\sin 3\varphi = \frac{f}{r}$, so ist

$$x^3 - \tfrac{3}{4} r^2 x + \tfrac{1}{4} r^2 f = 0.$$

Hiegegen halte man eine gegebene cubische Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt,

$$x^3 - bx + c = 0,$$

so ist $\frac{3}{4} r^2 = b$; $\frac{1}{4} r^2 f = c$, also $r = \sqrt{\frac{4b}{3}}$, und $\sin 3\varphi = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$. Damit dieser Sinus möglich sey, muß $27c^2 < 4b^3$ seyn, welches die Bedingung der Möglichkeit aller drey Wurzeln ist, (Gleichung III. 13.). Auch darf b nicht negativ seyn, oder in der Gleichung das Vorzeichen + haben, da der Halbmesser $r = 2\sqrt{\frac{b}{3}}$ ist.

Ist $\sin 3\varphi$ und daraus φ durch die Formel, $\sin 3\varphi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} = \frac{c\sqrt{6,75}}{b\sqrt{b}}$ gefunden, so ist

$$x = r\sin\varphi = \sin\varphi.\sqrt{\frac{4b}{3}}.$$

In diesem Ausdrucke sind drey verschiedene Werthe enthalten, nämlich $+ r\sin\varphi$; $+ r\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$; $- r\sin(\frac{1}{3}\pi + \varphi)$, nach Goniometrie. V.

7. Die gegebene Gleichung sey $x^3 - bx - c = 0$. Für diese ist $\sin 3\varphi$ negativ, das ist, der Winkel 3φ ist größer als zwey Rechte. Man setze $3\varphi = \pi + 3\omega$, so sind die drey Wurzeln, $+ r\sin(\frac{1}{3}\pi + \omega)$; $- r\sin\omega$; $- r\sin(\frac{1}{3}\pi - \omega)$, weil $\sin(\frac{2}{3}\pi + \omega) = \sin(\frac{1}{3}\pi - \omega)$ ist. Diese Werthe entstehen aus den vorigen, wenn φ mit $-\omega$ vertauscht wird.

8. Man kann für diesen Fall sich auch der Cosinus bedienen. Es ist (Goniom. IV.)

$$\cos 3\varphi = 4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi$$

Man setze $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, und $\cos 3\varphi = \frac{g}{r}$ so ist

$$x^3 - \frac{3}{4}r^2 x - \frac{1}{4}r^2 g = 0.$$

Die Vergleichung mit

$$x^3 - bx - c = 0$$

giebt $\frac{3}{4}r^2 = b$; $\frac{1}{4}r^2 g = c$, also $r = \sqrt{\frac{4b}{3}}$,

$$\cos 3\varphi = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}.$$

Auch hier muß $27c^2 < 4b^3$ und b positiv seyn. Ist dieses, so sind die drey Wurzeln der Gleichung, $r\cos\varphi$; $r\cos(\frac{2}{3}\pi - \varphi)$; $r\cos(\frac{2}{3}\pi + \varphi)$. Die beiden letztern sind negativ, weil die Winkel größer als ein Rechter sind, da 3φ kleiner als 90 Gr., und φ kleiner als 30 Gr. ist.

9. **Exempel.** Es sey $x^3 - 2100x + 24000 = 0$. Hier ist $b = 2100$; $c = 24000$. Die drey Wurzeln seyn x', x'', x'''.

$\log c = 4{,}3802112$	$l.\,b = 3{,}3222193$
$\frac{1}{2} l.\,6{,}75 = 0{,}4146519$	$\frac{1}{2} l.\,b = 1{,}6611096$
$4{,}7948631$	$l.\,b\sqrt{b} = 4{,}9833289$
$4{,}9833289$	
$l.\sin 3\varphi = 9{,}8115342$	$3\varphi = 40^\circ 23' 11''$
$l.\,b = 3{,}3222193$	$\varphi = 13.\ 27.\ 43''\ \frac{2}{3}$
$l.\,0{,}75 = 9{,}8750613$	$\frac{1}{3}\pi - \varphi = 46.\ 32.\ 16\ \frac{1}{3}$
$l.\,r^2 = 3{,}4471580$	$\frac{1}{3}\pi + \varphi = 73.\ 27.\ 43\ \frac{2}{3}$
$l.\,r = 1{,}7235790$	
$l.\sin\varphi = 9{,}3669878$	
$l.\,x' = 1{,}0905668$	$x' = 12{,}31875$

$l.\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi) = 9{,}8608344$

$l.\,x'' = 1{,}5844134 \quad x'' = +\,38{,}40726$

$l.\sin(\frac{1}{3}\pi + \varphi) = 9{,}9816518$

$l.\,x''' = 1{,}7052308 \quad x''' = -\,50{,}72602$

Die Summe der beiden positiven Wurzeln ist = 50, 72601, der negativen sehr genau gleich. Die Summe der Logarithmen aller drey Wurzeln ist = 4, 3802110, welcher von dem log. c fast gar nicht abweicht. Zur Sicherheit der Berechnung ist diese Probe rathsam. Sie beruht auf (Gleichung III. 5.).

In dem Artikel, Cardanische Regel, wird die hier zum Beyspiel gebrauchte Gleichung auf eine andere Art aufgelöset, die aber mühsamer ist.

10. In der Gleichung $x^3 - bx - c = 0$ sey $27c^2 > 4b^3$. so ist nur eine mögliche Wurzel vorhanden. Man setze $x = r(\tan\varphi + \cot\varphi)$ so ist

$$x^3 = r^3(\mathrm{tg}\,\varphi^3 + 3\,\mathrm{tg}\,\varphi^2 \cot\varphi + 3\,\mathrm{tg}\,\varphi \cot\varphi^2 + \cot\varphi^3),$$

Weil $\cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi}$, so ist

$x^3 = r^3 (tg\,\varphi^3 + 3\,tg\,\varphi + 3\cot\varphi + \cot\varphi^3)$, das ist
$$x^3 - 3r^2 x - r^3 (tg\,\varphi^3 + \cot\varphi^3) = 0.$$
Die Zusammenhaltung mit der Gleichung
$x^3 - bx - c = 0$
giebt $3r^2 = b$, und $r^3 (tg\,\varphi^3 + \cot\varphi^3) = c$; also
$r = \sqrt{\frac{b}{3}}$, und $tg\,\varphi^3 + \cot\varphi^3 = \frac{3c}{b}\sqrt{\frac{3}{b}}$.

Da $tg\,\varphi^3 . \cot\varphi^3 = 1$, so ist die Summe und das Product der beyden unbekannten gegeben, und es ist

$tang\,\varphi^3 = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} \pm \sqrt{\left(\frac{27c^2}{4b^3} - 1\right)}$ zu folge (Gleichung I. 1.) wo die Bedingung, daß $27c^2 > 4b^3$ sey, der Annahme gemäß ist. Man setze $\frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \sec A$; so ist $tang\,\varphi^3 = \sec A \pm tang\,A = tang\,(45^\circ \pm \frac{1}{2}A)$. (Goniometrie, II. 43). Nimmt man das eine Vorzeichen für $tang\,\varphi^3$, so gilt das andere für $\cot\varphi^3$.

Man setze $\sqrt[3]{tang\,(45^\circ \pm \frac{1}{2}\,tang\,A)} = B$, so ist $x = r\,(tang\,B + \cot B)$, das ist $x = 2r\,\mathrm{cosec}\,2B$ (Goniom. II. 45.), oder $x = \mathrm{cosec}\,2B\sqrt{\frac{4b}{3}}$, oder auch
$$x = \frac{1}{\sin 2B}\sqrt{\frac{4b}{3}}.$$

11. Exempel. Die Gleichung sey
$$x^3 - 13,3592\,x - 24,6377 = 0.$$
Hier ist $b = 13,3592$; $c = 24,6377$, und die Berechnung, wie folget.

$\log c = 1,3916001$
$\frac{1}{2}\, l.\ 6,75 = 0,4146519$
$1,8062520$
$1,6886706$
$l.\ \sec A = 0,1175814$
$l.\ tg(45^\circ - \frac{1}{2}A) = 9,6658245$
$l.\ tg\, B = 9,8886082$
$l.\ cosec\, 2B = 0,0141815$
$\frac{1}{2}\, l.\ 4b:3 = 0,6253595$
$l.\ x = 0,6394910$

$l.\ b = 1,1257804$
$\frac{1}{2}\, l.\ b = 0,5628902$
$l\, b\sqrt{b} = 1,6886706$
$l.\ 4:3 = 0,1249387$
$l.\ 4b:3 = 1,2507191$
$\frac{1}{2}\, l.\ 4b:3 = 0,6253595$
$A = 40^\circ 17' 15''$
$\frac{1}{2}A = 20.\ 8.\ 37$
$45^\circ - \frac{1}{2}A = 24.51.23$
$B = 37.43.53$
$2B = 75.27.46$
$x = 4,36004$

In dem Artikel, Cardanische Regel, ist diese Gleichung unmittelbar nach jener Regel aufgelöset.

12. Die Gleichung $x^3 - bx + c = 0$ hat dieselbe einzige Wurzel, welche $x^3 - bx - c = 0$ hat, aber entgegengesetzt oder negativ.

13. Die Gleichung $x^3 + bx - c = 0$ hat nur eine einzige mögliche Wurzel, wie auch b und c sich gegen einander verhalten mögen. Man setze $x = r(\tang\varphi - \cot\varphi)$, so ist $x^3 + 3r^2 x - r^3(\tang\varphi^3 - \cot\varphi^3) = 0$. Nun ist $3r^2 = b$, und $r^3(\tang\varphi^3 - \cot\varphi^3) = c$, also $r = \sqrt{\frac{b}{3}}$, und $\tang\varphi^3 = \frac{3c}{b}\sqrt{\frac{3}{b}}$. Hier ist der Unterschied zweyer unbekannten Größen gegeben, deren Product $= 1$ ist. Der Unterschied heiße der Kürze wegen d, so ist $\tang\varphi^3 = \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} + \frac{1}{2}d$, und $\cot\varphi^3 = \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} - \frac{1}{2}d$. (Gleichung I. 2). Man setze $\frac{1}{2}d = (\tang A$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} = \sec A$, und $\tang\varphi^3 = \sec A + \tang A = \tang(45^\circ + \frac{1}{2}A)$, so wie $\cot\varphi^3 = \sec A - \tang A = \tang(45^\circ - \frac{1}{2}A)$.

Ferner setze man

$\sqrt[3]{\tan(45^\circ - \frac{1}{2}A)} = \tan B$, so ist

$\sqrt[3]{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}A)} = \cot B$, und daher

$x = r(\cot B - \tan B)$, oder $x = 2r \cot 2B$.

Die Regel der Auflösung ist demnach: man suche

$\tan A = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}$, und $\tan B = \sqrt[3]{\tan(45^\circ - \frac{1}{2}A)}$,

so ist $x = 2 \cot 2B . \sqrt{\frac{b}{3}}$.

14. Wenn man für die Sinus und Cosinus der Sectoren einer gleichseitigen Hyperbel solche Tafeln hätte, wie für die Sinus und Cosinus der Kreissectoren durch die Sinus und Cosinus ihrer Bogen, so könnte man die cubischen Gleichungen mit einer einzigen möglichen Wurzel eben so bequem auflösen, als die mit drey Wurzeln mittelst der trigonometrischen Tafeln. Denn wenn a die halbe Axe der gleichseitigen Hyperbel, x der Cosinus eines Sectors S, g der Cosinus des dreyfachen Sectors, in Beziehung auf a ist, so ist $x^3 - \frac{3}{4}a^2x - \frac{1}{4}a^2g = 0$, (Goniom. VIII.). Die gegebene Gleichung sey $x^3 - bx - c = 0$, so giebt die Vergleichung $a = \sqrt{\frac{4b}{3}}$; $g = \frac{3c}{b}$. Es sey $\frac{g}{a} = \cos hyp. 3S$, und $\frac{x}{a} = \cos hyp. S$ für die halbe Axe $= 1$, so ist $\cos hyp. 3S = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}$, und $x = \left(\sqrt{\frac{4b}{3}}\right) . \cos hyp. S$. Hier ist $27c^2 > 4b^3$, da der hyperbolische Cosinus größer als die halbe Axe ist.

15. Es sey y der hyperbolische Sinus eines Sectors S, und f der Sinus des Sectors 3 S für die halbe Axe a, so ist $y^3 + \frac{3}{4}a^2y - \frac{1}{4}a^2f = 0$. Die gegebene

Gleichung sey $y^3 + by - c = 0$, so ist $a = \sqrt{\frac{4b}{b}}$; $f = \frac{3c}{b}$. Es sey $\frac{f}{a} =$ sin hyp. 3 S, und $\frac{y}{a} =$ sin hyp. S für die halbe Axe = 1, so ist sin hyp. $3S = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}$, u. $y = \left(\sqrt{\frac{4b}{3}}\right)$. sin hyp. S. Hier mag $27c^2$ größer oder kleiner als $4b^3$ seyn, da der hyperbolische Sinus von Null an bis ins Unendliche wächst.

16. In Lamberts Zusätzen zu den logar. und trigon. Tabellen enthält Tab. XXXII eine Anzahl hyperbolischer Sectoren mit ihren Sinus und Cosinus nebst deren Logarithmen. Man nehme die Gleichung in (V. 11.), nämlich $x^3 - 13{,}3592\,x - 24{,}6337 = 0$. Hier ist $b = 13{,}3592$; $c = 24{,}6377$. Es ist hier cos h. 3 S was dort sec A ist.

log cos h. 3 S	= 0,11758	3 S = 0,33132
log cos h. S	= 0,01505	S = 0,11044
log a	= 0,62536	
log x	= 0,64041	x = 4,369

Für 3 S und log cos h S haben nur die nächsten Werthe in der Tafel, die noch ziemlich von den wahren entfernt sind, genommen werden können. Dennoch ist die hier gefundene Wurzel nur um 0,01 gegen 4,37 unrichtig.

VI. Darstellung aller Wurzeln aus a^n, und der möglichen trinomischen Factoren der Function $x^n \pm a^n$, wo n eine ganze bejahte Zahl ist.

Die Größe $\pm a^{2n+1}$ hat nur eine mögliche Wurzel $\pm a$; und $+ a^{2n}$ hat zwey entgegengesetzte, $+ a$ und $- a$;

so wie die Gleichung $x^n \pm a^n = 0$ nur eine mögliche Wurzel für ein ungerades n, und $x^n - a^n = 0$ zwey gleiche entgegengesetzte für ein gerades n hat. Da aber eine Gleichung so viele Wurzeln hat, als der Exponens der höchsten Potenz der unbekannten Größe Einheiten enthält, so ist die Frage, was die unmöglichen Wurzeln dieser Gleichung oder der Potenz a^n für eine Form haben.

Die Goniometrie verhilft zu der Erfindung derselben. In dem Artikel, Goniometrie, IV. wird (daselbst zu einem andern Zwecke) gezeigt, daß

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1}$$

ist. Also ist

$$\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1} = (\cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$$

Diese nte Wurzel aus einer unmöglichen Größe hat so viele verschiedene Werthe als $\cos\varphi$ hat, wenn der Winkel $n\varphi$ durch seinen Cosinus gegeben wird, das ist, n verschiedene Werthe. (Goniom. V.)

Wenn $\cos n\varphi = +1$ gesetzt wird, so hat $n\varphi$ die Werthe 0, 2π, 4π, 6π; etc. wo 2π der Kreisumfang für den Halbmesser $= 1$ ist, zugleich ist $\sin n\varphi = 0$. Folglich giebt der Ausdruck, $\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1}$, nebst der einzigen möglichen Wurzel aus $+1$, auch die unmöglichen Wurzeln an. Diese Wurzeln bezeichne man allgemein durch x, wie die Wurzeln einer Gleichung.

Bey dem Gebrauche des obern Vorzeichens ist

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n} . \sqrt{-1},$$ wo für k alle ganze Zahlen von 1 bis $n-1$, nebst 0, zu nehmen sind. Größere Werthe von k als $n-1$ geben keine andern Cosinus und Sinus als schon für 0 bis $n-1$ vorhanden sind.

Für ein gerades $n = 2m$, und $k = m + r$, ist

$$\cos\frac{2(m+r)\pi}{2m} = \cos\frac{2(m-r)\pi}{2m},$$ und

Gleichung sey $y^3 + by - c = 0$, so ist $a = \sqrt{\frac{4b}{b}}$; $f = \frac{3c}{b}$. Es sey $\frac{f}{a} =$ sin hyp. 3 S, und $\frac{y}{a} =$ sin hyp. S für die halbe Axe $= 1$, so ist sin hyp. $3S = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}$, u. $y = \left(\sqrt{\frac{4b}{3}}\right)$. sin hyp. S. Hier mag $27c^2$ größer oder kleiner als $4b^3$ seyn, da der hyperbolische Sinus von Null an bis ins Unendliche wächst.

16. In Lamberts Zusätzen zu den logar. und trigon. Tabellen enthält Tab. XXXII eine Anzahl hyperbolischer Sectoren mit ihren Sinus und Cosinus nebst deren Logarithmen. Man nehme die Gleichung in (V. 11.), nämlich $x^3 - 13{,}3592x - 24{,}6337 = 0$. Hier ist $b = 13{,}3592$; $c = 24{,}6377$. Es ist hier cos h. 3 S was dort sec A ist.

log cos h. 3 S	$= 0{,}11758$	$3S = 0{,}33132$
log cos h. S	$= 0{,}01505$	$S = 0{,}11044$
log a	$= 0{,}62536$	
log x	$= 0{,}64041$	$x = 4{,}369$

Für 3 S und log cos h S haben nur die nächsten Werthe in der Tafel, die noch ziemlich von den wahren entfernt sind, genommen werden können. Dennoch ist die hier gefundene Wurzel nur um 0,01 gegen 4,37 unrichtig.

VI. Darstellung aller Wurzeln aus a^n, und der möglichen trinomischen Factoren der Function $x^n \pm a^n$, wo n eine ganze bejahte Zahl ist.

Die Größe $\pm a^{2n+1}$ hat nur eine mögliche Wurzel $\pm a$; und $+ a^{2n}$ hat zwey entgegengesetzte, $+ a$ und $- a$;

so wie die Gleichung $x^n \pm a^n = 0$ nur eine mögliche Wurzel für ein ungerades n, und $x^n - a^n = 0$ zwey gleiche entgegengesetzte für ein gerades n hat. Da aber eine Gleichung so viele Wurzeln hat, als der Exponens der höchsten Potenz der unbekannten Größe Einheiten enthält, so ist die Frage, was die unmöglichen Wurzeln dieser Gleichung oder der Potenz a^n für eine Form haben.

Die Goniometrie verhilft zu der Erfindung derselben. In dem Artikel, Goniometrie, IV. wird (daselbst zu einem andern Zwecke) gezeigt, daß

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi.\sqrt{-1}$$

ist. Also ist

$$\cos\varphi \pm \sin\varphi.\sqrt{-1} = (\cos n\varphi \pm \sin n\varphi.\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$$

Diese nte Wurzel aus einer unmöglichen Größe hat so viele verschiedene Werthe als $\cos\varphi$ hat, wenn der Winkel $n\varphi$ durch seinen Cosinus gegeben wird, das ist, n verschiedene Werthe. (Goniom. V.)

Wenn $\cos n\varphi = +1$ gesetzt wird, so hat $n\varphi$ die Werthe 0, 2π, 4π, 6π; etc. wo 2π der Kreisumfang für den Halbmesser $= 1$ ist, zugleich ist $\sin n\varphi = 0$. Folglich giebt der Ausdruck, $\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$, nebst der einzigen möglichen Wurzel aus $+1$, auch die unmöglichen Wurzeln an. Diese Wurzeln bezeichne man allgemein durch x, wie die Wurzeln einer Gleichung.

Bey dem Gebrauche des obern Vorzeichens ist

$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}.\sqrt{-1}$, wo für k alle ganze Zahlen von 1 bis $n - 1$, nebst 0, zu nehmen sind. Größere Werthe von k als $n - 1$ geben keine andern Cosinus und Sinus als schon für 0 bis $n - 1$ vorhanden sind.

Für ein gerades $n = 2m$, und $k = m + r$, ist

$$\cos\frac{2(m+r)\pi}{2m} = \cos\frac{2(m-r)\pi}{2m}, \text{ und}$$

$\sin \frac{2(m+r)\pi}{2m} = -\sin \frac{2(m-r)\pi}{2m}$, weil die Winkel zusammen den ganzen Umfang 2π ausmachen. Daher kann für

$$x = \cos \frac{2(m+r)\pi}{2m} + \sin \frac{2(m+r)\pi}{2m} \cdot \sqrt{-1}$$

gesetzt werden

$$x = \cos \frac{2(m-r)\pi}{2m} - \sin \frac{2(m-r)\pi}{2m} \cdot \sqrt{-1},$$

und es sind je zwey Werthe von

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} + \sin \frac{2k\pi}{n} \cdot \sqrt{-1},$$

wo k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}n$, nebst 0, bedeutet, und die Winkel nicht über zwey Rechte groß sind. Für $k = \frac{1}{2}n$ ist der zweyte Theil $= 0$, und es ist nur ein Werth von x vorhanden, nämlich -1, so wie für $k = 0$ auch nur ein Werth, $x = +1$ ist.

Es sey $n = 2m + 1$; und $k = m + r$, so ist wiederum für

$$x = \cos \frac{(2m+r)\pi}{2m+1} + \sin \frac{(2m+r)\pi}{2m+1} \cdot \sqrt{-1}$$

zu setzen

$$x = \cos \frac{2(m+1-r)\pi}{2m+1} - \sin \frac{2(m+1-r)\pi}{2m+1} \cdot \sqrt{-1},$$

so daß je zwey Werthe von x sind

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sin \frac{2k\pi}{n} \cdot \sqrt{-1},$$

wo k außer 0, die ganzen Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}(n-1)$ bedeutet.

Zweytens setze man $\cos n\varphi = -1$, so hat $n\varphi$ die Werthe π, 3π, 5π, 7π, etc. und $\sin n\varphi$ ist $= 0$. Folglich giebt nun $\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1}$, nebst der einzigen möglichen Wurzel aus -1, die nämlich in dem Falle eines ungeraden n Statt hat, auch alle unmöglichen Wurzeln an. Bezeichnet man jede derselben durch x, so ist

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} . \sqrt{-1},$$

wo für k alle ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$, nebst 0, zu setzen sind. Nimmt man statt der Winkel über zwey Rechte ihre Ergänzungen zu vier Rechten, so sind je zwey Werthe,

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} . \sqrt{-1},$$

wo die Werthe von k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{n-2}{2}$ oder bis $\frac{n-1}{2}$, für ein gerades oder für ein ungerades n, nebst 0, sind. Ist n ungerade, so ist für $2k+1 = n$, der Werth $x = -1$. Ist n einfach gerade, so ist für $2k+1 = \frac{1}{2}n$ der Werth $x = \pm 1 . \sqrt{-1}$; ist n doppelt gerade, so ist jede Wurzel zweytheilig.

Hieraus sieht man, daß es gleichgültig ist, ob in der Formel $\cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1}$ das obere oder das untere Vorzeichen gebraucht wird, um die Wurzeln aus $+1$ und -1 zu finden.

Mit diesen Wurzeln verbinde man den Factor a^n, so liefert der Ausdruck, $a(\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})$ alle Wurzeln aus $+a^n$. Für $+a^n$ sind die Werthe von φ wie bey den Wurzeln aus $+1$, für $-a^n$, wie bey den Wurzeln aus -1 zu nehmen.

Exempel. Die Cubikwurzeln aus $+1$ sind $+1$; $\cos 120^\circ \pm \sin 120^\circ . \sqrt{-1}$. Die Cubikwurzeln aus -1 sind $\cos 60^\circ \pm \sin 60^\circ . \sqrt{-1}$, und $\cos 180^\circ$

L

oder — 1. Sie sind jenen, gehörig genommen, gleich und entgegengesetzt.

Die Biquadratwurzeln aus + 1 sind ± 1; und cos 90° ± sin 90°. $\sqrt{-1}$, das ist, $\pm\sqrt{-1}$. Aus — 1 sind sie cos 45° ± sin 45°. $\sqrt{-1}$, und cos 135° ± sin 135°. $\sqrt{-1}$

Die fünften Wurzeln aus + 1 sind I. + 1; II. cos 72° ± sin 72°. $\sqrt{-1}$; III. cos 144° ± sin 144°. $\sqrt{-1}$. Aus — 1 sind sie I. cos 36° ± sin 36°. $\sqrt{-1}$; II. cos 108° ±. sin 108° $\sqrt{-1}$; III. cos 180° oder — 1.

Da die Wurzeln der Gleichungen $x^n - a^n = 0$ und $x^n + a^n = 0$ solchergestalt bekannt sind; so werden auch die Factoren der Functionen $x^n - a^n$ dadurch gefunden.

Es hat nämlich, wenn ± p eine der Wurzeln x einer Gleichung ist, das Aggregat ihrer Glieder, für jeden Werth von x, den Factor (x ∓ p), (Gleichung VI. 13). Die Functionen $x^n - a^n$ und $x^n + a^n$ haben also einfache Factoren von der Form $x - a(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$. Das Product von je zwey solchen Factoren ist $= x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2$. Nämlich $x^n - a^n$ hat die Doppelfactoren von der Form $x^2 - 2ax.\cos\frac{2k}{n}\pi + a^2$, wo k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ zu Werthen hat. Die Function $x^n + a^n$ hat die Doppelfactoren von der Form $x^2 - 2ax\cos\frac{2k+1}{n}\pi + a^2$, wo k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ oder $\frac{n-2}{2}$ zu Werthen bekommt.

Exempel. Die Factoren von $x^3 - a^3$ sind $x - a$; $x^2 - 2ax\cos\frac{2}{3}\pi + a^2$

$x^4 - a^4$	sind	$x - a$; $x^2 - 2ax \cos \frac{2}{4}\pi + a^2$
	=	$x + a$
$x^5 - a^5$	=	$x - a$; $x^2 - 2ax \cos \frac{2}{5}\pi + a^2$
		$x^2 - 2ax \cos \frac{4}{5}\pi + a^2$

u. s. w.

Die Factoren von

$x^3 + a^3$	sind	$x^2 - 2ax \cos \frac{1}{3}\pi + a^2$
		$x + a$
$x^4 + a^4$	=	$x^2 - 2ax \cos \frac{1}{4}\pi + a^2$
		$x^2 - 2ax \cos \frac{3}{4}\pi + a^2$
$x^5 + a^5$	=	$x^2 - 2ax \cos \frac{1}{5}\pi + a^2$
		$x^2 - 2ax \cos \frac{3}{5}\pi + a^2$
		$x + a$.

u. s. w.

Wenn man diese Factoren in einander multipliciren will, um daraus das Binomium hervorzubringen so muß man die Sätze von der Summe und dem Producte der Cosinus aliquoter Theile des Kreisumfanges und Vielfachen desselben kennen, (Goniometrie, V.) Auch ist der Satz, $2 \cos A . \cos B = \cos(A + B) . \cos(A - B)$ hier nöthig.

Die geometrische Darstellung dieser Factoren liefert der **Cotesische Lehrsatz.**

VII. Zerlegung der dreytheiligen Function $x^{2n} - 2px^n + 1$ in quadratische Factoren.

Die Gleichung $x^{2n} - 2px^n + 1 = 0$ hat als quadratische Gleichung betrachtet die Wurzeln

$x^n = p \pm \sqrt{(p^2 - 1)}$, oder $p + \sqrt{(p^2 - 1)}$ und

$\frac{1}{p + \sqrt{(p^2 - 1)}}$. (Gleichung II. 7).

Es sey $p + \sqrt{(p^2 - 1)} = q$, so sind die Wurzeln q und $\frac{1}{q}$. Ist $p^2 > 1$, so läßt sich die Gleichung oder Function in zwey mögliche Factoren zerlegen, nämlich $x^n - q$ und $x^n - \frac{1}{q}$, und diese werden nach dem gleich vorher gewiesenen Verfahren in quadratische zerlegt.

Es sey $p < 1$, und werde deshalb durch $\cos\alpha$ ausgedruckt. Es ist also $x^n = \cos\alpha \pm \sin\alpha . \sqrt{-1}$. Da $(\cos\alpha \pm \sin\alpha . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\alpha}{n} \pm \sin\frac{\alpha}{n} . \sqrt{-1}$ ist, so ist $x = \cos\frac{\alpha}{n} \pm \sin\frac{\alpha}{n} . \sqrt{-1}$. Nun hat $\frac{\alpha}{n}$ weil der Winkel α durch seinen Cosinus gegeben wird, n verschiedene Werthe, und x erhält dadurch $2n$ Werthe, wie es seyn muß. Die verschiedenen Werthe dieser Winkel sind, wenn α den kleinsten der zu $\cos\alpha$ gehörigen Winkel bedeutet,

$$\frac{\alpha}{n};\quad \frac{2\pi \pm \alpha}{n};\quad \frac{4\pi \pm \alpha}{n};\quad \frac{6\pi \pm \alpha}{n};\ \text{etc.}$$

bis daß deren n sind. Diese sind alle kleiner als π. Oder auch

$$\frac{\alpha}{n};\ \frac{2\pi + \alpha}{n};\ \frac{4\pi + \alpha}{n} \ldots \frac{(2n - 4)\pi + \alpha}{n};$$
$$\frac{(2n - 2)\pi + n}{n},$$

wo der letzte mit $\frac{2\pi - \alpha}{n}$, der vorletzte mit $\frac{4\pi - \alpha}{n}$ u. s. f. einerley Cosinus hat. Die Winkel der letztern Reihe sind in der zweyten Hälfte größer als π, (Goniometrie, V.)

Man bezeichne jeden dieser Winkel allgemein durch φ, so ist

$$x = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{1}.$$

Die Function $x^{2n} - 2x^{n}. \cos\alpha + 1$ hat also n Paare Factoren, $x - \cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1}$, und $x - \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$. Das Product je zweyer solcher ist

$$x^2 - 2x. \cos\varphi + 1.$$

Dieses ist ein quadratischer oder trinomischer Factor der Function $x^{2n} - 2x^{n}. \cos\alpha + 1$. Der Winkel φ erhält die vorher angegebenen n Werthe.

Exempel. Die Function $x^6 - 2x^3. \cos\alpha + 1$ hat die Factoren.

$$x^2 - 2x. \cos\frac{x}{3} + 1$$

$$x^2 - 2x. \cos\frac{2\pi - \alpha}{3} + 1$$

$$x^2 - 2x. \cos\frac{2\pi + \alpha}{3} + 1.$$

Die Function $x^8 - 2x^4. \cos\alpha + 1$ hat die Factoren,

$$x^2 - 2x. \cos\frac{\alpha}{4} + 1$$

$$x^2 - 2x. \cos\frac{2\pi - \alpha}{4} + 1$$

$$x^2 - 2x. \cos\frac{2\pi + \alpha}{4} + 1$$

$$x^2 - 2x. \cos\frac{4\pi - \alpha}{4} + 1.$$

Es ist $\cos\frac{4\pi - \alpha}{4} = -\cos\frac{\alpha}{4}$ und $\cos\frac{2\pi + \alpha}{4} = -\cos\frac{2\pi - \alpha}{4}$.

Zur Übung in der Rechnung mit goniometrischen Formeln mag man diese und andere solche Functionen durch die

Multiplication ihrer Factoren herausbringen. Die dazu nöthigen Formeln finden sich in (Goniometrie, V.). Producte von Cosinus werden mittelst der Formel, $2 \cos A. \cos B = \cos(A + B). \cos(A - B)$ zerlegt.

Die Function $x^{2n} - 2a^n x^n. \cos\alpha + a^{2n}$ hat die quadratischen oder trinomischen Factoren von der Form $x^2 - 2ax. \cos\phi + a^2$. Denn man setze $x = az$, so ist jene Function $a^{2n}(z^{2n} - 2z^n. \cos\alpha + 1)$. Diese hat die quadratischen Factoren, $a^2(z^2 - 2z. \cos\phi + 1)$; das ist, $x^2 - 2ax. \cos\phi + a^2$.

Die geometrische Darstellung dieser Factoren wird in dem Artikel, **Cotesischer Lehrsatz**, gezeigt.

Zu vergleichen: Euleri Introd. in Anal. Infin. T. I. cap. 9

Apollonische Parabel heißt die gewöhnliche Parabel, die aus dem Schnitte eines Kegels entsteht, zum Unterschiede von den Parabeln höherer Ordnungen, weil Apollonius von Pergä (250 J. v. Ch.) über die Parabel und die andern Kegelschnitte ein meisterhaftes Werk geschrieben hat; das älteste, was über die Kegelschnitte aus dem Alterthum zu uns gekommen ist. Von den höhern Parabeln, s. Parabel.

Apomecometria, die Kunst, die Entfernung eines Gegenstandes mittelbar zu messen. Der Ausdruck kommt kaum anders als in tabellarischen Abtheilungen der Materien in der Mathematik vor. Das Wort ist griechischen Ursprungs, zusammengesetzt aus ἀπο, von, ab, μηκος, Entfernung, Länge, und μετρειν, messen.

Aporema (Aporisma) ist bey einigen alten Geometern eine Aufgabe, deren Auflösung man nicht geben kann, ob es gleich auch nicht erweislich ist, daß sie unmöglich sey. Z. B. die Aufgabe von der Quadratur des Kreises. Das griechische Wort bedeutet eine aufgeworfene Frage, und Bedenklichkeit oder Verlegenheit. Marinus sagt in der Vorrede zu den Datis des Euklides, daß

Porimon ist, was man bewerkstelligen und construiren oder darstellen könne, aporimum sey das Entgegengesetzte, wie die Quadratur des Kreises, die man noch nicht gefunden habe, ob es gleich gewiß sey, daß sie gefunden werden könne.

Apothema, die senkrechte Linie von dem Mittelpuncte eines ordentlichen Vielecks auf eine Seite desselben. Von ἀπο und τίϑημι.

Apotome (Residuale, residuum binomiale) ist in der Arithmetik der Griechen der Unterschied einer rationalen und quadratischen irrationalen Zahl, oder zweyer solchen irrationalen Zahlen. Es seyn b, c rationale Zahlen, und $b - \sqrt{c} = a$, oder $\sqrt{c} - b = a$, oder auch $\sqrt{b} - \sqrt{c} = a$, so ist a eine Apotome. Das Wort bedeutet etwas abgeschnittenes, von ἀποτεμνειν. Euklides Elemente X. 74. Größen, wie $\sqrt{b}$, wenn b rational ist, heißen bey Euklides auch rationale, weil ihr Quadrat rational ist, aber nur in der Potenz mit einer als Einheit gegebenen Größe commensurabel, da b mit ihr, als Linie betrachtet, der Länge nach commensurabel ist.

Euklides unterscheidet sechs Gattungen der Apotome (Definitiones tertiae). Die erste Apotome ist, wenn $b - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b^2 - c)} : b = m : n$, dem Verhältnisse zweyer rationalen Zahlen ist. Die zweyte Apotome ist, wenn $\sqrt{c} - b = a$, und $\sqrt{(c - b^2)} : \sqrt{c} = m : n$ ist. Die dritte ist, wenn $\sqrt{b} - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b - c)} : \sqrt{b} = m : n$ ist. Die vierte ist, wenn $b - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b^2 - c)} : b$ nicht ein rationales Verhältniß ist. Die fünfte ist, wenn $\sqrt{c} - b = a$, und $\sqrt{(c - b^2)} : \sqrt{c}$ nicht ein rationales Verhältniß ist. Die sechste Apotome endlich ist, wenn $\sqrt{b} - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b - c)} : \sqrt{b}$ nicht ein rationales Verhältniß ist.

Die Apotomen unterscheiden sich von den Binomialen (quae ex binis nominibus) beym Euklides nur dadurch, daß in diesen letzteren die Summe genommen wird. Auch macht Euklides sechs Gattungen der Binomialen.

Die geometrische Behandlungsart der Binomialen und Apotomen beym Euklides ist sinnreich; nur muß man sich in seine Vorstellungsarten hinein studiren, welches wegen der Gewöhnung an unsere bequemere Rechnungsart mit irrationalen Größen Mühe macht. Die ersten algebraischen Schriftsteller in Europa haben sich mit der Erklärung der in dem 10ten Buche der Euklideischen Elemente vorgetragenen Lehre von den irrationalen Größen sehr viel beschäftigt. Es ist eine gute Übung, mit der Euklideischen Methode die neuere parallel gehen zu lassen.

Applicare, auf einander legen, bey Vergleichung ebener Figuren, ist, sie auf einander legen, um zu zeigen, daß sie gleich groß oder ungleich sind. Dieses Aufeinanderlegen ist eine bloße Vorstellung des Verstandes, wovon die sinnliche Darstellung nur ein Bild ist, wie alle gezeichneten Figuren nur Bilder sind, deren Originale ganz und gar in dem reinen Verstande allein sich befinden.

Applicare A ad B heißt bey ältern Schriftstellern, die Größe A durch die Größe B dividiren. Die Redensart hat ihren Ursprung aus der Geometrie. Eine geradlinichte Figur an eine Linie appliciren heißt über dieser Linie ein Rechteck oder Parallelogramm beschreiben, das jener Figur gleich ist (Eucl. Elem. VI. 25. ff. X. 23). Die Figur sey ein Rechteck, dessen Seiten a, b sind, die gegebene Seite sey c, so ist die zweyte Seite des Rechtecks, das jenem gleich ist, die vierte Proportional-Linie zu c, a, b, das ist $\frac{ab}{c}$. Das gegebene Rechteck an die gegebene Linie c zu appliciren erfordert also arithmetisch die Division desselben durch die Linie c.

Applicare lineam rectam in circulo vel curva ist eine gerade Linie in der krummen Linie so legen, daß sie mit ihren Endpuncten in den Umfang derselben falle, etwa in einen gegebenen Punct dieses Umfanges.

Applicate (Ordinate) ist eine gerade Linie, die in einer krummen Linie parallel mit einer gegebenen Linie an den Umfang zwischen zwey Puncten der krummen Linie gezogen, und nebst allen andern solchen Parallelen von einem Durchmesser der krummen Linie halbirt wird. Der Durchmesser heißt die Axe, wenn die Applicaten unter einem rechten Winkel geschnitten werden, sonst ein Durchmesser. Diese Erklärung giebt Apollonius in seinem Werke über die Kegelschnitte Die Neuern, als Euler, Cramer, nennen Applicate oder Ordinate eine gerade Linie, die von irgend einem Puncte einer krummen Linie unter einem bestimmten Winkel (am gewöhnlichsten einem Rechten) an eine der Lage nach gegebene gerade Linie, die Abscissenlinie, gezogen wird. Die Applicaten mögen auf beiden Seiten der Abscissenlinie gleich oder ungleich seyn; es mögen auf jeder Seite eine oder mehrere Applicaten, nach der Anzahl der Zweige der krummen Linie, vorhanden seyn, auf beiden Seiten gleich oder ungleich viele; auch auf einer Seite gar keine. Diese Abänderung des Begriffs der Applicaten war nöthig, um durch die Veränderungen in der Lage der Abscissenlinie und der Applicaten alle Verwandlungen der Gleichung, welche die Natur einer krummen Linie ausdruckt, zu erhalten, und daraus ihre Eigenschaften herzuleiten.

Approximatio, s. Näherung.

Arbelus, ein sichelförmiger Raum zwischen drey sich berührenden Kreisen. Es ist (Fig. 30. Tab. II.) ABC ein Halbkreis, auf dessen Durchmesser AC irgend ein Punct E genommen wird, um über AE und EC die sich einander und den erstern Kreis berührenden Halbkreise ADE, EFC zu beschreiben. Hierauf werde um den Mittelpunct G ein Kreis beschrieben, der jene drey Kreise berührt, ferner ein Kreis um H, der die Halbkreise ABC, ADE und den um G berührt, dann ein Kreis um J, der jene beiden, und den um H berührt, noch ein Kreis um K der die beiden erstern und den um J berührt, u. s. f. Von den Mittelpuncten dieser Kreise werden die senkrech-

ten auf AC gezogen, Gg, Hh, Ji, Kk, etc. so ist Gg gleich dem Durchmesser des Kreises um G; Hh dem Doppelten des Durchmessers des Kreises um H; Ji dem Dreyfachen des Durchmessers des Kreises um J; Kk dem Vierfachen des Durchmessers des Kreises um K, u. s. f. Den Beweis dieses Satzes liefert Pappus in Collect. math. L. V. propos. 16. Er sagt vorher, daß es ein alter Satz sey, der sich in einigen Büchern finde. Die berührenden Kreise, welche nach einander in dem Raume zwischen den drey Kreisen ADE, CFE, BDF auf gleiche Art wie jene beschrieben werden, haben dieselben Verhältnisse ihrer Durchmesser zu den Abständen ihrer Mittelpuncte von AC.

Das Wort Arbelus bedeutet im Griechischen ein gekrümmtes Messer, desgleichen sich die Schuster bedienen.

Archimedeische Spirallinie, s. Spirallinie.

Archimetria, eine Benennung für die Elementar-Geometrie, welche Weigel in der Philosophia mathematica derselben giebt, weil sie die Gründe enthält, nach welchen alle Größen gemessen werden können.

Area s. Flächenraum.

Arithmetik ist die Wissenschaft, welche sich mit den Formen und den Verknüpfungen der Zahlen beschäftigt, insbesondere zu dem Zwecke, die Erfindung des Unbekannten aus dem Bekannten oder Gegebenen daraus herzuleiten. Von dem griechischen Worte, ἀριθμος, Zahl.

Die gemeine Arithmetik enthält die leichtern Fälle der Verbindungen der Zahlen, und die praktischen Anwendungen. Jene sind die bekannten vier Species der Rechenkunst in ganzen und gebrochnen Zahlen, die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln, (gewöhnlich nur in mathematischen Lehrbüchern), die Lehre von den Proportionen, von den leichtesten Progressionen, und die Anweisung zum Gebrauch der Logarithmen, deren Berechnung aber in die mathematische Analysis gehört.

Die höhere Arithmetik begreift die Untersuchungen über die Eigenschaften der Zahlen, so fern sie allgemein, ohne Rücksicht auf ein besonderes Numerations-System betrachtet werden. Dahin gehören die Lehren in den vier arithmetischen Büchern der Euklideischen Elemente (s. Zusatz über die Arithmetik der Alten), die Zerfallung der ganzen Zahlen in Factoren und Aussonderung der Primzahlen, die Zerlegung einer ganzen Zahl in alle möglichen ganzen Theile, oder in Theile von einer gewissen Form als in Quadrate, in Trigonalzahlen; die continuirlichen Brüche (Kettenbrüche); die Untersuchungen über die Eigenschaften der Zahlen, und mancherley Formen derselben, wohin auch die befreundeten und vollständigen Zahlen gehören; die Verfertigung der magischen Quadrate, die Combinirung von Zahlenperioden, von welchen in der Chronologie eine Anwendung vorkommt, u. m. Diese machen einen Theil der mathematischen Analysis aus, eine höhere Arithmetik, welche die Größen als unbestimmte Zahlen betrachtet, und sie auch wie die gemeine Arithmetik mit einander verbindet. — Die Untersuchungen aus der höhern Arithmetik sind größtentheils in den akademischen Sammlungen zerstreut. Zwey neuere wichtige Werke sie betreffend sind: Essai d'une Théorie des nombres, par A. M. le Gendre, à Paris, An VI. und Disquisitiones arithmeticae, auctore C. F. Gauss. Lipsiae 1801.

Die theoretische Arithmetik hat zum Hauptzwecke, die Lehrsätze von den Verbindungen und Eigenschaften der Zahlen im Allgemeinen zu entwickeln und zu erweisen. Der Vortrag der Arithmetik in den mathematischen Lehrbüchern pflegt dahin gerichtet zu seyn, wo die Anwendungen nur zur Erläuterung dienen.

Die praktische, technische oder bürgerliche Arithmetik ist eine Anleitung zu der Kunst, sicher, bequem und geschwind in allen Fällen zu rechnen. Diese benenne man zur Unterscheidung mit dem deutschen Namen: Rechenkunst. Von dieser in dem Artikel: Rechenkunst.

Die numerische Rechenkunst (Arithmetica numerosa) lehrt die Rechnung mit bestimmten Zahlen, die auf die bekannte Art durch Zahlziffern ausgedruckt werden.

Die *Arithmetica speciosa* zeigt, wie Rechnungen, ohne Rücksicht auf eine bestimmte Zahlgröße, zufolge der Bedingungen der Aufgabe, durch allgemeine Symbole oder Zeichen gemacht werden. Vieta, der den Gebrauch der Buchstabenzeichen allgemein für alle Größen, sowohl bekannte als unbekannte, einführte, nannte dieselben Species, weil sie die Zahlgrößen im Allgemeinen, als Arten, darstellen. Die Juristen nennen ihre erdichteten allgemeinen Personen, als Cajus, Sempronius, ebenfalls Species, (s. Buchstabenrechnung.)

Allgemeine Arithmetik (Arithmetica universalis) ist der Titel eines schätzbaren elementarischen Werks einer höhern Gattung über Algebra und die Anwendung derselben auf die Geometrie, von Newton, welches er zum Leitfaden seiner Vorlesungen als Professor zu Cambridge gebraucht hatte. Die erste Ausgabe von 1707 zu Cambridge ist ohne Wissen des Verfassers veranstaltet; die zweyte 1722, ist von ihm verbessert. Diese hat 's Gravesande zu Leiden 1732 mit einigen Abhandlungen aus den Englischen Transactionen vermehrt abdrucken lassen. Eine mit vielen Anmerkungen versehene Ausgabe von J. Castillion ist zu Amsterdam 1761 in zwey Quartbänden herausgekommen.

Arithmetik des Unendlichen ist die Benennung, welche Wallis seiner Methode unendliche Reihen zu summiren gab. Das Werk, worin er diese sinnreiche Erfindung vortrug, erschien zu Oxford 1656. (200 S. in 4), und ist in dem ersten Theile seiner Werke befindlich, wo die Anzahl der Sätze dieselbe wie in der ersten Ausgabe ist. Wallis ist der erste, der in die Theorie der Reihen und ihre Summirung tiefer eindrang, da man vor ihm nur einzelne Fälle aufzulösen Mittel gefunden hatte. Er machte besonders davon Anwendung auf die Berechnung krummlinichter Flächen und körperlicher Räume. Seine Me-

thode, gewisse Reihen zu interpoliren, wodurch er zu einer merkwürdigen Formel für den Inhalt des Kreises gelangte, ist von einer ganz besondern Art. Doch giebt die Integralrechnung, welche mit der Differentialrechnung die allgemeinste Arithmetik des Unendlichen ist, leichtere und allgemeinere Methoden an, als die von Wallis gebrauchten, lehrt auch vieles, was durch diese nicht erreichbar ist.

Politische Rechenkunst ist die Anwendung auf Rechnungsfälle in der Verwaltung eines Staats. S. an ihrem Orte in der zweyten Abtheilung dieses Werks.

Arithmetik der Harmonie ist die Vergleichung der musikalischen Intervalle durch zugehörige Zahlen. S. Ton, Ton-Intervall, Tonleiter in der zweyten Abtheilung.

Errathende Rechenkunst (Arithmetica divinatoria) ist die Kunst durch Rechnung verschiedenes aus gewissen Angaben dem Scheine nach zu errathen. Sie dient bloß zur Belustigung, s. an ihrem Orte.

Logarithmische Arithmetik ist diejenige, nach welcher man sich der Logarithmen zur großen Abkürzung der Rechnung bedient. Diesen Titel führt der große Canon der Logarithmen von Vlacq, Gouda 1628 Fol. s. Logarithmen.

Tabularische Arithmetik, die Rechnung mit Hülfe mancherley Tafeln, als einer Tafel der Factoren zusammengesetzter Zahlen, der Primzahlen, der Vielfachen der Zahlen bis zum Neunfachen, der Quadrate, der Würfel, besonders der Logarithmen, und der trigonometrischen Zahlen, s. Tafel.

Instrumentale Arithmetik, die Rechnung vermittelst gewisser Werkzeuge. Dergleichen sind die Rechentafel oder der Abacus der Alten; die Rechenpfennige, die aufgereiheten Kugeln der Chineser, die Neperischen Rechenstäbe, Reihers Sexagenal-Stäbe, Scheffelts mechanischer Maaßstab und Rechenstab, verschiedene Arten von Rechenscheiben oder Rechenwalzen, besonders die Rechenmaschinen. Von allen diesen handelt der Artikel, Instrumentale Arithmetik.

Arithmetik der Brüche, s. Bruchrechnung.

Arithmetik der Irrational Zahlen. (Arithmetica Incommensurabilium s. Surdorum), s. Irrationalgrößen.

Arithmetik, dekadische oder decimale; dodekasche (Duodecimale); dyadische, pentadische sexagenale oder sexagesimale, tetradische. s. Zahlensystem, und die Artikel, Dekadik, Dodekadik, Dyadik, Pentadik, Sexagesimalrechnung, Tetraktys.

Geschichte der Arithmetik.

Wahrscheinlich ist von der Arithmetik, wie von mehreren Kenntnissen, der Ursprung bey den Indiern anzunehmen, allein es fehlt uns an Nachrichten darüber. Wir haben diesem Volke unsere Bezeichnungsart der Zahlen zu danken. Ägypten rühmte sich in der Arithmetik die Lehrmeisterinn anderer Nationen zu seyn, und nannte seinen Theut oder Thot als Erfinder der Arithmetik und Geometrie. Wie man in dem Alterthume die Erfindung der drey ältesten Wissenschaften, der Arithmetik, Geometrie und Astronomie, vertheilt habe, sieht man aus einer Stelle in dem Leben des Pythagoras von Porphyris, wo gesagt wird, daß dieser die mathematischen Wissenschaften von den Ägyptern, Chaldäern und Phöniziern der Sage nach erlernt habe. Denn die Ägypter hätten sich von uralten Zeiten her mit der Geometrie beschäftigt, die Phönizier mit Rechnen, die Chaldäer mit der Betrachtung des Himmels. Die Phönizier oder die Tyrier haben vermuthlich wegen ihrer Handlungsgeschäfte sehr früh mancherley Rechnungsregeln gefunden. Proklus sagt in seinem Commentar über das erste Buch des Euklides, daß bey ihnen wegen des Handels die wissenschaftliche Kenntniß der Zahlen ihren Ursprung genommen habe. Strabo führt dieses auch als die zu seiner Zeit gewöhnliche Meynung an.

Die Arithmetik der Alten hatte eine ganz andere Gestalt als die der Neuern. Allgemeine Untersuchungen über Verhältnisse und Formen der Zahlen hießen bey ihnen Arith-

metik; die Zahlenrechnung hieß Logistik. Ihre unbequeme Bezeichnungsart der Zahl erschwerte ihnen die Rechnungen sehr. Sie mußten die Rechnungen mehr im Kopfe machen, als wir es nöthig haben, und sich mit sinnlichen Hülfsmitteln helfen, dergleichen Steinchen und die Rechentafel (abacus) waren. Von den zum Rechnen gebrauchten Steinchen kommen im Lateinischen die Redensarten her, calculos ponere, subducere. Im Griechischen ist ψηφος ein Steinchen, und ψηφιζειν, rechnen, wofür aber auch noch ein anderes Wort vorhanden ist.

Die Alten haben sich vorzüglich mit den Formen und Verhältnissen der Zahlen beschäftigt. Sie betrachteten Arithmetik und Geometrie als bloße beschauliche Gegenstände, ohne auf ihre Anwendungen in bürgerlichen Geschäften zu denken, oder wenigstens einen Werth darauf zu legen. Die ägyptischen Priester oder Gelehrten scheinen den Eigenschaften der Zahlen sehr nachgespürt, und darin geheime Beziehungen auf die Einrichtungen der Welt gesucht, oder daraus eine geheime Zeichensprache gebildet zu haben, um den Uneingeweihten ihre Kenntnisse zu verstekken, und dadurch ehrwürdiger zu machen. Denn Pythagoras, der sich in der ägyptischen Gelehrsamkeit hatte unterrichten lassen, und seine Nachfolger, webten in den Vortrag ihrer Philosophie, wenigstens für die exoterischen Schüler oder Liebhaber, vieles Symbolische aus der Arithmetik ein. (Proclus in primum libr. Eucl. I. c. 8.) Als der wahre Sinn, den die Eingeweihten der ältern Schule gekannt hatten, verloren gegangen war, mögen die späteren Anhänger dieser Partey die arithmetischen Einkleidungen wörtlich genommen und mit spitzfindigen, phantastischen Einfällen vermehrt haben, wie es in andern Fällen auch gegangen ist. Galilei glaubt (Syst. cosm. p. 3.), daß die Pythagoräer ihre mystischen arithmetischen Lehren nur dem großen Haufen hingeworfen hätten, um ihre Kenntnisse von den tiefern Eigenschaften der Zahlen und Irrationalgrößen sicherer geheim zu halten, deren Bekanntmachung unter Androhung harter Strafen in der künftigen Welt verboten gewesen sey.

Die Pythagoräer haben mancherley Formen der Zahlen erdacht, die Polygonalzahlen (als dreyeckige, viereckige u. s. f.) und die Pyramidalzahlen; die ebenen und körperlichen; die vollkommenen oder vollständigen, und ihr Gegentheil, die überschießenden und mangelhaften Zahlen. Es war dies eine Verknüpfung der Arithmetik mit der Geometrie. Durch den nach Pythagoras genannten geometrischen Lehrsatz kamen sie auf die Frage, ein Zahlenquadrat mit rationaler Wurzel aus zwey solchen Quadraten zusammenzusetzen, wovon sie auch die Auflösung fanden, welche Proklus in seinem gedachten Commentar uns aufbehalten hat. Sie haben also den Grund zu der unbestimmten Analytik gelegt.

Diese Philosophen erfanden auch die Berechnung der musikalischen Verhältnisse, welche sich auf feine Beobachtungen und Vergleichungen gründet. Die Entdeckung wird dem Pythagoras selbst zugeschrieben. Die Lehre von der Zusammensetzung und Theilung der Verhältnisse mußte ihnen dazu sehr geläufig seyn, da hier einige kleine Unterschiede in den Intervallen vorkommen. Ein gewisses kleines Intervall heißt noch jetzt das pythagorische Komma, (s. Ton, in der zweyten Abtheilung).

Der Nachricht des Boëthius (in seiner Geometrie, am Ende) zufolge haben die Pythagoräer eine Bezeichnung der Zahlen, wie die unsrige ist, gehabt, und mit diesen Zahlzeichen gerechnet. Er nennt ihre Zeichen Apices vel Characteres. Pythagoras, oder einer seiner Nachfolger, muß die Bezeichnungsart von den Indiern bekommen haben, da es nicht möglich ist, daß die Indier sie von einer kleinen Anzahl geheimnißvoller Menschen sollten erhalten haben. In dem Artikel, Zahlzeichen, wird hievon umständlicher gehandelt werden.

Die Rechnung mit Zahlen machte den Alten viele Mühe, weil sie unsere Bezeichnung nicht hatten. Archimedes konnte die Berechnung des Umfanges eines Kreises nicht weiter treiben, als bis zu den Gränzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, den Durchmesser zur Einheit genommen. Um eine gewisse sehr große Zahl auszudrucken, nahm er eine geometrische

Fortschreitung an, theilte die Glieder derselben in Classen, und bezeichnete die Zahl durch die Classe und die Stelle in derselben. Seine Sprache gab ihm nur Zahlwörter bis Zehntausend. Ptolemäus berechnete die Chorden der Winkel nur von halben zu halben Graden, und nicht weiter als bis auf $\frac{1}{3600}$ des Halbmessers, den er in 60 Theile theilte.

Es sind wenige Schriften der Alten über die Arithmetik vorhanden. Die von Euklides und Diophantus sind die einzigen wichtigen, wozu man noch zwey Schriften des Archimedes, eine über die Ausmessung des Kreises, und eine, die eine gewisse Berechnung enthält, als Beyspiele ihrer numerischen Arithmetik nehmen kann. Im ersten Jahrhundert oder später schrieb Nikomachus verschiedene arithmetische Bücher, unter diesen eine Einleitung in die Arithmetik, die griechisch zu Paris 1538 gedruckt ist. Sie handelt von den Eigenschaften und Formen der Zahlen, nach der bey den Pythagoräern und Platonikern beliebten Art, daher auch diese Schrift fünf Commentatoren gehabt hat. Die praktische Arithmetik dieses Verfassers ist verloren gegangen, welche uns über die Art, wie die Alten bey weitläufigen Rechnungen sich halfen, vielleicht Licht gegeben hätte. Nikomachus hat auch über die geheimen Beziehungen der Zahlen ein Buch unter dem Titel, Theologumena Arithmetices, (griechisch) geschrieben, welches nicht mehr vorhanden ist, dagegen ein anderes, unter demselben Titel, zu Paris 1543 gedruckt worden, für dessen Verfasser Jamblichus gehalten wird. In den beiden ersten Büchern der mathematischen Sammlungen von Pappus scheint einiges von dem Verfahren der Alten beim Multipliciren großer Zahlen enthalten gewesen zu seyn, wie man aus einem kleinen Überbleibsel schließen mag. Diophantus hat ausser seinem großen arithmetischen Werke auch ein Werk über die praktische Arithmetik geschrieben, das aber verloren ist. Sein großes Werk, wovon nur die erste Hälfte vorhanden ist, enthält die Lehre von den Gleichungen des ersten und zweyten Grades, und

sehr feine Untersuchungen über gewisse Formen der Zahlen, zur unbestimmten Analytik gehörig, (s. Algebra und unbestimmte Analytik.). Zu diesem Werke gehört noch eine scharfsinnige Abhandlung über die Polygonal-Zahlen. Im sechsten Jahrhundert schrieb Boethius zwey Bücher von der Arithmetik, welche das Werk des Nikomachus mit Abkürzungen und Verbesserungen enthalten.

Nach der Einführung der jetzt gebräuchlichen Zahlzeichen in Europa, die um das Ende des zehnten Jahrhunderts geschah, (s. Zahlzeichen) änderte sich die ganze Gestalt der Arithmetik, wiewohl langsam In England beförderte ihre Verbreitung Johannes de Sacro-Bosco (von Holywood, dem jetzigen Hallifax) durch sein Buch, Algorismus seu Arithmetica introductio, die zu Venedig 1523 gedruckt erschienen ist. Dieser zu seiner Zeit und noch lange nachher sehr berühmte Mann starb 1256. Seines Zeitgenossen, des Jordanus Nemorarius, Werk über die Arithmetik ist eine theoretische Abhandlung nach der alten Form. Es ist 1496 zu Paris, und 1514 daselbst, ganz mit gothischer Schrift, gedruckt. Barlaam aus Calabrien, im 14ten Jahrhundert, schrieb eine Arithmetik, worin er ihre gewöhnlichen Operationen erwies. Das Werk ist 1600 zu Paris griechisch und lateinisch herausgegeben. Am Ende des 15ten Jahrhunderts trug der Minorit, Lucas Pacioli dal Borgo san Sepolcro aus den vorhandenen Schriften über die Arithmetik, Algebra und Geometrie ein Werk zusammen, das die damahligen Kenntnisse in der Arithmetik ziemlich zu enthalten scheint, (s. Algebra). Neben der theoretischen Lehre ist auch vieles von der kaufmännischen Rechnung darin enthalten.

Im 16ten Jahrhundert pflegte man noch die Rechnung mit Marken (Rechenpfennigen) auf und zwischen parallelen geraden Linien der Rechnung mit Ziffern zuzugesellen, daher man in diesem Zeitraume mehrere Rechenbücher antrifft, welche beide Rechnungsarten lehren, als des Adam Rise Rechnung auf den Linien und Federn, welches lange Zeit ein classisches Buch gewesen ist; Simon Jacob von Coburgk Rechenbuch auf den Linien und mit

Ziffern, 1557. u. m. Die Beweise des Verfahrens bei Rechnungen mit Ziffern wurden nicht so ausführlich gegeben, als jetzt gewöhnlich ist, weil es sich aus dem mit Rechenmarken leicht ergab. Die Beweise wurden überhaupt gewöhnlich weggelassen. Bey Vergleichung und Zusammensetzung der Verhältnisse berief man sich auf Euklides Elemente In Stifels Arithmetica integra, einem vorzüglichen Werke aus dem 16ten Jahrhundert, findet man die ersten Begriffe von Logarithmen, auch die Binomialcoefficienten, und die magischen Quadrate. Die letztern sind zwar älter, da Emanuel Moskopulus im 14ten oder 15ten Jahrhundert ein Buch darüber verfaßt hat; sie werden aber noch bis zu Stifels Zeit wenig bekannt gewesen seyn.

Dem 16ten Jahrhundert verdankt man die ausführliche Berechnung der trigonometrischen Linien, welche große Gewandtheit in der Rechnung mit Irrationalgrößen, und Aufmerksamkeit auf Rechnungsvortheile, bey den damahligen weitläufigen Methoden dieser Rechnung erforderte. Die Regeln, welche man in den Rechenbüchern jener Zeit für die Annäherung zu irrationalen Wurzeln antrifft, sind noch unbequem, oder lassen es bey einer sehr mäßigen Annäherung bewenden. William Buckley in England, der um 1550 gestorben seyn mag, gab die Regel, dem Quadrat sechs Nullen anzuhängen, und die gefundene Würzel durch 1000 zu dividiren.

Die Anwendungen der Rechenkunst auf Geschäfte des gemeinen Lebens bestanden zu dieser Zeit in der Regel de Tri, de Quinque, 2c. der Kettenregel, der Gesellschaftsrechnung, Alligationsrechnung, zusammengesetzter Zinsrechnung. Die Kettenregel trifft man in des Peter Apianus (1527 und 1543), und in Simon Jacob von Coburgk Rechenbuche an. Der letztere sagt, sie könne gründlich durch compositionem proportionum erwiesen werden, welches er der Kürze wegen unterlasse. Kästner hat die Kettenregel bey den Rechenmeistern des 16ten Jahrhunderts nicht angetroffen. Geschichte der Mathematik. Th. I. S. 54.

Die Decimalrechnung war in der That bey der von Regiomontanus gemachten Einrichtung der trigonometrischen Tafeln gebraucht. Ramus bediente sich ihrer in seiner Arithmetik (1550), aber Simon Stevin war der erste, der sie in einer besondern Schrift, la Pratique d' Arithmetique 1585. empfahl. Seit dieser Zeit ward sie in den arithmetischen Anweisungen gewöhnlich gelehrt, wenn man gleich im gemeinen Leben bey den hergebrachten Eintheilungen eines Ganzen bleiben mußte. Die Absonderung der Bruchtheile von den Ganzen durch ein Komma oder einen Punct, wie sie jetzt geschieht, gebraucht Stevin nicht, sondern giebt jeder Stelle einen eigenen Namen, Prime, Secunde, u. s. f. und setzt die Zeiger derselben in Kreisen eingeschlossen neben den Ziffern hin, den Zeiger Null für die Ganzen genommen. Beyer in seiner Logistica decimali, 1619, setzte dafür die Zeiger o, ', '', ''', an die Spitze der Ziffern.

Im Anfange des 17ten Jahrhunderts berechneten Neper, Briggs und Vlacq die Logarithmen. Der scharfsinnige Fermat in Frankreich fand manche versteckte Eigenschaft der Zahlen. Die Analysis, welche nun immer mehr erweitert ward, verschaffte auch der Zahlenrechnung Erleichterungen und Bereicherungen, als bey der Ausziehung der Wurzeln durch den binomischen Lehrsatz für gebrochne Exponenten, bey Summirungen von Zahlenreihen, beym Interpoliren einer Reihe gegebener Größen, in der zusammengesetzten Zinsrechnung, in der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bey Spielen, der Leibrenten, u. m. Die Geschichte der höhern Arithmetik ist in der neuern Zeit mit der Geschichte der Analysis verbunden.

Zusatz.

Über die Arithmetik der alten Griechen.

Ein interessantes Werk über die theoretische Arithmetik, in der Bedeutung bey den Alten, sind die vier

arithmetischen Bücher des Euklides, das siebente bis zehnte seiner Elemente. Das zehnte enthält die Arithmetik der Irrationalgrößen, wovon unter diesem Artikel sich ein Abriß befindet. Die drey andern enthalten Lehrsätze über die Proportionen, die Primzahlen, die Quadrate, die Würfelzahlen, und die Producte aus zwey oder drey Zahlen. Euklides hat zwar schon das fünfte Buch ganz der Lehre von den Proportionen gewidmet; allein da geschah es in Rücksicht auf die Geometrie. Die proportionalen Größen werden nicht alle als gleichartige angesehen, weil in der Geometrie Verhältnisse einer Gattung von Größen (z. B. Flächen) mit Verhältnissen einer andern Gattung (z. B. Linien) verglichen werden. In der Arithmetik sind alle proportionalen Größen als Zahlen gleichartig; daher es für diesen Fall noch Sätze über die Proportionalität giebt, die dort nicht vorgetragen werden konnten. Auch giebt Euklides hier eine andere Erklärung der Proportionalität als im 5ten Buche, nämlich gerade die, welche die Neuern größtentheils gebrauchen. Denn Zahlen sieht er immer als rationale Größen an. Jene Erklärung begreift auch den Fall irrationaler Verhältnisse, (s. Proportion). Euklides zeigt (**VII. 13**) daß, wenn A: B = C : D ist, daraus A : C = B : D folgt, und (VII. 14.), daß, wenn A : B = D : E, und B : C = E : F ist, daher A : C = D : F wird. Jener Satz setzt voraus, daß alle Größen in der Proportion gleichartig sind; der andere Satz zwar nicht, allein in dem Beweise, der hier gebraucht wird, wird es angenommen. Derselbe Satz ist der 22ste des 5ten Buchs, wo die Gleichartigkeit nicht vorausgesetzt wird. So hat Euklides hier (VII. 19.) den Satz, daß in einer Porportion das Product der äussern Glieder gleich ist dem Producte der beiden mittlern. In der Geometrie kommen nach der Methode der Alten keine Producte von Linien, oder von Linien in Flächen vor. Euklides lehrt hier (VII. 35.) die kleinsten Zahlen finden, welche mit mehrern gegebenen Zahlen einerley Verhältniß haben. Ferner (**VIII. 2.**) mehrere Verhältnisse, die in den kleinsten Zah-

len gegeben sind, in andere an einander hangende zu verwandeln, als A : B ; C : D ; E : F in die a : b ; b : c ; c : d, die folgweise jenen gleich sind. Vieles von Primzahlen, doch nicht von den Kennzeichen derselben, sondern von den Eigenschaften derselben bey Producten und Verhältnissen z. B. (VII 28.) sind zwey Zahlen, A, B, zu jeder von zwey andern, C, D, Primzahlen, so sind auch die Producte, E, F, aus den erstern und aus den letztern, Primzahlen zu einander. Und (VIII. 3.), von mehreren stetig proportionirten kleinsten Zahlen A, B, C . . . N sind die äussersten, A, N, Primzahlen zu einander. Ein Product zweyer Zahlen nennt Euklides eine Flächenzahl, ein Product aus drey Zahlen eine Körperzahl. Durch diese Benennung ward eine Verbindung zwischen der Arithmetik und Geometrie erhalten, daher wir noch die zweyte und dritte Potenz einer Zahl Quadrat und Cubus nennen, so wie Euklides es thut. Er hat auch ähnliche Flächen und Körperzahlen deren Factoren proportionirt sind. Der 35ste Satz IX. lehrt eine geometrische Progression summiren, wovon gleich im 36. S. eine Anwendung gemacht wird. Dieser ist folgender: Nimmt man so viele von der Einheit an stetig verdoppelte Zahlen 1, A, B, C, D, bis deren Summe eine Primzahl, E, wird, so ist das Product aus solcher Summe und der letzten jener Zahlen, D, eine vollständige Zahl (numerus perfectus), d. i. eine solche, welche allen ihren Theilen zusammen genommen gleich ist, wie 496, (s. vollständige Zahl). Dieser merkwürdige Satz beschließt das neunte Buch. Das siebente machte den Anfang mit einer praktisch brauchbaren Anweisung, für zwey oder mehrere gegebene Zahlen das größte gemeine Maaß zu zu finden.

Vom Archimedes ist eine kleine Schrift übrig, ψαμμιτης, die Sandberechnung, worin die Anzahl der Sandkörner berechnet wird, die in dem Raume um die Erde bis an die Bahn der Sonne, und in dem Raume bis zu der Sphäre der Fixsterne, nach den damahligen Begriffen, Platz haben können. Diese große Zahl durch Worte

auszudrücken, theilt er die Progression der Zehnfachen von der Eins an, 1 : 10 : 100 : 100 : 10000; etc. in Classen von je acht Gliedern, (Octaden). Da die Griechen für die Zahl 10000 ein besonderes Wort, Myrias, haben, so zählt er von der Myrias an bis zu der Myrias von Myriaden. Diese ist der Einer der zweyten Classe, deren achte Zahl nach unserer Benennungsart die 15te Potenz der 10 ist. Die dritte Octas geht von der 16ten bis mit zur 23sten Potenz der 10. Nun bezeichnet er jede Zahl der ganzen Reihe durch die Zahl der Octas und die Stelle des Gliedes in derselben. Die Absicht des Archimedes ist zu zeigen, daß die Zahl des Sandes in jedem Raume zählbar ist, welches gewisse Leute damahls nicht glauben wollten. Er nimmt also in einem Mohnkorne 10000 Sandkörnlein an, und setzt, daß 40 Mohnkörner nur einen Zoll (dactylus) der Länge nach einnehmen, ob es gleich wirklich nur 25 sind. Hieraus berechnet er die Menge der Sandkörner in einer Kugel von einem Zoll im Durchmesser, nämlich 640 Millionen nach unserer Benennung, wofür er 10 der zweyten Octas nimmt. Nun berechnet er folgweise die Anzahl der Sandkörner von Kugeln, deren Durchmesser hundertfach größer werden. Statt 10000 Zoll nimmt er ein Stadium, welches kleiner ist als jene Länge. Den Durchmesser der Welt, das ist der Sonnenbahn, setzt Archimedes kleiner als 10000 Durchmesser der Erde, und den Durchmesser der Erde kleiner als 10000. 10000. 100 Stadien. Hieraus folgert er nun, daß die Menge Sandkörner in der ganzen Weltkugel kleiner seyn würde als 1000 Einer der 7ten Octas, (kleiner als 10^{51}). Nach Aristarchus Schätzung, sagt Archimedes, verhalte sich die Sphäre der Firsterne zu der Welt wie diese zur Erde. Die Zahl des Sandes, welcher diese Sphäre ausfülle, sey also kleiner als tausend Myriaden aus der achten Octas, (10^{63}), welche die 64ste Stelle in der Reihe von Eins an einnehmen.

Die Schrift des Archimedes über die Kreismessung ist nicht bloß wegen des Inhalts selbst, sondern auch wegen der dabey angewandten Rechnung mit irrationalen

Zahlen merkwürdig. Es kam darauf an, das Verhältniß $\sqrt{3} : 1$ zwischen zwey andern einzuschließen, von welchen das eine ein wenig größer, das andere ein wenig kleiner ist. Für das umschriebene Vieleck gebraucht Archimedes das Verhältniß 265 : 153; für das eingeschriebene das 1351 : 780. Man sieht nicht gleich, warum er gerade diese gewählt hat; und sein Commentator, Eutocius, fügt auch nichts hierüber hinzu. Durch die Rechnung mit Kettenbrüchen findet man, daß das erstere Verhältniß durch keine kleinern Zahlen mit drey Ziffern, und das andere durch keine kleinern Zahlen mit vier Ziffern genauer dargestellt werden kann. Archimedes mag in einer Tafel der Quadrate ganzer Zahlen diejenigen ausgesucht haben, deren Dreyfaches sehr nahe ein Quadrat ist. Solche Quadrate sind die von 153 und 780. Daß er sie auf die Art, wie de Lagny (Mem. de l' Acad. des Scienc. 1723) ihn sie finden läßt, entdeckt hätte, möchte man bezweifeln. Das Verfahren ist zu künstlich für den Zustand der alten Arithmetik.

Wenn das algebraische Räthsel, welches Lessing in einer griechischen Handschrift auf der Wolfenbüttelschen Bibliothek gefunden hat, vom Archimedes oder einem seiner Zeitgenossen herrührt, wie das eine oder das andere die Aufschrift besagt, so müßte man schon zu seiner Zeit nicht allein Mittel gehabt haben, weitläufige Zahlenrechnungen zu machen, sondern auch allgemeine Rechnungsarten und selbst die unbestimmte Analytik gekannt haben. Aus den beiden angeführten Schriften des Archimedes sieht man aber, daß die Zahlenrechnungen große Mühe verursachten. Die allgemeinen Rechnungen wurden von den Alten durch Hülfe geometrischer Constructionen gemacht, wie es auch von Archimedes geschehen ist. Wahrscheinlich ist jene Aufgabe von einem viel spätern Rechner, der schon die dekadische Arithmetik kannte, abgefaßt worden. Um Aufmerksamkeit zu erwecken, schrieb er sie dem Archimedes zu, der sie an die Liebhaber solcher Untersuchungen zu Alexandrien in einem Briefe an Eratosthenus gesandt haben sollte. Sie ist in Versen abgefaßt, wie es mit

solchen Aufgaben einmahl Sitte war. Der Verfasser einer in der gedachten Handschrift beygefügten Auflösung hat zwar richtige Verhältnißzahlen für die acht gesuchten Größen angegeben, aber nicht, wie er zwar behauptet, die beiden Bedingungen erfüllt, daß die Summe zweyer unter ihnen das Quadrat einer ganzen Zahl, und die Summe zweyer andern eine Trigonalzahl seyn sollte. Die letztere Bedingung macht die Auflösung schwer. Lessings Beyträge zur Geschichte und Litteratur, 2ter Beytr. S. 421 ff.

Ein Platonischer Philosoph, Theon von Smyrna, der im ersten Jahrhundert gelebt haben mag, hat ein Buch geschrieben, worin er mathematische Begriffe und Lehren erklärt, die zum Verständniß der Platonischen Schriften dienlich sind. Bouillaud hat das davon übrig gebliebene Stück, welches die Arithmetik und Musik betrifft, mit einigen wenigen Bemerkungen aus der Geometrie, griechisch und lateinisch herausgegeben: Theonis Smyrnaei eorum, quae in Mathematicis ad Platonis lectionem utilia sunt, expositio. Edidit Ismael Bullialdus. Lutet. Paris. 1644. 4. Das wichtigste darin sind die Berechnungen der musikalischen Verhältnisse. Zuerst werden die verschiedenen Formen der Zahlen aufgeführt; gerade, ungerade; einfache (Primzahlen), zusammengesetzte; Producte nach Verschiedenheit der Factoren; Triangularzahlen, Quadrate, Pentagonalzahlen, und dergleichen. In dem Buche von den musikalischen Verhältnissen, mehrerley von Verhältnissen, Proportionen und den verschiedenen Mittelzahlen. Einige Spielereyen von Anwendungen der Zahlen auf ganz andere Dinge, und unnütze Bemerkungen, z. B. daß Drey die erste Zahl ist, die Anfang, Mittel und Ende hat; daß Sieben unter den ersten 10 Zahlen diejenige ist, die aus keiner entsteht, und keine hervorbringt. Die Verbindung der vier ersten ganzen Zahlen, 1, 2, 3, 4, die Tetraktys, war den Pythagoräern sehr heilig, weil sie die vollkommensten Consonanzen in der Musik, nach ihrem System, enthält, nämlich die Octave (2 : 1), die Doppel-Octave (4 : 1), die Quinte (3 : 2), die Quarte (4 : 3).

Daher sahen sie sie auch als ein Bild der ganzen Welt an; daher auch ihre Eidesformel: Bey dem, der uns die Tetraktys lehrte, die Quelle der unvergänglichen Natur.

Arithmetisch ist, was eine Beziehung oder Verknüpfung von Zahlen anzeigt oder begreift, als arithmetisches Complement eines Logarithmen, arithmetisches Dreyeck, Mittel, arithmetische Progression oder Reihe, Proportion Scale, Verhältniß. Man sehe theils die folgenden Artikel, theils die Artikel, Complement, Mittel, Proportion, Verhältniß.

Arithmetisches Dreyeck ist eine Anordnung von arithmetischen Reihen jeder Ordnung von der niedrigsten an, folgender Gestalt,

O.	1								
I.	1 .	1 .							
II.	1 .	2 .	1 .						
III.	1 .	3 .	3 .	1 .					
IV.	1 .	4 .	6 .	4 .	1 .				
V.	1 .	5 .	10 .	10 .	5 .	1 .			
VI.	1 .	6 .	15 .	20 .	15 .	6 .	1 .		
VII.	1 .	7 .	21 .	35 .	35 .	21 .	7 .	1 .	
VIII.	1 .	8 .	28 .	56 .	70 .	56 .	28 .	8 .	1 .
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	O.	I.	II.	III.	IV	V.	VI.	VII.	VIII.

Die Unterschiede der Zahlen in jeder verticalen Reihe sind die Zahlen der nächst vorhergehenden. Daher ist die Reihe I. eine arithmetische der ersten Ordnung, die Reihe II. eine arithmetische der zweyten Ordnung, die Reihe III. eine solche der dritten, u. s. f. Bezeichnet man die Ordnung einer Reihe durch m, so daß die erste Reihe der

gleichen Einheiten von der Ordnung o sey; und den Abstand der horizontalen Reihe, in welcher sich ein Glied einer verticalen Reihe befindet, von der ersten horizontalen, in welcher sich nur ein einziges Glied befindet, durch n, so ist das mte Glied der nten horizontalen Reihe =

$$\frac{n.\ n-1.\ n-2\ \ldots\ n-m+2.\ n-m+1.}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ \ldots\ \ m-1.\ \ m}$$

So ist z. B. das 5te Glied der 8ten horizontalen Reihe $= \frac{8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$. Dieses folgt aus §. 7 des Artikels: arithm. Reihen höherer Ordn.

Die Zahlen einer horizontalen Reihe, sind die Binomial-Coefficienten in der Potenz $(a + b)^n$, (s. binomischer Lehrsatz.)

Jede Zahl in dem Dreyecke zeigt die Menge der Combinationen an, welche von je m verschiedenen Dingen aus einer Anzahl, n, derselben gemacht werden können. Z. B. aus 8 verschiedenen Karten können je 2 genommen werden 28 mahl, je 5 . . . 56 mahl. (Combination, 15.).

Pascal wird gewöhnlich als der Erfinder des arithmetischen Dreyecks angesehen. Es kommt aber schon in Girards Algebra vor, wie in dem Artikel, Algebra, angeführt ist. Pascal hat eine besondere Schrift darüber im Jahre 1665 herausgegeben, die er aber schon um das Jahr 1653 ausgearbeitet haben mag. Einige Fragen über die Glücksspiele veranlaßten ihn zu Untersuchungen über die Combinationen, und diese führten ihn zu der Anordnung der Combinationszahlen in Form eines Dreyecks, wodurch er verschiedene Aufgaben über die Wahrscheinlichkeiten in Spielen auflösete. Hutton erinnert in seinem Wörterbuche der Mathematik und Physik, daß Pascal nicht der Erfinder dieser Zahlentabelle sey, sondern daß ihre Eigenschaften schon einige hundert Jahre vor ihm in Schriften vorkommen, und beruft sich wegen des Erweises dieser Behauptung auf seine mathematical Tracts,

vol. 1. p. 68. Figurirte Zahlen (das sind die in jeder verticalen Columne) waren, wie Kästner (Geschichte der Mathematik I. S. 123) sagt, schon lange vor Stifel bekannt. Dieser scheint aber in ihnen die Binomial-Coefficienten für Potenzen mit ganzen Exponenten gefunden zu haben. Pascal hat von den figurirten Zahlen zuerst Gebrauch gemacht, die Menge der Combinationen von m Dingen aus einer Anzahl n derselben bequem zu finden.

Arithmetische Reihe oder **Progression** ist eine Folge von Größen, deren jede von der vorhergehenden um eine gegebene Größe unterschieden ist. Je drey auf einander folgende machen eine zusammenhangende (stetige) arithmetische Progression aus. Z. B. die Reihe der natürlichen Zahlen, der geraden, oder ungeraden.

1. Das erste Glied eines Stücks einer arithmetischen Reihe heiße a; der Unterschied von dem folgenden sey $\pm d$; das xte Glied der Reihe sey $= y$, so ist $y = a \pm (x-1) d$. Dieses ist das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe.

2. Wenn der Unterschied d additiv ist, so ist die Reihe **zunehmend** oder wachsend; ist d subtractiv, so ist die Reihe **abnehmend**. Die Reihe bricht nicht ab, wenn in dem letztern Falle $(x - 1) d$ größer als a ist. Vielmehr machen die beiden Reihen, worin das Glied a und der Unterschied d gemeinschaftlich sind, das Vielfache des Unterschiedes aber entgegengesetzte Vorzeichen hat, eine einzige Reihe aus, in welcher die Glieder einen gemeinschaftlichen Unterschied haben. Diejenigen Glieder, worin $(x - 1) d$ größer als a ist, und das Vorzeichen — hat, haben die absolute Quantität $(x - 1) d - a$, bekommen aber das Vorzeichen —, wodurch sie als Größen angesehen werden, die kleiner sind, als die mit + bezeichneten, worin $(x - 1) d$ kleiner als a oder auch additiv ist, weil sie diesen nur durch die Addition einer gewissen Größe gleich werden. Bey benannten Größen bezeichnet das Vorzeichen — eine besondere entgegengesetzte Qualität, als, bey Linien und Winkeln entgegengesetzte Lage, bey

Bewegung entgegengesetzte Richtung, bey Geldposten Vermögen und Schuld. Z. B. wenn die Reihe, 9, 13, 17, 21 etc. in entgegengesetzter Folge fortgesetzt wird, so haben wir die Reihe . . . + 13, + 9, + 5, + 1, — 3, — 7, — 11, — etc. wo — 3 um 4 kleiner ist als + 1, indem bey der Addition von 4 zu — 3 sich + 3 gegen — 3 heben, (s. entgegengesetzte Größen).

3. Jede arithmetische Reihe geht also in entgegengesetzter Folge der Glieder, von irgend einem Gliede an, ohne abzubrechen, fort. Für dieses Glied ist der **Stellenzeiger** (Index) oder der Werth von x = 0. Man nenne es deshalb das **Anfangsglied**, indem es beiden, in entgegengesetzter Folge fortlaufenden Reihen gemeinschaftlich ist, und unterscheide es von dem **ersten Gliede**, dessen Stellenzeiger = 1 ist. Dieses letztere ist = a; jenes, das Anfangsglied, ist = a ± d. Diejenigen Glieder, für welche x positiv ist, sehe man als die **vorwärts** geordneten, diejenigen, für welche x negativ ist, als die **rückwärts** liegenden an, der Unterschied d mag positiv oder negativ seyn. Es können zu positiven Stellenzeigern negative Glieder der Reihe, und umgekehrt gehören. Z. B.

Stellenzeiger

etc. − 4; − 3; − 2; − 1; − 0; + 1; + 2; + 3; + 4; etc.

Glieder

etc. − 7, − 3; + 1; + 5; + 9; + 13; + 17; + 21; + 24; etc.

oder

etc. + 9; + 5; + 1; − 3; − 7; − 11; − 15; − 19; − 23; etc.

Das Anfangsglied in der erstern Reihe ist + 9, in der zweyten — 7; die erstere ist eine zunehmende, die andere eine abnehmende Reihe.

4. Wenn in einer arithmetischen Reihe die Glieder, deren Stellen 0, n, 2n, 3n, etc. — n, — 2n, 3n, etc. sind, ausgehoben werden, so machen diese unter sich eine

arithmetische Reihe aus; in welcher der Unterschied zweyer nächsten Glieder = n d ist, wenn er in der ursprünglichen Reihe = d ist. Die Anzahl der ausgelassenen Glieder zwischen zwey nächsten Gliedern der neuen Reihe ist = n — 1.

5. Auf umgekehrte Art kann man in der ursprünglichen Reihe zwischen je zwey Glieder n — 1 Glieder einschieben, deren gemeinschaftlicher Unterschied $= \frac{1}{n} d$ ist. Das erste derselben nach dem Anfangsgliede ist $= a - d + \frac{1}{n} d$, und das erste vor demselben $= a - d - \frac{1}{n} d$, wo d auch das entgegengesetzte Vorzeichen haben mag.

6. Man verstehe unter d sowohl eine positive als negative Größe; die Summe von x Gliedern, von dem ersten a, bis zu dem xten, sey = s, das xte Glied = y, so ist

I. $y = a + (x - 1) d$

II. $s = \frac{1}{2}(a + y) x = \frac{1}{2}(2a + (x - 1) d) x$.

Denn man setze die Glieder der Reihe in umgekehrter Ordnung unter dieselbe,

$a, a + d, a + 2d, \ldots y - 2d, y - d, y$

$y, y - d, y - 2d, \ldots a + 2d, a + d, a,$

so erhält man durch die Addition beider Reihen x Paare Größen, deren jede $= a + y$; also $2s = (a + y) x = (2a + (x - 1) d) x$.

Z. B. $1 + 5 + 9 + 13 \ldots + 401 = \frac{1}{2}. 402. 101 = 20301$.

7. Der Satz gilt auch, wenn d negativ ist, und wenn das erste oder das letzte Glied negativ ist, z. B. $21 + 17 \ldots - 7 - 11 = \frac{1}{2}. 10. 9 = 45$

8. Im bürgerlichen Leben kommen einige Anwendungen der arithmetischen Progression vor. An einem Walmendache nimmt die Anzahl der Ziegel jeder Reihe in ei-

ner solchen Fortschreitung von oben nach unten zu. An der schmalen Seite ist zu oberst ein Ziegel, an der breiten ist das Anfangsglied der Reihe die Zahl der Ziegel auf der Forst. — Wenn ein Brunnen gegraben wird, so pflegt jede Elle nach Maaßgabe der Tiefe bezahlt zu werden, so daß der Lohn in einer arithmetischen Progression zunimmt. Eben so bey dem Ausmauern eines Brunnen. Bey der Aufführung hoher Mauern muß das Arbeitslohn auch mit der Höhe größer werden. Moivre setzte anstatt der Reihe, nach welcher eine Anzahl gleichjähriger Personen abstirbt, eine arithmetische, um darnach die Leibrenten leichter zu berechnen. Diese Methode ist aber fehlerhaft. Eine sehr wichtige Anwendung der arithmetischen Reihe für die ganze rechnende Mathematik sind die Logarithmen.

9. Vermittelst der beiden Gleichungen: I. $y = a + (x - 1)d$. II. $s = \frac{1}{2}(a + y)x$, kann man zwey der fünf Größen, a, d, x, y, s, finden, wenn die drey andern gegeben sind. Dieses giebt zwanzig verschiedene Aufgaben, da drey Größen aus fünf auf zehnerley Art genommen werden können, und von den beiden übrigen entweder die eine oder die andere gesucht werden mag.

10. Es ist nicht nöthig, alle diese zwanzig Gleichungen zu entwickeln. Nur diejenigen, in welchen die gesuchte Größe auf die zweyte Potenz steigt, mögen zu Beispielen dienen.

I. Es sey die Anzahl der Glieder durch das erste Glied, den Unterschied und die Summe zu bestimmen. Aus den beiden Gleichungen, I. $y = a + (x - 1)d$, und II. $2s = (a + y)x$, ist nun y herauszuschaffen. Man setze in II. den Werth von y aus I. so ist $2s = (2a + (x - 1)d)x$, daher $dx^2 + (2a - d)\,x = 2s$, folglich (Gleichung II. 6.)

$$x = -\frac{2a - d}{2d} \pm \frac{\sqrt{((2a-d)^2 + 8ds)}}{2d}.$$

Wie das untere Vorzeichen seine Anwendung finde, wird hernach an einem Beyspiele gezeigt werden.

II. Wird statt des ersten Gliedes das letzte Glied gegeben, so ist d negativ in Absicht des vorher gebrauchten d, und die beiden äussersten Glieder, a, y, werden mit einander verwechselt. So wird erhalten

$$x = + \frac{2y + d}{2d} \pm \frac{\sqrt{((2y+d)^2 - 8ds}}{2d}.$$

III. Es sey das letzte Glied durch das erste Glied, den Unterschied und die Summe zu bestimmen. — Aus den beiden Gleichungen I. $y = a - d + dx$, und II. $2s = (a + y)x$, wird erhalten:

$$(a + y)\ (y - a + d) = 2ds,$$

das ist

$$y^2 + dy - a(a-d) = 2ds;$$

und

$$y = -\tfrac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + a(a-d) + \tfrac{1}{4}d^2)}.$$

IV. Wird statt des letzten Gliedes das erste gesucht, so ist durch eine Vertauschuug, wie in II.

$$a = + \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(y(y+d) + \tfrac{1}{4}d^2 - 2ds)}.$$

11. Exempel. Es sey $a = 10$; $d = + 4$; $s = 384$, so ist $x = -2 + 14$; $y = -2 + 56$. Hier gehört $y = + 54$ zu $x = + 12$; und $y = - 58$ zu $x = - 16$. Es ist nämlich $+ 54$ das zwölfte Glied in der Reihe 10, 14, etc. und $- 58$ das Glied, dessen Stellenzeiger $- 16$ ist, in derselben Reihe, aber rückwärts genommen. Die arithmetische Summe der Glieder ist freylich eine andere von $+ 10$ bis zu $- 58$, als von $+ 10$ bis zu $+ 54$; allein es ist doch das Product $(10 + 54)(+ 12) = (10 - 58)(- 16) = + 768$, dessen Hälfte $= 384$, die Summe der Glieder von 10 bis $+ 54$ ist. Die arithmetische Summe der 18 Glieder von $+ 10$ bis $- 58$, mit Beobachtung der Vorzeichen, ist $= \frac{1}{2}(10 - 58).\ 18 = - 432$.

In Pasquich's Analysis 1 Th. §. 144 sind alle zwanzig Gleichungen entwickelt. In der Gleichung XII. ist ein Druckfehler. Das Vorzeichen der Wurzelgröße ist bloß + genommen.

Arithmetische Reihen höherer Ordnungen sind diejenigen, deren zweyte, oder dritte, oder eine der folgenden Reihen der Unterschiede beständige Glieder enthält. Wenn die Unterschiede der ersten Unterschiede der Glieder, oder die zweyten Unterschiede, beständige endliche Größen sind, so ist die Reihe eine arithmetische der zweyten Ordnung. Sind die zweyten Unterschiede veränderlich, aber ihre Unterschiede beständige Größen, so ist die Reihe eine arithmetische der dritten Ordnung. Sind diese zwar nicht gleich groß, aber sind deren Unterschiede, die vierten, gleich groß, so ist die Reihe eine arithmetische der vierten Ordnung. Allgemein, wenn die nten Unterschiede einer Reihe A, B, C, D, etc. gleich groß sind, ist sie eine arithmetische Reihe der nten Ordnung.

1. Die folgende Tafel stellt die Formen der Unterschiede nach ihrer Ordnung dar, wenn die Glieder einer Reihe sind: A, B, C, D, E, F, G, etc. Die vorhergehenden Glieder sind durchgehends von den folgenden abgezogen.

2. Es wird hier leicht bemerkt, daß die Coefficienten von A, B, C, etc. die Binomial-Coefficienten aus derjenigen Potenz von a — b sind, deren Exponens die Ordnungszahl des Unterschiedes ist. Es ist nur zu zeigen, daß diese Form allgemein ist. Für eine gerade Ordnungszahl n der Unterschieds-Reihen sey das erste Glied in der Reihe =

$$A - nB + \frac{n.n-1.}{1.2}C - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}D$$

$$+ \frac{n\ldots n-3.}{1\ldots 4}E \ldots + \frac{n.n-1.}{1.2}P - nQ + R;$$

und das zweyte Glied =

$$B - nC + \frac{n.n-1.}{1.2}D - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}E$$

$$+ \frac{n\ldots n-3.}{1\ldots 4}.F \ldots + \frac{n.n-1.}{1.2}Q - nR + S$$

Hauptreihe	I Unterschiede	II. Unterschiede	III. Unterschiede	IV. Unterschiede
A	B — A	C — 2B + A	D — 3C + 3B — A	E — 4D + 6C — 4B + A
B	C — B	D — 2C + B	E — 3D + 3C — B	F — 4E + 6D — 4C + B
C	D — C	E — 2D + C	F — 3E + 3D — C	G — 4F + 6E — 4D + C
D	E — D	F — 2E + D	G — 3F + 3E — D	.
E	F — E	G — 2F + E	.	.
F	G — F	.	.	.
G	.	.	.	
.	.	.		
.	.			
.				

V. Unterschiede	VI. Unterschiede
F — 5E + 10D — 10C + 5B — A	G — 6F + 15E — 20D + 15C — 6B + A
G — 5F + 10E — 10D + 5C — B	.
.	.
.	

Jenes von diesem abgezogen giebt das erste Glied der (n + 1)ten Unterschiede,

$$-A + (n+1)B - \frac{n+1\,.\,n}{1\,.\,2}C + \frac{n+1\,.\,n\,.\,n-1\,.}{1\,.\,2\,.\,3}D$$

$$- \frac{n+1\,\ldots\,n-2.}{1\,\ldots\,4}E\,\ldots\,+ \frac{1+1\,.\,n}{1\,.\,2}Q - (n+1)R + S,$$

und das zweyte Glied =

$$-B + (n+1)C - \frac{n+1\,.\,n}{1\,.\,2}D + \frac{n+1\,.\,n\,.\,n-1\,.}{1\,.\,2\,.\,3}E$$

$$- \frac{n+1\,\ldots\,n-2.}{1\,\ldots\,4}F\,\ldots\,+ \frac{n+1\,.\,n}{1\,.\,2}R - (n+1)S + T.$$

Jenes von diesem abgezogen giebt das erste Glied in der Reihe der (n + 2)ten Unterschiede,

$$+A - (n+2)B + \frac{n+2\,.\,n+1\,.}{1\,.\,2}C - \frac{n+2\,.\,n+1\,.\,n}{1\,.\,2\,.\,3}D$$

$$- \frac{n+2\,\ldots\,n-1\,.}{1\,\ldots\,4}E\,\ldots + \frac{n+2\,.\,n+1\,.}{1\,.\,2}R - (n+2)S + T.$$

Es erhellt also, daß die Form der Coefficienten immer dieselbe bleibt, daß ihre Vorzeichen abwechseln, und daß in den Unterschiedsreihen mit einer geraden Ordnungszahl das Vorzeichen + den Anfang macht, bey einer ungeraden Ordnungszahl das Vorzeichen —. Da nun die Form der Coefficienten für die berechneten Unterschiede gilt, so gilt sie auch für alle folgende. Sie ist übereinstimmend mit der Form der Binomial-Coefficienten in der nten Potenz von a — b, wenn n die Ordnungszahl der Reihe ist, (Binomischer Lehrsatz. 1.). Diese Coefficienten seyn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. nach ihrer Folge, ohne den des ersten Gliedes, nämlich 1, und zwar bloß in Absicht auf die Quantität, so ist das erste Glied der nten Unterschiedsreihe

$$= \pm (A - \mathfrak{A}B + \mathfrak{B}C - \mathfrak{C}D + \mathfrak{D}E\,\ldots\ldots,$$

$$\ldots \mp \mathfrak{B}\overset{-1}{N} + \mathfrak{A}N \pm \overset{+1}{N})$$

wo das obere Vorzeichen für ein gerades n, das untere

für ein ungerades zu nehmen ist, und N das nte Glied der Reihe bedeutet; das vorhergehende und folgende Glied sind durch den Buchstaben N mit dem Stellenzeichen darüber angedeutet.

Für das zweyte Glied der Unterschiede wird jedes Glied der Reihe mit dem nächst folgenden vertauscht, für das dritte Glied mit dem zweyten folgenden, u. s. f.

3. Es ist in einer arithmetischen Reihe der

I. Ordn. $A - 2B + C = 0$

II. Ordn. $A - 3B + 3C - D = 0$

III. Ordn. $A - 4B + 6C - 4D + E = 0$

IV. Ordn. $A - 5B + 10C - 10D + 5E - F = 0$

V. Ordn. $A - 6B + 15C - 20D + 15E - 6F + G = 0$

: : : : : :

: : : : : :

nten Ordnung $A - \mathfrak{A}B + \mathfrak{B}C - \mathfrak{C}D + \mathfrak{D}E \ldots ;$

$$\ldots \pm \mathfrak{C}\overset{-1}{N} \mp \mathfrak{B}N \pm \mathfrak{A}\overset{+1}{N} \mp \overset{+2}{N} = 0$$

wo A, B, C, D, etc. irgend welche auf einander folgende Glieder der Hauptreihe bedeuten, und in der allgemeinen Formel, 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, etc. die Binomial-Coefficienten aus der (n + 1)ten Potenz von (a — b) sind. Die Formel für eine Ordnung enthält so viele Glieder, als die um zwey vergrößerte Ordnungszahl (Exponens der Ordnung) Einer enthält.

Denn in einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung, oder der gemeinen, sind die ersten Unterschiede beständig, also die zweyten Null. In einer arithmetischen Reihe der zweyten Ordnung sind die zweyten Unterschiede unveränderlich, also die dritten Null. Auf ähnliche Art für die höhern Reihen.

4. Die Glieder einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung machen eine rücklaufende Reihe aus, in welcher die Scale der Relation aus den Binomial-Coefficienten in einer Potenz von (a — b) besteht, deren Expo-

nens um Eins größer ist als der Exponens der Ordnung. So ist in der

I. Ordn. $C = 2B - A$
II. Ordn. $D = 3C - 3B + A$
III. Ordn. $E = 4D - 6C + 4B - A$
IV. Ordn. $F = 5E - 10D + 10C - 5B + A$
u. s. f.

(Vergleiche rücklaufende Reihe.)

5. Beyspiele von arithmetischen Reihen höherer Ordnungen geben die Potenzen der natürlichen Zahlen oder auch solcher, die in gemeiner arithmetischer Progression sind; die Polygonalzahlen; die Binomial-Coefficienten in einer bestimmten Stelle oder die figurirten Zahlen; die Coefficienten in der Potenz $(a-b)^{-n}$, wo n eine ganze Zahl ist, als

die Würfel,

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, etc.

die Pentagonalzahlen,

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, etc.

die figurirten Zahlen der vierten Ordnung,

1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, etc.

die Binomial-Coefficienten in $(a-b)^{-6}$,

6, 21, 56, 126, 252, 462, 792, etc.

6. Eine arithmetische Reihe von irgend einer Ordnung kann auch als eine Reihe einer höhern Ordnung betrachtet werden. Denn wenn die mten Unterschiede Null sind, so sind deren Unterschiede und alle folgenden auch Null. Z. B. für eine Reihe der ersten Ordnung ist $A - 2B + C = 0$, und $B - 2C + D = 0$, also durchs Abziehen $A - 3B + 3C - D = 0$, wie für eine Reihe der zweyten Ordnung. Nun ist eben so $B - 3C + 3D - E = 0$, also ist $A - 4B + 6C - 4D + E = 0$, wie für eine Reihe der dritten Ordnung. Den Beweis kann man auf diese Art leicht allgemein machen.

7. Das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe sey dasjenige, dessen Stelle durch 0 bezeichnet wird, und sey = A; das Anfangsglied in der Reihe der ersten Unterschiede sey = a; in der Reihe der zweyten = b; in der Reihe der dritten = c; in der Reihe der vierten = d, u. s. f. Die Stelle dieser Anfangsglieder werde ebenfalls durch 0 bezeichnet. Das Glied der Hauptreihe in der xten Stelle sey = y, so ist

$$y = A + x.a + \frac{x.\overline{x-1}.}{1.2} b + \frac{x.\overline{x-1}.\overline{x-2}}{1.2.3} c$$

$$+ \frac{x.\overline{x-1}.\overline{x-2}.\overline{x-3}.}{1.2.3.4} d + \frac{x....\overline{x-4}.}{1...5} e + \text{etc.}$$

Die Reihe geht so lange fort, bis entweder ein Coefficient (da x eine ganze Zahl bedeutet), oder ein Unterschiedsglied mit allen folgenden Null wird.

Der Beweis erhellt aus der Zusammensetzung der Glieder der Hauptreihe aus den ersten Gliedern der Unterschiedsreihen, welche folgende Tafel zeigt, worin Δy die Glieder der ersten Unterschiedsreihe, $\Delta^2 y$ die Glieder der zweyten, $\Delta^3 y$ die der dritten u. s. f. bedeuten. Jedes Glied der Hauptreihe sowohl als der Differenzenreihen wird aus dem vorhergehenden in seiner Reihe, und dem in der nächsten Differenzenreihe mit diesem gleichstelligen zusammen gesetzt. Die Allgemeinheit der Form wird wie §. 2 bewiesen.

8. Die Anfangsglieder der Differenzenreihen können auch negativ seyn, einige oder alle. Wenn alle negativ sind, so nehmen die Glieder der Hauptreihe unbedingt ab, und desto mehr, je weiter sie von dem Anfangsgliede entfernt sind, so wie sie auf solche Art wachsen, wenn alle Anfangsglieder der Differenzenreihen positiv sind, wie es bisher angenommen ist. Sind aber einige Anfangsglieder der Differenzenreihen negativ, so können die entferntern Glieder der Hauptreihe weniger zunehmen, als die dem Anfangsgliede nähern Glieder; es kann das Zunehmen sich in ein Abnehmen verwandeln, und umgekehrt. Diese Wechsel können öfterer als einmahl erfolgen. Die Glie-

Stellenzahlen,

	0	1	2	3	4
y	A	A + a	A + 2a + b	A + 3a + 3b + c	A + 4a + 6b + 4c + d
Δy	a	a + b	a + 2b + c	a + 3b + 3c + d	a + 4b + 6c + 4d + e
$\Delta^2 y$	b	b + c	b + 2c + d	b + 3c + 3d + e	b + 4c + 6d + 4e + f
$\Delta^3 y$	c	c + d	c + 2d + e	c + 3d + 3e + f	
$\Delta^4 y$	d	d + e	d + 2e + f		.
$\Delta^5 y$	e	e + f			**5**
$\Delta^6 x$	f		.	.	A + 5a + 10b + 10c + 5d + e
		.			a + 5b + 10c + 10d + 5e + f
.	.		.	.	
		.			.
.	.		.		**6**
		.			A + 6a + 15b + 20c + 15d + 6e + f
.	.				.

der der Hauptreihe können statt positiver Werthe negative bekommen, und wiederum aus negativen Größen positive werden. Z. B. die Anfangsglieder der Differenzenreihen der Potenzen der ganzen Zahlen nach ihrer Folge sind alle positiv, und die Potenzen wachsen immer desto mehr, je größer die Wurzeln sind; hingegen sind die Anfangsglieder der Differenzenreihen von den Wurzeln der ganzen Zahlen abwechselnd positiv und negativ, wie man sich es aus der Tafel der Quadratwurzeln in Lamberts Zusätzen zu den log. und trigon. Tabellen, Tab. XLI. deutlich machen kann. Die Werthe einer Gleichung, wenn die Werthe der unbekannten Größe in derselben die ganzen Zahlen nach ihrer Folge, oder sonst eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung sind, machen häufig eine Reihe aus, deren Glieder theils positiv, theils negativ sind, und für welche die Anfangsglieder ihrer Differenzenreihen auf gleiche Art wechseln.

9. Wenn x negativ genommen wird, so ist y ein Glied, das so viele Stellen von dem Anfangsgliede rückwärts absteht, als oft x die Einheit enthält. Es sey z die Stellenzahl des Gliedes absolut genommen, statt —x, so ist

$$y = A - z.a + \frac{z.z+1.}{1.2} b - \frac{z.z+1.z+2.}{1.2.3} c + \frac{z.z+1.z+2.z+3.}{1.2.3.4} d - \frac{z...z+4.}{1..4} e + \text{etc.}$$

10. Es sey $x = \frac{u}{\Delta u}$, wo u irgend eine benannte Größe, oder auch eine unbenannte, ohne Rücksicht auf eine Einheit, bedeutet, die sich mit x gleichförmig verändert. Ferner sey $a = \Delta A$; $b = \Delta^2 A$; $c = \Delta^3 A$, u. s. f. so ist

$$y = A + u.\frac{\Delta A}{\Delta u} + \frac{u(u-\Delta u)}{1.2}.\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2} + \frac{u(u-\Delta u)(u-2\Delta u)}{1.2.3}.\frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3}$$

$$+ \frac{u(u-\Delta u)(u-2\Delta u)(u-3\Delta u)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\Delta^4 A}{\Delta u^4} + \text{etc.}$$

Diese Formel stellt y aus der zwischen y und u gegebenen Gleichung dar, wenn diese keine gesonderte Gleichung für y ist. Sie führt zu dem Taylorschen Lehrsatze, (s. diesen).

Summirung der arithmetischen Reihen.

11. Setzt man das Anfangsglied einer Hauptreihe $= 0$, so ist das xte Glied derselben nach diesem (das Glied zu der Stellenzahl x) die Summe von x Gliedern der ersten Differenzenreihe, gezählt von demjenigen an, dessen Stellenzahl 0 ist, bis mit zu dem Gliede in der Stelle $x - 1$.

Denn es sey die Hauptreihe: A, B, C, D . . . P, Q, R, S, so ist die erste Differenzenreihe: $B - A$; $C - B$; $D - C$; . . . . $Q - P$; $R - Q$; $S - R$. Die Summe der Glieder in dieser letztern Reihe ist $= S - A$; also $= S$, wenn $A = 0$ ist.

12. Die Summe einer Anzahl Glieder aus einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung zu finden, sehe man dieselben als die Unterschiede einer arithmetischen Reihe der nächst höhern Ordnung an, in welcher das Anfangsglied $= 0$ ist. Das Anfangsglied der Reihe sey $= A$; das erste Glied der ersten Unterschiede $= \Delta A$; das erste der zweyten $= \Delta^2 A$: das erste der dritten $= \Delta^3 A$. u. s. f. Die Anzahl der Glieder $= r$; ihre Summe $= \Sigma$, so ist

$$\Sigma = rA + \frac{r . r-1.}{1 . 2} \Delta A + \frac{r . r-1 . r-2.}{1 . 2 . 3} \Delta^2 A$$

$$+ \frac{r . r-1 . r-2 . r-3.}{1 . 2 . 3 . 4} \Delta^3 A + \text{etc.}$$

Denn es seyn die Glieder der gegebenen Reihe A, B, C . . . R, S, T; der summirenden α, β, γ . . . ϱ, σ, τ, so daß $\alpha = A$; $\beta = A + B$, $\gamma = A + B$

$+ C \ldots ; \varrho = A + B \ldots + R; \sigma = A + B \ldots + S;$
$\tau = A + B \ldots + S + T.$

Diese beiden Reihen mit ihren Stellenzeigern ordne man folgendergestalt zusammen.

	0	1	2	3	....	r−3	r−2	r−1	r
I.	A	B	C	D	.....	R	S	T	..
II.	0	α	β	γ	....		ϱ	σ	τ

Hier ist τ das rte Glied nach dem Anfangsgliede o, und das erste Glied der Unterschiede für die Reihe II. ist das Anfangsglied A der Reihe I; das erste Glied der zweyten Unterschiede für jene ist das erste Glied der ersten Unterschiede für diese, und so ferner, also ist (7)

$$\tau = \Sigma = r A + \frac{r . r - 1.}{1 . 2} \Delta A + \frac{r . r - 1 . r - 2.}{1 . 2 . 3} \Delta^2 A$$
$+$ etc.

13. Exempel I. Es sey die Reihe der figurirten Zahlen von der zweyten Ordnung, 1, 3, 6, 10 ... $\frac{r . r + 1.}{1 . 2}$ deren Anzahl r ist, zu summiren. Hier ist $A = 1$; $\Delta A = 2$; $\Delta^2 A = 1$; $\Delta^3 A = 0$, also ist die Summe

$$\Sigma = r . 1 + \frac{r . r - 1.}{1 . 2} . 2 + \frac{r . r - 1 . r - 2.}{1 . 2 . 3} . 1 =$$
$$\tfrac{1}{6}(r^3 + 3 r^2 + 2 r) = \tfrac{1}{6} r (r + 1)(r + 2).$$

14. Exempel II. Es sey die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen 1, 4, 9, 16 ... r^2 zu summiren. Hier ist $A = 1$; $\Delta A = 3$; $\Delta^2 A = 2$; $\Delta^3 A = 0$, (Buchstabenrechnung, 20); also ist, wenn die Summe der Quadrate durch $\Sigma . r^2$ bezeichnet wird,

$$\Sigma . r^2 = r . 1 + \frac{r . r - 1.}{1 . 2} . 3 + \frac{r . r - 1 . r - 2.}{1 . 2 . 3} . 2$$
$$= \tfrac{1}{6} r (2 r^2 + 3 r + 1) = \tfrac{1}{6} r (r + 1)(2 r + 1)$$

15. Exempel III. Die Reihe der Würfel der natürlichen Zahlen, 1, 8, 27, 64 ... $+ r^3$, zu summi-

ren. Hier ist $A = 1$; $\Delta A = 7$; $\Delta^2 A = 12$; $\Delta^3 A = 6$; $\Delta^4 A = 0$. Daher ist die Summe der Würfel,

$$\Sigma . r^3 = r . 1 + \frac{r . r-1 .}{1 . 2} . 7 + \frac{r . r-1 . r-2 .}{1 . 2 . 3} . 12$$

$$+ \frac{r . r-1 . r-2 . r-3 .}{1 . 2 . 3 . 4} . 6,$$

das ist

$$\Sigma . r^3 = \tfrac{1}{4}(r^4 + 2r^3 + r^2) = \tfrac{1}{4} r^2 (r+1)^2.$$

Die Wurzel aus diesem Quadrate ist eine Triangularzahl, eine aus der Reihe 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc. Peletarius, im 16ten Jahrh. hat diese Bemerkung gemacht.

16. Auf diese Art lassen sich auch die Summen höherer Potenzen finden. Das Verfahren wird aber schon für die Biquadrate beschwerlich. Man muß die Theile der Summe erstlich auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen, diesen und den gemeinschaftlichen Factor absondern, die Theile des vieltheiligen zweyten Factors mit besondern Buchstaben bezeichnen, und sie nach und nach vereinigen. Zur Übung im Rechnen ist das dienlich. In dem Artikel, Potenz, werden Formeln zur Summirung der Potenzen mitgetheilt, eine involutorische und eine evolutorische.

17. Es sey A, B, C . . . R, S, T eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, aus r Gliedern bestehend; man soll die Summe der Reihe $rA + (r-1)B + (r-2)C \ldots + 3R + 2S + T$ finden.

Es ist, mit Beybehaltung der vorher gebrauchten Bezeichnungen, diese Summe,

$$\Sigma = \frac{r+1 . r}{1 . 2} A + \frac{r+1 . r . r-1 .}{1 . 2 . 3} \Delta A$$

$$+ \frac{r+1 . r . r-1 . r-2 .}{1 . 2 . 3 . 4} \Delta^2 A$$

$$+ \frac{r+1 \, . \, r \, . \, r-1 \, . \, r-2 \, . \, r-3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5} \Delta^5 A + \text{etc.}$$

Denn man formire aus der gegebenen Reihe die summirende, α, β, γ, ... ϱ, σ, τ, und aus dieser die zweyte summirende, a, b, c .... r, s, t, so daß $a = \alpha$; $b = \alpha + \beta$; $c = \alpha + \beta + \gamma$; etc. und $t = \alpha + \beta + \gamma \ldots + \sigma + \tau$ ist. Da

$$\alpha = A$$
$$\beta = A + B$$
$$\gamma = A + B + C$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varrho = A + B + C \ldots\ldots + R$$
$$\sigma = A + B + C \ldots\ldots + R + S$$
$$\tau = A + B + C \ldots\ldots + R + S + T,$$

so ist

$$t = rA + (r-1)B + (r-2)C + \ldots + 3R + 2S + T.$$

Die gesuchte Summe ist also das rte Glied der zweyten summirenden Reihe, deren Glieder die summatorischen für die Glieder der ersten summirenden Reihe zu der gegebenen sind.

Man ordne nun die drey Reihen folgendergestalt nebst ihren Stellenzahlen zusammen, und bezeichne die Stelle des Anfangsgliedes, wie bisher, durch 0.

Stellen.	0;	1,	2,	3, ...	r−2,	r−1,	r	r+1	
I. Reihe.	A,	B,	C,	D, ...	S,	T, ...			
II.	0,	α,	β,	γ, ...	ϱ,	σ,	τ, ..		
III.	0,	0,	a,	b, ...	.	r,	s,	t	

Hier ist in der dritten Reihe das Glied t, oder die gesuchte Summe, das (r + 1)te Glied nach dem Anfangsgliede; das Anfangsglied derselben Reihe ist Null; das erste

Glied der ersten Unterschiede ist auch Null; das erste der zweyten ist = A; das erste der dritten ΔA; das erste der vierten $= \Delta^2 A$, u. s. f. Man hat also in der Formel (7.) für die dortigen

y, A, a, b, c, d, e, ... x

zu setzen

t, o, o, ΔA, $'\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, $\Delta^4 a$, ... $r+1$.

So erhält man die angegebene Formel für t, das ist, für die Summe Σ.

Eine Anwendung kommt in der Goniometrie, IV. vor.

Fernere Untersuchungen über die arithmetischen Reihen.

18. Die Reihe A, B, C, D, E, etc. sey eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, für welche das beständige Glied der nten Unterschiede ist $= \alpha$; so ist die Reihe A, 2B, 3C, 4D, 5E, etc. eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, für welche das beständige Glied der $(n+1)$ten Unterschiede ist $= (n+1)\alpha$.

Das nte Glied der gegebenen Reihe sey = N, die folgenden seyn N', N'', N''', N^{IV}, u. s. f. das nächst vorhergehende sey $'N$, das Glied A für das erste genommen. Die Binomial-Coefficienten aus der nten Potenz seyn $^n\mathfrak{A}$, $^n\mathfrak{B}$, $^n\mathfrak{C}$ etc. aus der $(n+1)$ten Potenz $^{n+1}\mathfrak{A}$, $^{n+1}\mathfrak{B}$, $^{n+1}\mathfrak{C}$, etc. (s. Binomial-Coeffic. 1). Das erste und hier auch beständige Glied der nten Unterschiede ist, nach (2),

$$\pm(A - {}^n\mathfrak{A}B + {}^n\mathfrak{B}C - {}^n\mathfrak{C}D + {}^n\mathfrak{D}E \ldots$$
$$\ldots \pm {}^n\mathfrak{B}\,'N \mp {}^n\mathfrak{A}N \pm N') = \alpha,$$

wo das obere Vorzeichen für ein gerades n, das untere für ein ungerades zu nehmen ist.

Das zweyte Glied der nten Unterschiede ist

$$\pm(B - {}^n\mathfrak{A}C + {}^n\mathfrak{B}D - {}^n\mathfrak{C}E + {}^n\mathfrak{D}F \ldots\ldots$$
$$\ldots \pm {}^n\mathfrak{B}N \mp {}^n\mathfrak{A}N' \pm N'') = \alpha.$$

Weil die (n + 1)ten Unterschiede = 0 sind, so ist (3),

$$\pm(A - {}^{n+1}\mathfrak{A}B + {}^{n+1}\mathfrak{B}C - {}^{n+1}\mathfrak{C}D + {}^{n+1}\mathfrak{D}E \ldots \ldots \mp {}^{n+1}\mathfrak{B}N \pm {}^{n+1}\mathfrak{A}N' \mp N'') = 0.$$

Um diese Gleichung mit der zweyten Formel für α zu verbinden, bemerke man, daß

$(n+1).\ 1 = 1.\ {}^{n+1}\mathfrak{A}$; $(n+1).\ {}^{n}\mathfrak{A} = 2.\ {}^{n+1}\mathfrak{B}$;
$(n+1).\ {}^{n}\mathfrak{B} = 3.\ {}^{n+1}\mathfrak{C}$; $(n+1).\ {}^{n}\mathfrak{C} = 4.\ {}^{n+1}\mathfrak{D}$;
$(n+1).\ {}^{n}\mathfrak{D} = 5.\ {}^{n+1}\mathfrak{E}$; etc.

(s. Binomial-Coefficienten, 9). Man multiplicire die zweyte Formel für α mit $n + 1$, so ist, mit Anwendung dieser Substitutionen,

$$\pm({}^{n+1}\mathfrak{A}.1B - {}^{n+1}\mathfrak{B}.2C + {}^{n+1}\mathfrak{C}.3D - {}^{n+1}\mathfrak{D}.4E \ldots \pm {}^{n+1}\mathfrak{B}.(n-1)N \mp {}^{n+1}\mathfrak{A}.nN' \pm (n+1)N'') = (n+1)\alpha.$$

Wegen der Coefficienten in dem letzten Theile der Formel bemerke man, daß der erste Coefficient, ${}^{n+1}\mathfrak{A}$, in der (n + 1)ten Potenz zugleich der nte ist; der zweyte, ${}^{n+1}\mathfrak{B}$, zugleich der (n — 1)te, u. s. f.

Von dieser Gleichung subtrahire man die Formel für die (n + 1)ten Unterschiede, und vertausche sowohl die Vorzeichen der einzelnen Theile als des Ganzen mit den entgegengesetzten, und es entsteht nun die Gleichung,

$$\mp(A - {}^{n+1}\mathfrak{A}.2B + {}^{n+1}\mathfrak{B}.3C - {}^{n+1}\mathfrak{C}.4D + {}^{n+1}\mathfrak{D}.5E \ldots \mp {}^{n+1}\mathfrak{B}.nN \pm {}^{n+1}\mathfrak{A}(n+1)N' + (n+2)N'') = (n+1)\alpha.$$

Dieser Werth von $(n + 1)\alpha$ hat die Form der (n + 1)ten Unterschiede für die Hauptreihe A, 2B, 3C, 4D, 5E ... nN, (n + 1)N', (n + 2)N''. Also ist der (n + 1)te Unterschied dieser n + 2 Größen = $(n + 1)\alpha$.

Auf gleiche Art entsteht aus je (n + 2) auf einander folgenden Gliedern der angenommenen Reihe der nten Ord-

nung, z. B. D, E, F . . N^{IV}, N^{V} die Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, D, 2E, 3F . . $(n+1)N^{IV}$, $(n+2)N^{V}$, deren $(n+1)$te Differenzenreihe das beständige Differenzglied $(n+1)\alpha$ enthält. Es ist aber 3D + 3E + 3F . . . $3N^{IV}$. $3N^{V}$ eine Reihe der nten Ordnung, deren $(n+1)$te Differenzen alle = 0 sind. Daher bleibt die aus jener und dieser zusammengesetzte Reihe, 4D + 5E, 6F. . . . . $(n+4)N^{IV}$, $(n+5)N^{V}$, noch eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung mit dem beständigen Unterschiede $(n+1)\alpha$.

Der Beweis für jedes andere Stück der Reihe ist diesem völlig ähnlich.

19. Exempel. Es sey das Glied der fünften Differenzenreihe unveränderlich, nämlich

$$-(A - 5B + 10C - 10D + 5E - F) = \alpha$$
$$-(B - 5C + 10D - 10E + 5F - G) = \alpha,$$

so ist jedes Glied der sechsten Differenzenreihe = 0, nämlich

$$A - 6B + 15C - 20D + 15E - 6F + G = 0.$$

Dazu addire man das sechsfache des zweyten Ausdrucks von α, nämlich

$$-(6B - 30C + 60D - 60E + 30F - 6G) = 6\alpha,$$

so ist

$$A - 6.2B + 15.3C - 20.4D + 15.5E - 6.6F + 1.7G = 6\alpha.$$

20. Die nten Potenzen der natürlichen Zahlen sind eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, deren beständiges Differenzglied ist $n.n-1.n-2 \ldots 4.3.2.1$.

Denn da die Zahlen selbst von der Eins an eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung sind, so sind ihre Quadrate, die aus den Zahlen durch die Multiplication mit 1, 2, 3, 4, etc. nach der Reihe derselben entstehen, eine arithmetische Reihe der zweyten Ordnung. Multiplicirt man diese folgweise durch 1, 2, 3, etc. so entsteht eine Reihe der dritten Ordnung, und zugleich die Reihe der

Cuborum. Aus diesen entsteht auf dieselbe Art eine Reihe der vierten Ordnung, und zugleich die Reihe der Biquadrate. Auf diese Art entsteht zugleich die nte Reihe der Unterschiede und die Reihe der nten Potenzen. Da das Differenzglied der ersten Reihe oder der Zahlen selbst $= 1$ ist, so ist das Differenzglied der Quadrate $= 2 . 1$; der Cuborum $= 3 . 2 . 1$; der Biquadrate $= 4 . 3 . 2 . 1$; u. s. f. der nten Potenzen $= n . n - 1 . n - 2 \ldots\ldots 3 . 2 . 1$.

21. Die Glieder der Reihe A, B, C, D, E, etc. einer arithmetischen Reihe der nten Ordnung werden folgweise durch die Glieder der arithmetischen Reihe, $p + q$; $p + 2q$; $p + 3q$; $p + 4q$; etc. multiplicirt, so ist die Reihe $(p + q)A$; $(p + 2q)B$; $(p + 3q)C$; $(p + 4q)D$; etc. eine arithmetische Reihe der $(n + 1)$ten Ordnung, deren beständiges Differenzglied $= (n + 1) q \alpha$, wenn α das beständige Differenzglied der Reihe A, B, C, D, etc. ist.

Denn die Reihe, pA, pB, pC, pD, etc. bleibt eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, wie es die Reihe, A, B, C, D. etc. ist, da die Differenzenreihen jener aus den Differenzenreihen dieser durch die Multiplication mit p entstehen. Die nte Differenzenreihe enthält also das beständige Differenzglied $p\alpha$, und die $(n + 1)$te Differenzenreihe durchaus die Glieder 0. Die Reihe, qA, 2qB 3qC, 4qD, etc. ist eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, da die Reihe qA, qB, qC, qD, etc. eine Reihe der nten Ordnung ist, zufolge des in (18) erwiesenen. Die aus der Reihe, pA, pB, pC, pD, etc. und der Reihe qA 2qB, 3qC, 4qD, etc. zusammengesetzte Reihe bleibt eine Reihe der $(n + 1)$ten Ordnung, da die $(n + 1)$ten Unterschiede der erstern Null sind; so daß die $(n + 1)$ten Unterschiede bloß aus den Gliedern der zweyten Reihe entstehen. Da die $(n + 1)$ten Unterschiede der Reihe A, 2B, 3C, 4D, 5E, etc. beständig und $= (n + 1)\alpha$ sind, so sind für die Reihe qA, 2qB, 3qC, 4qD, etc. die $(n + 1)$ten Unterschiede $= (n + 1) q \alpha$.

22. **Exempel.** Die figurirten Zahlen der vierten Ordnung sind 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, etc. deren vierte beständige Unterschiede $= 1$ sind. Die Glieder dieser Reihe multiplicire man folgweise durch 1, 3, 5, 7, etc. so erhält man die Reihe, 1, 15, 75, 245, 630, 1386, 2730, etc. deren fünfte Unterschiede $= 10$ sind. Es ist hier $\alpha = 1$; $n = 4$, $q = 2$, also $(n+1) q \alpha = 10$.

23. Die ganzen Potenzen der Zahlen, welche in gemeiner arithmetischer Progression sind, bilden eine arithmetische Reihe, deren Ordnungszahl der Exponens der Potenz ist. Die Progression der Wurzeln sey a; $a + b$; $a + 2b$; $a + 3b$; etc. der Exponens der Potenz $= n$, so ist das beständige Glied der nten Unterschiede $= n . n - 1 . n - 2 \ldots 3 . 2 . 1 . b^n$.

Denn es gelte der Satz für die nte Potenz, so daß die Reihe a^n, $(a + b)^n$, $(a + 2b)^n$, $(a + 3b)^n$, etc. (S) eine arithmetische der nten Ordnung, und ihr ntes Differenzglied $= D$ sey. Die Reihe a^{n+1}, $(a + 2b)^{n+1}$, $(a + 3b)^{n+2}$, $(a + 4b)^{n+3}$, etc. (T) ist dadurch eine arithmetische Reihe der $(n + 1)$ten Ordnung, deren beständiges Differenzglied $= (n + 1) b D$. Dieses sey $= D'$. Nun ist, für $n = 1$, S eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung, in welcher $D = b$, und daher T eine Reihe der zweyten Ordnung, in welcher $D' = 2 b^2$. Demnach ist für $n = 2$, $D = 2 b^2$, und $D' = 3 . 2 b^3$; also für $n = 3$, $D = 3 . 2 b^3$, und $D' = 4 . 3 . 2 . b^4$; folglich allgemein $D = n . n - 1 . n - 2 \ldots 3 . 2 . 1 b^n$.

24. Die Werthe einer rationalen Gleichung vom nten Grade, $x^n - a x^{n-1} + b x^{n-2} \ldots \pm h x \mp k = 0$, machen eine arithmetische Reihe der nten Ordnung aus, in welcher das beständige nte Glied der Unterschiede ist $= n . n - 1 ; n - 2 \ldots 2 . 1 . \beta^n$, wenn für x successiv die Glieder der Progression α, $\alpha + \beta$, $\alpha + 2\beta$, $\alpha + 3\beta$, e c. gesetzt werden.

Denn dieser Werth wird aus so vielen Theilen zusammengesetzt, als die Gleichung Glieder hat. In den ersten Unterschieden der Werthe ist das niedrigste Glied k nicht vorhanden, in den zweyten nichts aus h x, u. s. f. In der Reihe der (n — 1)ten Unterschiede sind nur noch die von x^n und $a x^{n-1}$ enthalten. Die von der letztern dieser Größen sind sich alle gleich, so daß in der Reihe der nten Unterschiede nur die von x^n enthalten sind. Diese sind jedes $= n . n - 1 . n - 2 \ldots 3 . 2 . 1 . \beta^n$.

Hiervon wird ein sehr nützlicher Gebrauch zur Auflösung der Gleichungen gemacht, s. Gleichung.

Interpolirung der arithmetischen Reihen.

25. Man setze für x, welches bisher eine ganze Zahl bedeutet hat, einen Bruch $\frac{z}{n}$, so wird in der Formel (7) die Größe y nach demselben Gesetze gebildet, wie für ganze Werthe von x, und es bedeutet für einen gebrochnen Werth von x das dazu gehörige y ein eingeschobenes Glied, dessen Stelle nach dem nächst vorhergehenden, zu einem ganzen Stellenzeiger gehörigen Gliede, durch den Überschuß von z über das nächst kleinere Vielfache von n angezeigt wird, indem zwischen je zwey Glieder der ursprünglichen Reihe n — 1 Glieder eingeschoben, oder statt je eines Gliedes n Glieder gesetzt werden. Z. B. wenn $x = \frac{17}{5}$, so ist y das 2te Glied nach dem 3ten der ursprünglichen Reihe, in welcher je 4 eingeschoben sind. Oder man nehme statt je eines Gliedes n Glieder, und es ist y das zte Glied der neuen Reihe. Wird die Stelle von y in dieser Reihe durch z bezeichnet, so ist

$$y = A + z . \frac{a}{n} + \frac{z . z - n.}{1 . 2.} . \frac{b}{n^2} + \frac{z . z - n . z - 2n.}{1 . 2 \quad 3.} . \frac{c}{n^3}$$

$$+ \frac{z . z - n . z - 2n . z - 3n.}{1 . 2 . 3 . 4} . \frac{d}{n^4} + \text{etc.}$$

26. Das beständige Unterschiedsglied in der interpolirten Reihe ist für eine Reihe der ersten Ordnung $= \frac{a}{n}$;

für eine der zweyten $= \frac{b}{n^2}$; für eine der dritten $= \frac{c}{n^3}$; für eine der vierten $= \frac{d}{n^4}$, u. s. f. wenn die beständigen Unterschiede in den ursprünglichen Reihen sind, a, b, c, d, etc. Denn wenn die Zähler der Coefficienten entwickelt, und nach den Potenzen von z geordnet werden, so ergeben sich rationale ganze Functionen von z, deren letzte Differenzenreihen einerley sind mit denen einer Gleichung von dem Grade der höchsten Potenz von z in dem Zähler, (24.). Da der Coefficient von z in den Factoren jedes Coefficienten der Reihe = 1 ist, so ist, für z alle ganze Zahlen, nach ihrer Folge gesetzt, der erste Unterschied in dem ersten Coefficienten = 1; der zweyte beständige Unterschied in dem zweyten = 1 . 2; der dritte beständige Unterschied in dem dritten = 1 . 2 . 3; der vierte beständige Unterschied in dem vierten = 1 . 2 . 3 . 4, u. s. f. (eb. das.). Also ist der beständige Unterschied des zweyten Theils von y $= \frac{a}{n}$, des dritten $= \frac{b}{n^2}$; des vierten $= \frac{c}{n^3}$; des fünften $= \frac{d}{n^4}$, u. s. w. Der beständige Unterschied für y selbst ist dem beständigen Unterschiede des letzten Theils gleich.

27. Exempel. Es werden in der Reihe der Würfel, 1, 8, 27, 64, 125 etc. zwischen die Würfel von 4 und 5 drey eingeschoben, nämlich die von 4,25; 4,50; 4,75, woran sich der von 5 anschließt. Hier ist das beständige Glied der dritten Unterschiede das gleichnamige für die ursprüngliche Reihe, 6, durch 4^3 oder 64 dividirt.

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$(4,00)^3 = 64,000000$	12,765625	1,593750	0,093750
$(4,25)^3 = 76,765625$	14,359375	1,687500	0,093750
$(4,50)^3 = 91,125000$	16,046875	1,781250	
$(4,75)^3 = 107,171875$	17,828125		
$(5,00)^3 = 125,000000$			

28. Die Formel in (25) wird besonders zum Einschalten einer Größe zwischen andre gleichartige gebraucht, so daß sie nach demselben Gesetze wie diese gebildet sey, wenn gleich dieses Gesetz nicht analytisch gegeben, sondern nur mittelbar aus individuellen Größen, wie in allen mathematischen Tafeln, oder auch empirisch durch Beobachtungen erhalten wird, (s. Einschalten).

29. Zur allgemeinen Darstellung einer Größe aus ihrer Stelle und den ersten Gliedern der Differenzreihen ist die Formel (7) bequemer. Nur müssen die Werthe von x nicht auf ganze Zahlen eingeschränkt werden, weil das Gesetz der Formation bleibt, wenn x einen gebrochnen Werth $\frac{z}{n}$ hat.

30. In der Formel (7) für das Glied in der Stelle x setze man statt $x - 1$; $x - 2$; $x - 3$; etc. allgemeiner $x - m$; $x - n$; $x - p$, etc. so wird nun y durch die Glieder bestimmt, welche zu den Stellen 0, m, n, p, etc. gehören, anstatt daß in (7) die Größe y durch die Glieder in den Stellen 0, 1, 2, 3, etc. bestimmt wird. Für die Factoren, a, $\frac{1}{2}$b; $\frac{1}{6}$c, $\frac{1}{24}$d, setze man

B, C, D, etc. so ist

$$y = A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-n) + Ex(x-m)(x-n)(x-p) + \text{etc.}$$

Der Werth von y für jedes x ist der Werth einer Gleichung von dem Grade, welcher mit der Anzahl der Factoren in dem letzten Gliede, die nämlich x enthalten, übereinkommt. Sie sind also auch Glieder einer arithmetischen Reihe einer Ordnung desselben Grades, wenn die x in einfacher arithmetischer Reihe genommen werden. Die successiven Unterschiede der Werthe in den Stellen o, m, n, p, etc. kann man aber nicht auf dieselbe Art zur Bestimmung jedes andern Werthes anwenden, wie die Unterschiede der Werthe in den Stellen o, 1, 2, 3, etc. angewandt werden, da die Abstände der Glieder ungleich sind. In dem Artikel, Einschalten, wird gezeigt, wie die Unterschiede modificirt werden müssen, um sie zur Berechnung jedes Werthes y zu gebrauchen. Allein aus den Werthen von y in den Stellen o, m, n, p, etc. lassen sich die Coefficienten folgendergestalt bestimmen.

Es seyn für o, m, n, p, etc. als Werthe von x, die Werthe von y folgende: α, β, γ, δ, etc. so ist

$$\alpha = A$$
$$\beta = A + Bm$$
$$\gamma = A + Bn + Cn(n-m)$$
$$\delta = A + Bp + Cp(p-m) + Dp(p-m)(p-n)$$

etc.

Aus diesen Gleichungen werden die Werthe von A, B, C, D, etc. nach der Reihe gefunden.

Geschichte der Untersuchungen über die arithmetischen Reihen.

Die ersten arithmetischen Reihen, welche man betrachtet hat, sind die Polygonalzahlen und die figurirten Zahlen. Sie finden sich schon in Stifels Arithmetica integra. Faulhaber, ein Rechenmeister zu Ulm um 1600,

suchte geheime Winke über die göttliche Regierung der Welt in den Pyramidalzahlen, fand aber doch auch cossische oder algebraische Ausdrücke für sie, also für Summen von Polygonalzahlen, das ist für die zweyten Summen einer gemeinen arithmetischen Reihe. Er fand allgemeine Ausdrücke für die Binomial-Coefficienten, die er pondera nannte. Dann fand er auch Formeln für die Summen der Potenzen, selbst für die Summen solcher Summen. Da Bernegger in Strasburg gelehrt hatte, wie die Würfel aus einer arithmetischer Progression erwachsen, so ward Faulhaber dadurch veranlaßt, dieses auf die höhern Potenzen auszudehnen, und berechnete die successiven Differenzen der Potenzen bis mit auf die zwanzigste Potenz, und fand für die beständigen Differenzen der Potenzen, deren Wurzeln um Eins zunehmen, das (20.) erwiesene Gesetz. (Kästners Gesch. der Math. 3r Bd. S. 111 ff.)

Wallis suchte das Verhältniß der Summe der Wurzeln, Quadrate, und höherer Potenzen bis zur sechsten, die Null mit gerechnet, zu der Summe von eben so vielen der größten unter ihnen gleichen Größen durch Induction. Z.B. Es ist

$$\frac{0+1+8+27+64+125}{125+125+125+125+125+125}=\frac{225}{750}$$

$=\frac{6}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$. Aus mehrern solchen Fällen schließt er, daß der Überschuß über $\frac{1}{4}$ immer sey $\frac{1}{4}$ dividirt durch die Anzahl der Glieder im Zähler nach der Null.

Für die Summen der vierten, fünften und sechsten Potenzen giebt er nur die von ihm entdeckten Formeln an, welche durch Induction nach der angeführten Methode zu finden schwer gewesen seyn muß. Sein eigentlicher Zweck ist, Reihen von unendlich vielen Gliedern zu summiren, deren erstes Null, und das letzte endlich ist, die zwischen ihnen liegenden also jedes von den nächsten unendlich wenig verschieden sind. Dieses wendet er auf Quadraturen und Cubaturen in der Geometrie an. Eine Reihe von unendlich vielen Größen, die von 0 an stetig zunehmen, es sey in arithmetischer Progression, oder wie die

Quadrate, Würfel, Biquadrate, und andere Potenzen arithmetisch proportionaler Größen, verhält sich zu der Reihe von so vielen, der größten in jener Reihe gleichen, Größen, wie folget: I. 1 : 2; II. 1 : 3; III. 1 : 4; IV. 1 : 5; etc. Das erste Verhältniß für arithmetisch proportionale, das zweyte für die Quadrate solcher Größen, das dritte für die Würfel, u. s. f. Dieses ist der Satz aus der Integralrechnung, $\int x^m dx = \frac{1}{m} x^{m+1}$, wenn das beständige Increment der Wurzeln als ein unendlich kleiner Factor betrachtet wird, um die Summe aller Glieder der Reihe endlich zu machen. Die Allgemeinheit jenes Verhältnisses gründet Wallis auf die Induction aus den berechneten Fällen. Nach einer hieraus ferner gefolgerten Analogie, die aber nicht als streng erwiesen angesehen werden kann, findet Wallis auch, wie eine unendliche Reihe von Quadratwurzeln, Cubikwurzeln, Biquadratwurzeln etc. aus Zahlen, die arithmetisch proportional sind, sich zu eben so vielen, der größten unter ihnen gleichen, Größen verhalten, nämlich II. $1 : 1\frac{1}{2}$; III. $1 : 1\frac{1}{3}$; IV. $1 : 1\frac{1}{4}$ etc. wo die römischen Zahlen den Grad der Wurzeln anzeigen. Hieraus folgert er für gebrochne Exponenten, wie $\frac{m}{n}$, das Verhältniß der Reihe der gebrochnen Potenzen zu eben so vielen, der größten unter ihnen gleichen, Größen, wie $1 : 1 + \frac{m}{n}$. Hier war ein wichtiger Satz aus der Integralrechnung gefunden, wenn man das Integriren als ein Summiren betrachtet.

Jakob Bernoulli erinnert gegen die von Wallis gebrauchte Methode der Induction, daß sie nicht wissenschaftlich genug sey, und zeigt, wie man die Verhältnisse scharf erweisen könne, wofern man sie nur erst durch Induction gefunden habe. Acta Erud. 1686. Operum T. I. nr. 24. Dieses ist aber noch ein unbequemer Weg. Weit besser ist das Verfahren die Summen der Potenzen

der natürlichen Zahlen zu finden, welches er in der Arte conjectandi. pag. 96. lehrt. Das Gesetz findet er durch Induction sehr sinnreich.

Newton hat zuerst die Formel (7.) für ein Glied einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung gegeben, in dem Lemmate V. L. III Princip. mathem. Phil. naturalis, wo er zeigt, wie durch irgend eine Anzahl gegebener Puncte eine krumme Linie von der parabolischen Gattung gezogen werden könne, sowohl für den Fall, da die Abstände der gegebenen Glieder gleich groß sind, als auch für den Fall, da die Abstände nicht gleich groß sind. In dem letztern Falle zeigt er, wie die successiven Unterschiede zunehmen, und durch die einfachen, doppelten, dreyfachen und folgende vielfachen Abstände zu theilen sind, wovon schon einiges in (30.) erwähnt ist. Die Interpolation war hier der Zweck. In einem Aufsatze von Newton, Methodus differentialis, ist das Verfahren etwas erläutert. Einen Commentar dazu liefert Jakob Stirling in der Schrift: Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Lond. 1730. 4. in dem zweyten Abschnitte.

Jakob Bernoulli zeigt in der Arte conjectandi pag. 98. nur an dem Beyspiele von den arithmetischen Reihen der dritten Ordnung, wie die Glieder der höhern arithmetischen Reihen aus den Anfangsgliedern der Hauptreihe, und der Differenzreihen gebildet werden, und wie die Summe einer gegebenen Anzahl Glieder gefunden wird.

De Lagny hat eine weitläufige Abhandlung über die höhern arithmetischen Reihen, und ihre Anwendung zur Auflösung der Gleichungen geliefert. Traité des progressions arithmétiques de tous les degrés à l' Infini. Mem. de l' Acad. des Sc. 1722. Er zeigt, wie die Glieder einer solchen Reihe aus den Anfangsgliedern der Hauptreihe und der Differenzreihen, die er nombres générateurs nennt, zusammengesetzt werden. Auch giebt

er die Formeln für diese Anfangsglieder. Das Verfahren ist aber nur Induction.

Die Formel (4.) irgend ein Glied einer arithmetischen Reihe der (n — 1)ten Ordnung durch die n nächst vorher gehenden Glieder auszudrücken, hat Moivre in seiner Doctrine of chances zuerst vorgetragen, nach Dan. Bernoulli's Anführung in den Comm. Petr. vet. T. III. p. 87. In der zweyten Ausgabe dieses Werks von 1738. ist die Formel S. 195 anzutreffen. Die erste Ausgabe ist von 1717. Die Formel (7.) für ein Glied der Hauptreihe durch die Anfangsglieder der Unterschiedsreihen ist das. S. 52 befindlich.

Friedrich Christ. Maier in einer Abhandlung de Arithmetica figurata ejusque usibus aliquot, Comm. Petr. vet. T. III. a. a. 1728 nennt die arithmetischen Reihen höherer Ordnungen series collectivas. Er zeigt, wie sie zu summiren sind, und wie man davon Gebrauch machen könne, theils zur Auflösung der Gleichungen, theils zur Entdeckung des Gesetzes der Binomial-Coefficienten. In einer andern Abhandlung eb. das. Propositiones cyclometricae aliquot, bedient er sich dieser Reihen, das Gesetz der Coefficienten in den Formeln für die Chorden der Vielfachen eines durch seine Chorde gegebenen Bogens zu entdecken.

Die beiden Formeln für das Glied einer Differenzenreihe (2.) und das Glied einer Hauptreihe (7.) hat Kästner zuerst allgemein erwiesen. Analysis endlicher Größen §. 724. 725. Seine Beweise sind in diesem Artikel gebraucht.

Euler gründet auf die Betrachtung der endlichen Differenzen die Differentialrechnung. Die beiden ersten Capitel seines Werks über diese handeln von den endlichen Differenzen und ihrem Gebrauche in der Lehre von den Reihen.

Man vergleiche noch Pasquich mathematische Analysis 1. Th. 16. Abschnitt.

Busse System der allgemeinen Differenzen in desselben Beyträgen zur Mathem. und Physik.

Hindenburg Übersicht der Hauptsätze der allgemeinen Differenzen und Summen, im Archiv der Mathematik. 1. Bd.

Die wichtige Lehre von den höhern arithmetischen Reihen wird in den Lehrbüchern nicht hinlänglich ausgeführt, oder sie wird gar vernachlässigt.

Arithmetische Scale ist die geometrische Reihe, nach welcher der relative Werth der Zahlziffern in ihren Stellen bestimmt wird, indem jede Ziffer der Factor zu einem gleichstelligen Gliede jener Reihe ist, so daß die Summe aller Producte aus jeder Ziffer in das zugehörige Glied der Reihe die ganze Zahl giebt. In dem dekadischen Zahlensystem, dem gewöhnlichen, ist die geometrische Reihe, 1 : 10 : 100 : 1000 : etc. Die Factoren dieser Glieder werden allein hingeschrieben, die Glieder aber in Gedanken zugesetzt. Allgemein kann jede ganze Zahl durch die Reihe, $a + br + cr^2 + dr^3 + er^4 +$ etc. dargestellt werden, wo die Buchstaben ganze Zahlen bedeuten, und a, b, c, d, etc. kleiner als r sind, auch o seyn können. Hier ist $1 : r : r^2 : r^3 :$ etc. die arithmetische Scale.

Ist die Zahl eine dekadische, und man will sie in eine Zahl nach einer andern Scale, oder einem andern System verwandeln, so dividire man sie durch r der Rest ist $= a$. Den Quotienten dividire man wieder durch r, so ist der Rest $= b$, den zweyten Quotienten dividire man durch r, so ist der Rest $= c$. Der dritte Quotient durch r dividirt giebt den Rest d; der vierte den Rest e, u. s. f. Wo die Division aufgeht, ist der Factor, der zu einer Potenz von r gefunden werden soll, Null. Beyspiele s. in den Artikeln Dodekadik und Dyadik.

Eine Zahl, die nach einer andern Scale, als der dekadischen, ausgedruckt ist, in eine dekadische zu verwandeln, dividirt man sie fortgesetzt durch 10, und sondert die Reste

ab. Diese geben nach der Reihe die Einer a, die Zehner b, die Hunderte c, die Tausende d, u. s. f. Exempel a. a. O.

Büffon hat der geometrischen Reihe, welche einem Zahlensystem zum Grunde liegt, den Namen, Echelle arithmétique, gegeben. Mem. de l' Ac. des Sc. 1741. Mehreres in dem Artikel: Zahlensystem.

Arithmologia ist der Titel eines Buchs über die Zahlen und ihre geheimen Eigenschaften von dem Jesuiten Kircher: Arithmologia sive de abditis numerorum mysteriis. Romae 1665. 301 pag. in 4. darin gute historische Untersuchungen über Zahlbuchstaben und Zahlziffern; Beschreibung der magischen Quadrate und der Planetensiegel, wozu jene angewandt wurden; viele cabbalistische Thorheiten, die mit Zahlen und andern Symbolen ehedem getrieben sind, endlich des Verfassers phantastische Bemerkungen über gewisse Beschaffenheiten der Zahlen, dergleichen schon bey den jüngern Pythagoräern vorkommen.

Arithmomanctica, dasselbe was Arithmetica divinatoria, oder errathende Rechenkunst.

Arithmonomia, dasselbe was Arithmetik, insbesondere die theoretische.

Armilla, der ringförmige Raum zwischen zwey concentrischen Kreisen. Torricelli gebraucht diesen Ausdruck, (Opera geom. P. II. p. 136). Das Wort bedeutet einen Armreif, dergleichen bey den alten Römern ein Ehrenzeichen für Soldaten war.

Es sey a der Halbmesser des größern Kreises, b des kleinern, und $1:\pi$ das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, so ist die Fläche des erstern $= \pi aa$, des andern $= \pi bb$; also die Fläche des Ringes $= \pi(aa - bb)$ $= \pi(a + b)(a - b)$.

Die Ringfläche ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser die mittlere geometrische Proportionale

zwischen der Summe und dem Unterschiede der beiden Halbmesser a und b ist.

Ars major, oder magna, italienisch, Arte maggiore, hieß im 16ten Jahrhunderte die Algebra, im Gegensatze gegen die gemeine Rechenkunst, s. Algebra.

Articulus, eine durch 10 theilbare Zahl.

Artificialis numerus, sinus, tangens, ist der Logarithme einer Zahl, eines Sinus, einer Tangente u. dgl.

Assignabilis quantitas, eine Größe, die sich mit jeder bestimmten Größe vergleichen läßt, es sey auf rationale oder irrationale Art, im Gegensatze gegen unendlich kleine Größen, die nur in so fern Größen heißen können, als sie mit andern ihrer Art vergleichbar sind.

Asymmetria, bey den Analysten des 17ten Jahrhunderts dasselbe, was man jetzt Irrationalität oder Incommensurabilität nennt, ein Verhältniß zweyer Größen, das sich in ganzen Zahlen nicht vollkommen genau ausdrucken läßt, wie das zwischen 1 und $\sqrt{2}$, der Seite eines Quadrats und der Diagonale, dem Durchmesser eines Kreises und dem Umfange.

Asymptote ist eine Linie, welche unbestimmt verlängert neben einer krummen, gleichfalls unbestimmt verlängerten, Linie sich so erstreckt, daß der Abstand dieser von jener kleiner als jede angebliche Größe wird, ohne daß sich beide Linien schneiden. Das Wort ist zusammengesetzt aus dem verneinenden 'α, aus συν, mit, oder zusammen, und πιπτειν, fallen.

Eine Asymptote kann eine gerade oder eine krumme Linie seyn. Doch versteht man unter Asymptote schlechthin eine gerade.

Die Hyperbel hat zwey Asymptoten, die durch ihren Mittelpunct gehen, und mit der Axe gleich große

Winkel machen. Ihre vier Zweige nähern sich diesen beiden geraden Linien, nach beiden entgegengesetzten Richtungen derselben, ohne sie eher als in einer unendlichen Entfernung zu erreichen. In Fig. 31. Tab. II. ist ein Zweig einer Hyperbel mit seiner Asymptote CS abgebildet. Es ist C der Mittelpunct der Hyperbel, A ihr Scheitel, Cx die Axe, AMS der Zweig; CP die auf der Asymptote genommene Abscisse, PM die mit der andern Asymptote parallele Ordinate, so wie AB durch den Scheitelpunct A. Die Gleichung zwischen CP und PM ist diese: $CP \times PM = CB \times AB$. Folglich wird PM immer kleiner, je größer CP genommen wird, und da für CP keine endliche Gränze des Wachsthums ist, so ist auch keine endliche Gränze des Abnehmens für PM. Daher hat auch der senkrechte Abstand eines Punctes der Hyperbel von der Abscissenlinie CS keine endliche Gränze des Abnehmens.

Die Conchoide stellt auch die Annäherung einer krummen Linie an eine gerade, ohne eine endliche Gränze derselben, sehr gut dar. In (Fig. 32. Tab. II.) ist BMN ein Zweig der Conchoide, C der Pol derselben, APS die Abscissenlinie, PM eine senkrechte Ordinate, CAB die senkrechte auf AS, AB die gegebene Linie, welcher QM gleich ist. Nun ist $CQ : AC = QM : PM$. Da CQ ohne Ende wachsen kann, so nimmt PM ohne Ende ab, so daß in jeder endlichen Entfernung AP die Ordinate PM noch endlich bleibt.

Die Asymptote ist als berührende Linie in einem unendlich entfernten Puncte anzusehen. Eine gerade Linie, die durch C an einen Punct des Zweiges AS der Hyperbel (Fig. 31.) gezogen wird, schneidet den entgegengesetzten Zweig an der andern Seite von CS jenseits C. Fällt sie in die Asymptote, so berührt sie die Hyperbel an zwey entgegengesetzten, aber unendlich entfernten Puncten. Da aber an der Hyperbel eine berührende Linie nur einen einzigen Punct mit der krummen Linie gemein haben kann, so müssen die beiden unendlich entfernten Puncte für einen

einzigen gehalten werden. Um sich dieses Paradoxon zu erläutern, lasse man die Hyperbel durch einen bewegten Punct beschreiben. Er fange in A seinen Weg an, setze ihn auf dem Zweige AS ins Unendliche fort, bis er in die Asymptote fällt. Diese gehört sowohl zu dem Zweige AS, als zu dem entgegengesetzten an derselben jenseits C. Den beschreibenden Punct in die Asymptote fallen lassen, heißt daher sich ihn in den beiden unendlich entfernten Puncten derselben zugleich gedenken, welches nichts widersprechendes ist, weil hier von keinem physischen Puncte oder von wirklicher Bewegung die Rede ist. Bey fortgesetzter Bewegung geht der Punct auf dem entgegengesetzten Zweige zurück, und beschreibt solchergestalt die ganze Hyperbel durch stetige Bewegung, wenn die Asymptote als berührende in einem Puncte betrachtet wird.

Eben so kann man zwey unendlich entfernte Puncte der Conchoide, wo sie die Abscissenlinie berührt, als einen einzigen ansehen. Wenn AP (Fig. 32.) unendlich groß ist, so ist CQ mit AS parallel, und schneidet, so wenig sie sich auch weiter von AS abwärts dreht, die Abscissenlinie nach der entgegengesetzten Gegend von AS auf dem Theile As, so daß der beschreibende Punct auf der Conchoide, indem er unendlich weit entfernt nach N hinaus gedacht wird, auch auf der entgegensetzten Seite Bn unendlich weit gedacht werden muß.

Die Asymptoten sind bey der Betrachtung der krummen Linien wichtig. Sie zeigen, wo sie Statt finden, die Richtung an, welcher ein Zweig einer krummen Linie zuletzt sich immer mehr nähert, wie auch sonst die Gestalt desselben beschaffen seyn mag.

Um die Beschaffenheit der Annäherung einer krummen Linie zu ihrer Asymptote zu erkennen, sucht man eine Gleichung zwischen den Abscissen auf der Asymptote genommen und den Ordinaten, mit Weglassung der Glieder, welche das Quadrat und die höhern Potenzen der Ordinate enthalten. So erhält eine solche Gleichung die Form

$xy = ab$, oder $x^2y = a^2b$; oder $x^n y = a^n b$. Die erstere giebt eine Hyperbel, die ein Kegelschnitt ist, die andern Formen geben Hyperbeln höherer Arten. Je höher die Potenz der Abscisse ist, desto schneller nähert sich die krumme Linie ihrer Asymptote. Die krumme Linie, deren Gleichung ist $x^n y = a^n b$, heißt die krummlinichte Asymptote.

Wenn ein ins Unendliche fortlaufender Zweig einer krummen Linie keine gerade Linie zur Asymptote hat, so mag doch ihre Beschaffenheit im Unendlichen durch eine einfachere Gleichung ausgedruckt werden, als die vollständige Gleichung für die Linie ist, und dadurch ihre Beschaffenheit auch für sehr große Abscissen faßlicher zu erkennen geben. Eine solche einfachere Gleichung sey $at = u^2$, für eine andere Abscissenlinie als diejenige, auf welche sich die Gleichung zwischen den Coordinaten x und y für die krumme Linie bezieht. Auf der neuen Abscissenlinie sey die Abscisse t. und die normale Ordinate $= u$. Die krummlinichte Asymptote ist demnach eine Parabel mit dem Parameter a, und ihre Are fällt in die neue Abscissenlinie.

Die Gleichung für die krummlinichte Asymptote mag auch seyn $a^2t = u^3$, oder $at^2 = u^3$, oder überhaupt $a^m t^n = u^{m+n}$. Wäre der Exponens von u kleiner als der von t, so nähme man die mit den Ordinaten parallele durch den Anfangspunct der Abscissen zur Abscissenlinie, und verwechselte die Benennungen und Bezeichnungen der Ordinaten und Abscissen. Die Ordinaten u werden zwar immer größer, und zuletzt unendlich groß, in Vergleichung mit jeder gegebenen Linie, bleiben aber doch in Vergleichung mit den Abscissen unendlich klein. Die Richtung der krummen Linie nähert sich immer mehr der Richtung der Are oder Abscissenlinie, ob sie sich gleich unendlich davon entfernt.

Die algebraischen Linien haben daher für ihre ins Unendliche fortlaufenden Zweige entweder eine hyperbolische Asymptote längs einer geraden Linie, der sich sich ohne Ende nähern, oder eine parabolische Asymptote,

deren Richtung derjenigen einer geraden Linie immer näher kommt.

In dem Artikel, krumme Linien, werden mehrere Beyspiele von den Asymptoten beiderley Art, und ihrer Herleitung aus der Gleichung für eine krumme Linie mitgetheilt.

Von den Asymptoten der Hyperbel handelt Apollonius in dem zweyten Buche seines Werks über die Kegelschnitte, wo auch diese Benennung gebraucht wird. Sie sind aber schon vor ihm den Geometern bekannt gewesen. Archimedes nennt sie gerade Linien, welche dem Schnitte des stumpfwinklichten Kegels (der Hyperbel) am nächsten sind. (Vorrede zu der Schrift von Konoiden und Sphäroiden, vergl. 28ten Satz.). Ein Italiener, Franciscus Barocius, hat in einem weitschweifigen Werke (Venedig 1586, auf 269 Quartſ.) dreyzehn Arten angegeben, wie zwey Linien gezogen werden können, die sich immer näher kommen, ohne sich zu schneiden, so weit sie auch verlängert werden. Es ist immer die Hyperbel, ausser nach der zehnten und eilften Art. Nach der letztern dieser ist es die Konchoide, nach der zehnten eine krumme Linie, die er selbst nicht näher zu bestimmen vermag. Sie enthält die Durchschnitte einer Folge von Kreisen, die eine gemeinschaftliche berührende haben, und einer zugeordneten Folge von Parallelen mit jener, die sich derselben, aber mit abnehmenden Abständen von einander, nähern. Ein Theil dieses Werkes ist polemisch. Der Verfasser will die Fehler verschiedener Geometer, die sie in ihren Beweisen von den Asymptoten begangen haben, berichtigen, und findet selbst den Apollonius nicht tadelfrey.

Newton hat zuerst die krummlinichten Asymptoten bey den Linien vom dritten Grade (oder krummen der zweyten Ordnung) angegeben.

Ausführlichern Unterricht über die Asymptoten jeder Art findet man in

Euleri Introd. in Analysin Infin. T. II. Cap. 7. 8.
Cramer Analyse des lignes courbes. Ch. 8.

Aufgabe (Problema) ist eine Frage, wie etwas Unbekanntes aus gegebenen Größen unter gewissen Bedingungen gefunden werden möge, in der Geometrie insbesondere, eine Construction zu erfinden, die das verlangte leistet, z. B. ein Rechteck in ein Quadrat oder in ein anderes mit einer gegebenen Seite zu verwandeln; durch drey Puncte einen Kreis zu beschreiben; in einem Kreise ein Dreyeck zu zeichnen, dessen Seiten, wann nöthig, verlängert, jede durch einen gegebenen Punct gehen. Eine Aufgabe kann auch zum Gegenstande den Beweis eines Satzes haben, der aus Induction wahr gefunden ist, oder als wahr behauptet wird. Die Frage selbst, ihre Auflösung, und der Beweis der Richtigkeit des Verfahrens müssen in dem Vortrage deutlich unterschieden werden. Bey den Anwendungen ist es sehr bequem, die Vorschriften des Verfahrens kurz vorzufinden, ohne daß man nöthig habe, die Vorbereitungen zu der Auflösung und die Beweise wieder durchzugehen, nachdem man sie einmahl gehörig gefaßt und geprüft hat.

Eine bestimmte Aufgabe (Problema determinatum, limitatum) ist eine solche, die nur auf eine Art oder nur auf einige, der Anzahl nach bestimmte, Arten aufgelöset werden kann. Eine unbestimmte Aufgabe (Problema indeterminatum, illimitatum) ist eine solche, die unzählich viele Auflösungen zuläßt. Z. B. ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Winkel an der Grundlinie doppelt so groß sind als der Winkel am Scheitel, ist nur auf eine Art möglich (Euklides IV. 10.); ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Umfang und Inhalt gegeben sind, ist auf zweyerley Art möglich, wofern der Inhalt nur nicht größer ist als der Inhalt eines gleichseitigen von demselben Umfange. Es ist eine Aufgabe mit zwey Auflösungen, aus zwey gegebenen Puncten an einen Punct eines gegebenen Kreises Linien so zu ziehen, daß die Linie, welche die beiden andern Durchschnittspuncte jener Linie und des Kreises verbindet, der Linie durch die beiden gegebenen Puncte parallel sey. (S. Analysis als Methode,

P

5te Aufgabe, und mehrere daselbst, wie auch in dem Artikel, Anwendung der Analysis auf die Geometrie.). Eine unbestimmte Aufgabe ist, über einer gegebenen Linie ein Dreyeck zu zeichnen, worin der Winkel, welcher jener Linie gegen über steht, eine gegebene Größe habe; oder ein Dreyeck, worin die beiden andern Seiten ein gegebenes Verhältniß haben. Für beide ist der Kreis der Ort der Auflösung.

In der Analysis ist eine Aufgabe bestimmt, wenn so viele unabhängige Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind. Sind weniger Gleichungen da als unbekannte Größen, so ist die Aufgabe unbestimmt. Z. B. Zwey Quadrate von rationalen Wurzeln zu finden, deren Summe das Quadrat einer rationalen Wurzel ist. Oder: eine Zahl zu finden, die durch m dividirt den Rest p, durch n dividirt den Rest q lasse.

Bey der Auflösung bestimmter Aufgaben muß immer gezeigt werden, wenn, wie, und auf wie vielerley Arten die Aufgabe möglich ist. Die Alten nannten dieses διορισμος, determinatio. Pappus in coll. mathem. L. VII. praef.

Diophanteische Aufgaben sind solche algebraische, deren Auflösungen in ganzen oder in rationalen gebrochnen Zahlen verlangt werden, dergleichen die eben angeführten sind. S. unbestimmte Analytik.

Linearische Aufgabe ist eine geometrische, die mittelst des Durchschnitts zweyer geraden Linien aufgelöset werden kann. Damit stimmen in der Algebra die Aufgaben, welche auf eine Gleichung vom ersten Grade führen, worin die unbekannte Größe nur auf eine Dimension steigt.

Ebene Aufgabe (Problema planum) ist eine solche, die mittelst der Durchschnitte einer geraden Linie und eines Kreises, oder eines Kreises mit einem andern Kreise aufgelöset wird. Damit stimmen in der Algebra die Aufgaben, welche auf eine Gleichung vom zweyten

Grade führen, da hierin die unbekannte Größe zwey Dimensionen erhält.

Körperliche Aufgabe (Problema solidum) ist in der Geometrie eine solche, die nur mittelst der Durchschnitte eines Kreises und eines Kegelschnittes aufgelöset werden kann, z. B. die Aufgabe zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere in geometrischer Progression zu finden. Eine solche ist, ein gleichschenklichtes Dreyeck zu zeichnen, in welchem die Winkel an der Grundlinie jeder dreymahl so groß sind als der gegen über stehende Winkel, wodurch sich das ordentliche Siebeneck in einen Kreis einschreiben läßt. Sie führt auf eine Gleichung vom sechsten Grade, die aber einer vom dritten Grade gleich zu halten ist. (Goniometrie, VI.) Sie wird durch eine Parabel und den Kreis construirt. So ist es auch eine körperliche Aufgabe, ein Dreyeck zu zeichnen, in welchem die Winkel an der Grundlinie jeder viermahl so groß sind, als der gegen über liegende Winkel, wodurch ein ordentliches Neuneck in einen Kreis eingeschrieben wird. Die Aufgabe führt auf eine Gleichung vom achten Grade, die einer vom vierten Grade gleich zu halten ist. Sie wird also durch den Kreis oder auch eine Hyperbel und die Parabel construirt.

Die Benennungen, ebene und körperliche, für Aufgaben rühren daher, daß der Kreis eine Figur ist, deren Zeichnung in einer Ebene unmittelbar ausgeführt werden kann, dagegen die Kegelschnitte durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene gebildet werden. Man muß eine gewisse Zusammensetzung von Linien machen, um sie mit stetiger Bewegung in einer Ebene zu beschreiben.

Überkörperliche Aufgabe (problema sursolidum) ist eine solche in der Geometrie, die nicht anders als durch krumme Linien von einer höhern Gattung als die Kegelschnitte sind, aufgelöset werden kann.

Örtliche Aufgabe (Problema locale) ist eine unbestimmte Aufgabe, zu deren Auflösung jeder Punct

einer gehörig zu bestimmenden Linie dient. Sie ist eine **einfache**, wenn dieser **Ort** eine gerade Linie ist, eine **ebene**, wenn es eine Kreislinie, eine **körperliche**, wenn es der Umfang eines Kegelschnittes, eine **überkörperliche** (problema surſolidum), wenn es eine Linie von einer höhern Ordnung ist.

Ein Lehrsatz wird in eine Aufgabe verwandelt, wenn die Relation der Größen, welche in dem Lehrsatze ausgesagt ist, zur Bedingung gemacht wird. Z. B. die Aufgabe, zwischen zwey Linien eine mittlere geometrische Proportionale zu finden, enthält als Bedingung, was in dem Satze von der auf einen Durchmesser eines Kreises senkrechten Ordinate ausgesagt wird. Diese Art Aufgaben sind die einfachsten. Sie enthalten eine einfache Bedingung. Eine andere Art Aufgaben ist die, wo mehrere Bedingungen zugleich zu erfüllen sind, z. B. einen Kreis zu ziehen, der zwey gegebene gerade Linien berührt, und durch einem gegebenen Punct geht. Die Form, welche man einen Satze geben mag, ob die eines Lehrsatzes, oder die einer Aufgabe, ist zwar nicht etwas sehr wesentliches, allein es scheint doch, daß man Relationen der Größen in Sätzen, Bedingungen in Aufgaben aufstellen müsse. Z. B. die Relation zwischen dem Sonnenjahre, dem periodischen Monathe, und dem synodischen Monathe sollte durch einen Lehrsatz dargestellt werden. Daraus erhalten dann die Aufgaben, den einen oder den andern Monath zu finden, ihre Auflösung, gleichsam als Folgerungen.

Merkwürdige Aufgaben aus der reinen Mathematik, welche zu ihrer Zeit die Mathematiker beschäftigt haben, sind, die Beaunische — die Delische — die Florentinische — die Isoperimetrische — die allgemeine der alten Geometer für Kegelschnitte — die Keplerische — die Aufgabe von der Quadratur des Kreises — die Aufgaben von den Trajectorien, den rechtwinklichten und den reciproken — die Aufgabe, einen geradlinichten Winkel in drey gleiche Theile zu theilen.

Aus der angewandten Mathematik: die Alhazenische, die Ballistische — die Aufgabe von drey Körpern, wie

man sie kurz nennt, welche einen großen Theil der physischen Astronomie ausmacht — von der elastischen Krümmung — die Aufgabe von der Fall-Linie, auf welcher ein schwerer Punct am schnellsten fällt (brachystochrona) — auf welcher die Zeiten des Falles gleich groß sind (isochrona, tautochrona) — von der Zusammensetzung vollkommener Fernröhre — von der Gleichgewichtslinie oder Kettenlinie — von der Figur schwingender Saiten — von der Figur eines Körpers zum geringsten Widerstande in einem flüssigen Mittel. — Von diesen letztern Aufgaben in der zweyten Abtheilung.

Aufheben eines Bruches (abbreviiren, verkleinern) ist das Verfahren, wodurch der Bruch in kleinern Zahlen ausgedruckt wird, ohne seinen Werth zu ändern. Es geschieht durch die Division des Zählers und Nenners mit dem gemeinschaftlichen Factor oder Theiler, wenn ein solcher vorhanden ist. Wie dieser gefunden wird, lehrt der Artikel: Theiler, gemeinschaftlicher, der Zahlen.

Wenn Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so läßt sich der Bruch in kleinern Zahlen nicht darstellen, ohne etwas an dem Werthe zu ändern. Bey großen Zahlen im Zähler und im Nenner kann man oft unbedenklich etwas von der Genauigkeit der Bequemlichkeit in der Rechnung mit dem Bruche, und der faßlichern Vorstellung aufopfern.

Wallis giebt in seiner Algebra, die 1685 zuerst Englisch herauskam, eine Methode an, Brüche in kleinern Zahlen auszudrucken, so daß sie mit einer gewissen Anzahl Ziffern nicht genauer gefunden werden mögen. Er zeigt sie nur an einem Beyspiele, weitläufig und dunkel.

Die Rechnung für dieses einzige Beyspiel nimmt sechs Folioseiten ein, um zwey Brüche, deren einer größer, der andere kleiner als ein vorgegebener Bruch mit 7 Ziffern im Zähler und Nenner ist, zu finden. Allein nach dem

von ihm angewandten Verfahren lassen sich leicht allgemeine Formeln berechnen, und man findet dadurch für den abgekürzten Bruch dieselben Ausdrücke, welche die Reduction eines continuirlichen oder Kettenbruchs giebt, in der That auf demselben Wege, auf welchem man in der gemeinen Arithmetik den gemeinschaftlichen Theiler von Zähler und Nenner findet.

Der gegebene Bruch sey $\frac{a}{b}$, und a größer als b. Es sey

$\frac{a}{b} = m + \frac{c}{b}$	also	$a = mb + c$
$\frac{b}{c} = n + \frac{d}{c}$	"	$b = nc + d$
$\frac{c}{d} = p + \frac{e}{d}$	"	$c = pd + e$
$\frac{d}{e} = q + \frac{f}{e}$	"	$d = qe + f$
$\frac{e}{f} = r + \frac{g}{f}$	"	$e = rf + g$
etc.		etc.

wo alle Buchstaben ganze Zahlen bedeuten. Es ist c kleiner als b; d kleiner als c; e kleiner als d, u. s. f.

Man multiplicire die Gleichung

I. $a = mb + c$

mit n, und substituire für nc seinen Werth, $b - d$, so ist

II. $na = (mn + 1)b - d$.

Diese werde mit p multiplicirt, und für pd der Werth, $c - e$, gesetzt, so ist

$$npa = (mnp + p)b - c + e,$$

dazu die Gleichung I. addirt, wird erhalten

III. $(np + 1)a = (mnp + m + p)b + e$.

Durch die Multiplication mit q und Substitution für q wird diese,

$$(npq+q)a=(mnpq+mq+pq)b+d-f.$$

Die Vereinigung mit II. giebt

$$\text{IV. } (npq+n+q)a=(mnpq+mn+mq+pq+1)b-f$$

u. s. f.

Die genäherten Werthe von $\frac{a}{b}$ sind also

$$\text{I. } \frac{m}{1}; \quad \text{II. } \frac{mn+1}{n}; \quad \text{III. } \frac{mnp+m+p}{np+1};$$

$$\text{IV. } \frac{mnpq+mn+mq+pq+1}{npq+n+q}$$

$$\text{V. } \frac{mnpqr+mnp+mnr+mqr+pqr+m+p+r}{npqr+np+nr+qr+1};$$

etc.

Es erhellt, daß der Zähler jedes Bruchs das Aggregat von dem Producte des Zählers des vorhergehenden Bruches in den gleichstelligen Quotienten m, n, p, q, r, etc. und dem Zähler des zweyten vorhergehenden Bruchs ist. Man setze nur in der Reihe noch den Bruch $\frac{1}{0}$ vor, um das Gesetz auch auf den zweyten Bruch anzuwenden. Eben so verhält es sich mit den Nennern. Die Brüche sind abwechselnd kleiner und größer als der vorgegebene Bruch $\frac{a}{b}$, weil die Vorzeichen des weggelassenen Bruches wechseln. Da die Reste c, d, e, f, g, etc. so klein sind als sie seyn können, so sind die genäherten Werthe genauer als alle, die mit kleinern Zahlen ausgedruckt werden.

Exempel. Es sey $\frac{a}{b}=\frac{8376571}{2684769}$.

Hier ist m = 3; n = 8; p = 3; q = 46; r = 1; s = 1, etc. also die genäherten Werthe des Bruches.

I. $\frac{3}{1}$; II. $\frac{25}{8}$; III. $\frac{78}{25}$; IV. $\frac{3613}{1158}$; V. $\frac{3691}{1183}$; etc.

Dieses ist der Bruch, auf dessen Reduction Wallis sechs Folioseiten verwendet.

Durch dieses Verfahren lassen sich Irrationalzahlen durch eine Reihe rationaler Brüche darstellen, die sich dem völligen Werthe mehr nähern als alle, die mit kleinern Zahlen ausgedruckt werden. Z. B. man habe gefunden, daß $\sqrt{3} = 1,7320508075 \ldots$ ist. Hier ist a = 17320508075 . . .; b = 10000000000 . . . ferner m = 1; n = 1; p = 2; q = 1; r = 2; s = 1; t = 2; etc. Also ist die Reihe der convergirenden Brüche für die Quadratwurzel aus 3 diese:

$\frac{1}{1}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{19}{11}$; $\frac{26}{15}$; $\frac{71}{41}$; $\frac{97}{56}$; $\frac{265}{153}$; $\frac{362}{209}$; $\frac{989}{571}$; $\frac{1351}{780}$; $\frac{3691}{2131}$; etc.

Mittelst der Werthe der Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$, etc. werden die Brüche, woraus die Kettenbrüche bestehen, gefunden.

Auflösung ist die wohl geordnete Darlegung des Verfahrens, wodurch das zufolge einer Aufgabe gesuchte erhalten wird. Es ist mehr als eine Antwort, die auf bestimmte Rechnungsfragen gegeben wird.

Die reinen geometrischen Auflösungen werden allein durch Zeichnung schicklicher Linien für den Verstand bewerkstelligt, so daß sie durch ihre Durchschnitte die gesuchten Größen darstellen, wenn die Aufgabe eine bestimmte ist, oder daß jeder Punct derselben der Aufgabe

ein Genüge thut, wenn die Aufgabe eine unbestimmte ist. Wie man hiebey verfährt, ist in dem Artikel, Analysis als Methode, theils im Allgemeinen, so weit sich darüber Vorschriften geben lassen, theils in Beyspielen gewiesen. Man sehe auch den Artikel, Ort, geometrischer. Wird eine geometrische Aufgabe durch Hülfe allgemeiner Rechnung aufgelöset, so ist die Auflösung eine gemischte, insbesondere eine trigonometrische, wenn die trigonometrischen (goniometrischen) Formeln dabey angewandt werden, (s. Anwendung der Analysis auf die Geometrie). Eine mechanische Auflösung einer geometrischen Aufgabe ist eine solche, bey welcher man sich einer krummen Linie bedient, zwischen deren Coordinaten keine algebraische endliche Gleichung Statt findet. Weil einige dieser Linien, als die Spiralen, die Cykloide, die Epicykloiden, die Quadratrix, durch gewisse Bewegungen beschrieben werden, und daher mechanische heißen, so ist eine Auflösung (oder Construction) vermittelst derselben eine mechanische, die aber doch bloß im Verstande geschieht. Man nennt auch die Auflösung einer geometrischen Aufgabe eine mechanische; wenn sie an einer wirklichen Zeichnung durch sinnliche Werkzeuge ausgeführt wird, z. B. wenn eine senkrechte Linie mittelst eines rechtwinklichten Dreyecks oder Winkelhakens gezogen, ein Winkel durch den Transporteur gezeichnet, eine Ellipse, mittelst eines dazu dienlichen Werkzeuges mit stetiger Bewegung eines Stiftes beschrieben wird. Die praktische Richtigkeit einer solchen Auflösung beruht auf der Genauigkeit des Werkzeuges und der Aufmerksamkeit bey ihrem Gebrauche. Es giebt auch eine empirische Auflösung in der Geometrie, bey der man sich einer positio falsi bedient, z. B. wenn eine gerade Linie in eine gleiche Anzahl Theile durch Versuche unmittelbar getheilt wird; wenn ein ordentliches Vieleck in einem Kreise durch Eintragung einer, zum Versuche angenommenen, nöthigen Falls nach und nach veränderten Chorde eingeschrieben wird.

Eine arithmetische Auflösung ist die Beantwortung einer Rechnungsfrage durch Zahlenrechnung, den Regeln

für den Fall der Frage gemäß. Eine **algebraische** Auflösung ist die Erfindung der Gleichung, welche die Verbindung zwischen den gegebenen und gesuchten Größen allgemein darstellt, ohne auf eine bestimmte Quantität zu sehen. Wenn in den Bedingungen der Aufgabe schon so viele Gleichungen gegeben werden, als unbekannte Grössen zu bestimmen sind, so hat die Auflösung wenig Schwierigkeit. Es kommt dabey nur auf eine geschickte Auswahl der Größen an, die gesucht werden sollen, da es oft dienlich ist, nicht diejenigen unmittelbar zu suchen, nach welchen gefragt wird, sondern andere, aus welchen sie bequem gefunden werden können, wenn für diese die Gleichungen eine einfachere Form erhalten als für jene. Wenn aber in der Aufgabe nicht alle Data zu den nöthigen Gleichungen liegen, so müssen diese aus den Lehrsätzen über die Formen der Größen, welche in der Aufgabe vorkommen, geholt werden. Die Aufgabe kann auch unbestimmt seyn, in welchem Falle man sie als eine solche behandelt, oder eine Bedingung hinzufügt, wodurch sie eine bestimmte wird.

Die Auflösungen in der eigentlichen Analysis, der endlichen sowohl als der unendlichen Größen, sind so mannichfaltig als die Gegenstände dieser weitläufigen Wissenschaft (s. Analysis, Differential-Rechnung, Integral-Rechnung). Man muß bey dem Studium dieser hohen Rechenkunst die Wege, wodurch die Analysten zu ihren Auflösungen, so wie auch zu den Aufgaben selbst gelangt seyn mögen, aufzuspüren, und dadurch sich selbst Fertigkeit in der Auflösung und auch der Aufsuchung von Aufgaben zu verschaffen suchen. Es ist vielleicht oft schwerer, Aufgaben zu machen, als vorgelegte Aufgaben aufzulösen. Beydes gehört zur Analytik oder der mathematischen **Auflösungskunst**, die ein Werk des Erfindungsgeistes ist, und nur da auf bestimmten Regeln beruht, wo man die Untersuchung auf solche Fälle von Verbindungen der Größen bringen kann, die vollständig entwickelt sind.

Augenpunct oder **Hauptpunct**, (Punctum oculi s. visus principale) ist in der Perspectiv der Punct auf der Tafel, wo die senkrechte von dem Auge auf sie gezogene Linie sie trifft, s. Perspectiv.

Ausdehnung oder **ausgedehnte Größe** (Extensio, extensum) ist zusammenhangende, gleichartige Vielheit.

Die körperliche Ausdehnung ist die allgemeine Form der Vorstellung eines Körpers, nach Absonderung jeder besondern Beschaffenheit und Wirksamkeit desselben. Wir können den Körpern alles nehmen, selbst die Wirklichkeit, nur nicht die Ausdehnung. Dadurch sind sie einer Gestalt und Größe fähig, und sind allein dadurch Gegenstände der Geometrie. Die Ausdehnung, von allen sinnlichen Beschaffenheiten befreyt, ist eine ursprüngliche, in unserm Geiste selbst gegründete, Form der Vorstellung, die allen Vorstellungen von wirklichen Körpern zum Grunde liegt. Man kommt nicht sowohl durch Absonderung der sinnlichen Eigenschaften auf die Vorstellung der Ausdehnung, sondern setzt diese voraus, um jene an diese zu knüpfen. Betastung und Gesicht geben uns, jedes nach seiner Art, ein sinnliches Bild der Ausdehnung. Die erstere läßt uns aber unmittelbar nur etwas Widerstehendes, verbunden mit andern Gefühlen erkennen; das Gesicht nur Licht und Farben. Unser Geist ist es, der sich vermittelst dieser sinnlichen vereinten Empfindungen Bilder eines zusammenhangenden, ohne Ende theilbaren Ganzen schafft. Aber eben diese Vereinigung ganz ungleichartiger sinnlicher Empfindungen zeigt, daß das Substrat, woran wir sie knüpfen, ein Product unsers Verstandes ist.

Diese metaphysischen Betrachtungen über den Gegenstand der Geometrie sollen dem Verstande nur das völlige Eigenthumsrecht daran zusichern. Wenn man aber auch die Ausdehnung als eine durch die Abstraction aller sinnlichen Eigenschaften erworbene Vorstellung betrachten, und in sofern als etwas empirisches ansehen wollte, so bleibt

doch die Form der Ausdehnung ganz das Product des Verstandes. In der That aber ist es einerley zu behaupten, daß wir an die schon in dem Geiste vorhandene allgemeine Form der Körper ihre sinnlichen Beschaffenheiten knüpfen, oder zu sagen, daß wir durch die Absonderung derselben bloß die Form ohne etwas wirkliches behalten. Nach beiden Vorstellungsarten gehört die allgemeine Form dem Geiste. Die Sinne geben nur Sinnliches zu erkennen.

Die formlose Ausdehnung, was man in der Physik und Metaphysik den Raum, den Inbegriff aller möglichen Stellen der wirklichen Körper, nennt, bietet dem Geometer nichts dar, was ihn beschäftigen könnte. Die Formen der Ausdehnung sind der Gegenstand seiner Untersuchungen. Diese geben wir ihr eigenmächtig, ohne sie von der Erfahrung zu entlehnen, ob gleich die sinnliche Betrachtung uns zur Erfindung derselben Veranlassung geben kann. Die gerade Linie lernen wir nicht an einem straff ausgedehnten Faden kennen, sondern nennen diese gerade, weil wir unsern ursprünglichen Begriff von einer geraden Linie daran versinnlicht antreffen. Läge der Begriff von einer geraden Linie nicht schon in unserm Vorstellungs-Vermögen, so würden wir an dem Faden nichts als eine körperliche Länge erblicken. Bey den weniger gemeinen Formen erhellt es gleich, daß der Begriff davon früher da ist als die sinnliche Darstellung. Man zeichnet eine Ellipse oder Parabel nach der angenommenen Regel ihrer Form, um sich diese zu versinnlichen; man giebt einem Körper die Form eines Sphäroids, eines Konoids, die man selbst geschaffen hat. Kepler sagt sehr richtig von dem Kreise: Specierum mathematicarum, quae Circulus dicitur, inest animae non tantum ut idea rerum externarum, sed etiam ut forma quaedam ipsius animae. Harmon. L. IV. cap. 7. p. 168. Unter den Alten behaupteten besonders die Platoniker, daß unser Geist selbst die mathematischen Formen und Verhältnisse erzeuge. Umständlich handelt hievon Proklus in seinem Commentar über das erste Buch der Euklideischen

Elemente, im 1ten und 2ten Buche. Aristoteles war der gegenseitigen Meynung.

Die alten Geometer ließen sich auf diese metaphysischen Betrachtungen über den Ursprung der geometrischen Begriffe nicht ein, vielleicht um auf keine Weise den Philosophen Gelegenheit zur Einmischung in ihre Wissenschaft zu geben. Euklides sagt kurz, ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat; eines Körpers Gränze ist Fläche; eine Fläche ist was nur Länge und Breite hat; das Äusserste einer Fläche sind Linien; eine Linie ist eine Länge ohne Breite; das Äusserste einer Linie sind Puncte.

Die auf irgend eine Art begränzte Ausdehnung ist der geometrische Körper. Seine Gränze, die an ihm, nicht als Theil von ihm, vorhanden ist, heißt seine Oberfläche. Diese von dem Körper abgesondert ist die Fläche, die zweyte Gattung der Ausdehnung. Ihre Gränzen sind die Umfangslinien, welche abgesondert Linien sind, die dritte Gattung der Ausdehnung. Zu diesen kommt noch eine besondere Gattung der Ausdehnung, die Winkel, so fern wir sie uns als etwas Zusammenhangendes, Gleichartiges, Theilbares bey der Vorstellung der Lage der Linien gedenken.

Die geometrische Ausdehnung ist durchaus etwas Stetiges, allenthalben Zusammenhangendes. Zwischenräume finden in ihr nicht Statt, da diese wo nichts wirkliches und von einander verschiedenes gedacht wird, zu dem Ausgedehnten selbst als Theile gehören müßten. Der geometrische Körper ist daher ins Unendliche theilbar. Allein man darf darum nicht die Theilbarkeit ohne Ende der physischen Ausdehnung beylegen, weil sie der geometrischen zukommt. S. Kästners Geometrie §. 3.

Introduction à la Géométrie, ou développement de l' idée de l'étendue. Par l'Auteur du livre des Verités. à Brunswick. 1795. Der Verfasser sucht den Begriff der Ausdehnung aus der Erfahrung herzuleiten und zu erklären. Die Absonderung der

Gränzen, es sey zwischen den Theilen eines einzelnen Gegenstandes oder zwischen mehrern Dingen, ist nach ihm der wahre Sinn, den man mit dem Worte, Ausdehnung, zu verknüpfen hat. Gränzen sind aber selbst eine Ausdehnung, und beziehen sich auf etwas ausgedehntes.

Ausdruck (Expressio) ist die symbolische Darstellung der Zusammensetzung einer Größe aus andern Größen, bekannten oder zum Theil unbekannten, unveränderlichen oder zum Theil veränderlichen. Z. B. der Ausdruck für die Wurzel der Gleichung $x^2 - 2ax + b = 0$ ist dieser, $a \pm \sqrt{(a^2 - b)}$; für das Quadrat der Ordinate einer Ellipse auf der großen Axe, wenn die Abscissen vom Scheitel an genommen werden, ist der Werth =

$$\frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}.$$

Auseinander fahrende (laufende) **Linien** (lineae divergentes) sind erstlich gerade, sich schneidende, Linien nach derjenigen Gegend hin, wo ihr Abstand immer mehr wächst, je länger man sie nimmt. In der Optik kommen divergirende Linien oder Strahlen, und ihr Gegentheil, die convergirenden, häufig vor. Zweytens heißen Parabeln von einer höhern Ordnung divergirend, wenn ihre Richtungen einen immer größern Winkel mit einander machen, je weiter die Schenkel verlängert werden, da bey der gemeinen Parabel ihre Richtungen sich immer mehr dem Parallelismus nähern. Auch giebt es divergirende Hyperbeln, deren Schenkel ihre erhabene Seiten gegen einander kehren, und nach entgegengesetzten Richtungen laufen. Newtoni enumeratio linearum tertii Ordinis. XII.

Ausmessen, s. Messen.

Ausschnitt (Sector) einer Figur ist ein Theil, der zwischen zwey geraden Linien, die aus einem Puncte innerhalb derselben an den Umfang gezogen sind, und dem von ihnen abgeschnittenen Bogen des Umfangs enthalten

ist. In dem Kreise insbesondre ist ein Ausschnitt zwischen zwey Halbmessern und dem Bogen des Umfanges enthalten.

Ausschnitt eines Körpers ist ein Theil desselben der von einem Theile der Oberfläche als Grundfläche, und dem von jedem Puncte des Umfanges dieses Theils nach einem Puncte innerhalb des Körpers gezogenen Linien begränzt wird. In der Kugel insbesondere ist ein Ausschnitt ein kegelförmiger Theil, dessen Spitze in dem Mittelpuncte der Kugel liegt.

Aussonderung (exclusio) ist eine Methode, arithmetische Aufgaben aufzulösen, dadurch, daß man diejenigen Zahlen aussondert, welche der Aufgabe kein Genüge thun. Frenicle, ein geschickter französischer Mathematiker, der zu den Zeiten des Descartes lebte, besaß eine besondre Geschicklichkeit in der Anwendung dieser Methode. Es war zu seiner Zeit sehr üblich, daß die Mathematiker sich Aufgaben vorlegten; Frenicle zeigte sich bey diesen gelehrten Turnieren immer auf dem Platze, und machte seiner Nation Ehre. Sogar Fermat und Descartes bewunderten die Gewandtheit, wodurch er ohne Algebra, durch die bloße Kraft seines Genie, mit Aufgaben fertig ward, welche die größten Mathematiker mit aller ihrer Algebra aufzulösen Mühe hatten. Wenn er eine Aufgabe, die Zahlen betraf, vornahm, so suchte er nicht die Zahlen, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllten, sondern diejenigen, welche sich nicht dazu schickten. So sehr man ihn bat, sein Verfahren bekannt zu machen, wollte er sich doch nicht dazu bequemen, aber nach seinem Tode fand es sich unter seinen Papieren. Der Aufsatz ist in der Sammlung abgedruckt, welche den Titel hat: Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique par MM. de l'Acad. roy. des Sciences, à Paris 1693. Er enthält nur wenige allgemeine kurze Regeln, an der Zahl zehn, aber die Anwendungen auf zehn ausgesuchte und ziemlich weitläufige Beyspiele. Die Methode läßt sich nicht in der Kürze beschreiben: man muß sie in dem Aufsatze selbst studieren. Doch ist zu bemerken, daß sie

ihre Brauchbarkeit verloren hat, seitdem die algebraischen Methoden vollkommener und anwendbarer geworden sind.

Dictionn. encyclop. art. Exclusion.

Ausziehung einer Wurzel, s. Wurzel.

Axe ist eine gerade Linie in der Ebene einer krummen Linie, welche diese in zwey gleiche, ähnliche und auf beiden Seiten ähnlich liegende Theile zerschneidet, z. B. in einer Parabel, in einer Ellipse und Hyperbel. Die beiden letztern Linien haben zwey Axen, die auf einander senkrecht sind. Der Kreis hat unendlich viele Axen, alle durch den Mittelpunct. Viele krumme Linien haben keine Axen.

Man nennt aber auch diejenige gerade Linie in der Ebene einer krummen Linie, worauf die Abscissen genommen werden, die Axe der Abscissen, oder schlechtweg die Axe, und die durch den Anfangspunct der Abscissen mit den Ordinaten parallele die Axe der Ordinaten, der Ordinatenwinkel mag ein rechter oder schiefer seyn. Wenn bey einem schiefen Ordinatenwinkel die Ordinaten in demselben Puncte auf beiden Seiten der Abscissenlinie sich durchgehends gleich sind, so heißt die Axe ein Durchmesser.

Axe eines geometrischen Körpers ist die gerade Linie, welche durch die Mittelpuncte aller ähnlichen parallelen Durchschnitte des Körpers geht, vorausgesetzt, daß die parallelen Durchschnitte ähnliche Figuren mit einem Mittelpuncte sind, und daß ihre Mittelpuncte in einer geraden Linie liegen. Wenn die parallelen Durchschnitte Kreise sind, und die Axe auf sie senkrecht steht, so ist die Axe zugleich die Axe der Umdrehung (Circumvolution, Rotation), z. B. in der Kugel, dem senkrechten Kegel, senkrechten Cylinder und Konoid. Ein schief stehender Kegel und Cylinder haben eine Axe im Allgemeinen, aber keine Drehungs-Axe. Wenn die Grundfläche eines Kegels oder Cylinders, anstatt ein Kreis zu seyn, in eine Ellipse verwandelt wird,

und alle mit ihr parallelen Durchschnitte in jener ähnliche Ellipsen, die Mittelpuncte unverändert gelassen, so bleibt die gerade Linie durch diese Mittelpuncte eine Axe.

Die Axe eines Sphäroids, das durch die Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen entstanden ist, ist diese Axe.

Axioma, s. Grundsatz.

B.

Bacilli decimales, sexagenales, s. Instrumentale Arithmetik.

Bakers Centralregel, s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.

Barlong, im Französischen, ein rechtwinklichtes, ungleichseitiges Parallelogramm. Barlongische Zahl ist das Product zweyer um die Einheit verschiedenen ganzen Zahlen. Die Summe der Reihe der geraden Zahlen, $2 + 4 + 6 \ldots + (2 + 2r)$ ist eine solche. Denn sie ist $= \frac{1}{2}(1 + r)(4 + 2r) = (r + 1)(r + 2)$. (s. arithm. Reihe, 6.). Die Triangularzahlen sind die Hälften einer barlongischen Zahl. Die Benennung von dem gleich vorher angeführten Worte rührt von der ehemals gewöhnlichen Vergleichung der Peoducte zweyer Zahlen mit Rechtecken her. Theon (s. Arithmetik, ihre Geschichte) handelt in dem 13ten Kap. von dieser Form der Zahlen. Er nennt sie ἑτερομήκεις, altera parte longiores. Die Auszeichnung dieser Form der Zahlen mag wohl etwas bildliches zum Grnnde haben.

Basedowische Regel, s. Regel der Zusammensetzung der Verhältnisse.

Basis, s. Grundfläche und Grundlinie.

Bastardbruch (fractio spuria), besser ein uneigentlicher Bruch, d. i. dessen Zähler so groß oder größer als der Nenner ist.

Q

Beaunische Aufgabe ist folgende: die Gleichung für die krumme Linie AM (Fig. 33. Tab. II.) zu finden, in welcher die Ordinate PM sich zu der Subtangente PR verhält, wie eine gegebene Linie zu dem Unterschiede der Ordinate und Abscisse, das ist, wenn die gerade Linie AB unter dem Winkel von 45 Grad durch den Anfang der Abscissen A gezogen wird, welche PM in Q schneidet, und die gegebene Linie D heißt, so soll seyn PM : PR = D : MQ

De Beaune, Rath bey dem Landgerichte zu Blois im 17ten Jahrhundert, legte diese Aufgabe den Geometern vor. Sie war zu seiner Zeit merkwürdig, und von einer neuen Art. Man hatte bis dahin gesucht, aus der Natur einer krummen Linie die Lage der berührenden in jedem Puncte zu bestimmen. Hier sollte aus einer Eigenschaft der berührenden Linie die Natur der krummen Linie gefunden werden. Descartes fand eine Eigenschaft der gesuchten Linie, die ihm hätte zeigen können, daß sie eine logarithmische Linie ist, mit einem Ordinatenwinkel von 45 Grad, die Abscissen auf ihrer Asymptote genommen. Er zeigte auch, wie sie durch den Durchschnittspunct zweyer sich schneidenden Linien, die jede für sich mit paralleler Bewegung fortrücken, beschrieben wird. Es ist Schade, daß er die Analysis, wodurch er dieses gefunden, nicht mitgetheilt hat. Er giebt bloß die Resultate an, in einem Briefe an Beaune (Epistol. P. III. ep. 63.), wo aber die Aufgabe selbst nicht wörtlich vorkommt. In einem Briefe an einen Ungenannten (l. c. ep. 71.) wird sie angeführt, wie sie von Beaune vorgelegt war. Als die Differential- und Integralrechnung aufkam, ward die Beaunische Aufgabe wieder hervorgesucht. In dem Journal des Savans 1692 erschien eine Auflösung, die l' Hopital und Johann Bernoulli gemeinschaftlich gefunden hatten. Hernach gab Johann Bernoulli eine andere Auflösung in den Actis Erud. 1693; noch eine mittelst einer Reihe als Beyspiel einer allgemeinen Methode, in A. Erud. 1694; eine Erläuterung der zweyten in A. E. 1696. Noch ist in den Lectionibus Hospitalianis XI.

eine Auflösung enthalten. Jakob Bernoulli machte die Aufgabe allgemeiner dadurch, daß er statt der geraden Linie AB irgend eine krumme Linie setzte. Opp. nr. 72.

Es sey AMN die gesuchte krumme Linie, die Abscisse AP $= x$, Ordinate PM $= y$, der Winkel APM ein Rechter, die gegebene Linie D $= a$. Es ist die Subtangente PR $= \frac{y\,dx}{dy}$ (s. berührende Linie, 13.). Also ist nach der Bedingung der Aufgabe,

$$dy : dx = a : y - x$$

das ist

$$a\,dx = y\,dy - x\,dy.$$

In dieser Differentialgleichung sind die veränderlichen Größen nicht gesondert. Inzwischen hat man hier nicht nöthig, eine Substitution oder einen Multiplicator zu suchen. Man subtrahire auf beiden Seiten das Differential $a\,dy$, so ist

$$a\,dx - a\,dy = y\,dy - x\,dy - a\,dy,$$

oder $$\frac{a\,(dx - dy)}{a + x - y} = - dy.$$

Da $\int \frac{du}{u} = \log nat \frac{u}{const}$, so ist

$$\log nat \frac{a + x - y}{const} = - \frac{y}{a},$$ oder

$$\log nat. \frac{const}{a + x - y} = + \frac{y}{a}.$$

Soll die krumme Linie durch den Anfangspunct der Abscissen gehen, so ist der Logarithme $= 0$, wenn $y = 0$, und die dazu gehörige Zahl ist $= 1$. Also ist const $= a$, und

$$\log nat. \frac{a}{a + x - y} = \frac{y}{a}.$$

Man nehme auf der Abscissenlinie $AC = a$, ziehe CV unter dem Winkel von 45° oder parallel mit AB, verlängere PM bis an CV, in S, so ist $MS = a + x - y$. Es sey MT parallel mit CP, so ist auch $MT = a + x - y$, und $CT = y\sqrt{2}$. Man setze $TM = u$; $CT = z$, so ist

$$\log \text{nat.} \frac{a}{u} = \frac{z}{a\sqrt{2}}.$$

Es ist also die krumme Linie eine logarithmische, deren Asymptote CV ist. Daß die Coordinaten CT, TM einen Winkel von 45 Grad machen, ist kein wesentlicher Unterschied von derjenigen, wo der Coordinatenwinkel ein Rechter ist.

Die berührende RM schneide die Asymptote in V. Eben so, wie bey rechtwinklichten Coordinaten, ist $TV = -\frac{u\,dz}{du}$ (s. berührende Linie, 13. 14.) Aus der Gleichung zwischen u und z folgt $-\frac{du}{u} = \frac{dz}{a\sqrt{2}}$, also ist $TV = a\sqrt{2}$, oder die Subtangente auf der Asymptote ist unveränderlich, wie an der logarithmischen mit rechtwinklichten Coordinaten. (s. berührende Linie, 20.).

Dieses hat Descartes gefunden. Er läßt die krumme Linie durch die stetige Durchschneidung zweyer geraden Linien beschreiben, deren eine sich parallel mit AB, die andere parallel mit AC von dem Puncte A an bewegt. Die Geschwindigkeit der erstern läßt er gleichförmig seyn, die Geschwindigkeit der andern aber zunehmen nach dem umgekehrten Verhältnisse des auf AC noch rückständigen Weges für die mit AB parallele. In A sollen beide Geschwindigkeiten gleich groß seyn. Dieses ist ganz richtig. Die mit AB parallele sey in LM, die mit AC parallele in TM, ihr Durchschnitt M. Es sey $AL = t$, und $LM = CT = z$, so ist der senkrechte Abstand der TM von $AC = y = \frac{z}{\sqrt{2}}$

Die Geschwindigkeiten der Linien LM, TM, jener nach der Richtung AL, dieser nach der Richtung PM, verhalten sich wie $dt : dy$. Nun ist $t = a - u$, also $dt = - du$. Die Gleichung zwischen u und z giebt $-\frac{au}{u} = \frac{dz}{a\sqrt{2}}$. Da $y = \frac{z}{\sqrt{2}}$, so ist $\frac{dt}{a - t} = \frac{dy}{a}$. Daher ist $dt : dy = a - t : a$ $= 1 : \frac{a}{a - t}$. In A, wo $t = 0$ ist, ist $dt : dy$ $= 1 : 1$. Man kann auch, wie man hieraus sieht, TM sich gleichförmig, und LM ungleichförmig bewegen lassen, so wie man die Logarithmen ursprünglich in arithmetischer Progression, die zugeordneten Zahlen in geometrischer sich vorstellt.

Johann Bernoulli hat den Brief von Descartes an Beaune übersehen, als er in den Lect. Hospit. schrieb, Descartes habe in seinen Werken keine Auflösung der Aufgabe gegeben, die er doch gefunden zu haben in einem Briefe behaupte.

Merkwürdig ist es, daß in der Entstehungsart der Beaunischen Curve nach Descartes etwas ähnliches mit den Fluxionen vorkommt. Fluxionen sind Verhältnisse der Geschwindigkeiten einer Linie und eines Punctes, durch deren zusammengesetzte Bewegung eine krumme Linie beschrieben wird. Hier ist auch das Neperische System angenommen, da die Geschwindigkeiten der sich bewegenden Linie zu Anfange gleich groß sind.

Bedingung einer Aufgabe ist eine Forderung, welcher bey der Auflösung Genüge geschehen muß. In jeder eigentlichen Aufgabe sind eine oder mehrere Bedingungen zu erfüllen. In der unbestimmten Analytik ist die allgemeine Bedingung, daß die gesuchten Größen ganze Zahlen oder auch rationale Brüche seyn.

Bedingungs-Gleichung (aequatio conditionalis, équation de condition) ist eine solche, von wel-

cher die Möglichkeit der Auflösung einer Aufgabe, entweder überhaupt, oder auf eine vorgeschriebene Art, abhängt.

In der unbestimmten Analytik ist eine Bedingungsgleichung, $mm = ann + 1$, wo m und n ganze Zahlen sind, wenn $axx + b$ ein Quadrat seyn soll. Ausserdem muß es eine ganze Zahl f geben, welche für x gesetzt, die Formel $axx + b$ zu einem Quadrate macht.

Bedingungsgleichungen kommen besonders in der Differential- und Integralrechnung vor, und enthalten die Relationen der parallelen Differentiale, welche vorhanden seyn müssen, wenn die Integration einer Differentialgleichung möglich seyn soll. Diese heißen vorzüglich Bedingungsgleichungen. Diejenige für Differentialgleichungen vom ersten Grade zwischen zwey veränderlichen Größen ist die einfachste und vom häufigsten Gebrauche. S. Differentialgleichung.

Für eine Function von endlichen Differenzen irgend eines Grades, mit irgend einer Anzahl veränderlicher Größen hat Condorcet in den Abhandlungen der Pariser Akademie 1770 die Bedingungsgleichungen angegeben. S. Cousin Calcul diff. et intégral. §. 565.

Bey besondern Differentialformeln kommen auch Bedingungsformen zwischen den gegebenen Größen vor, woraus sich die Fälle ergeben, in welchen das Integral sich völlig, durch eine abbrechende Reihe von Gliedern, finden läßt.

Dergleichen lassen sich auch bey einigen Differentialgleichungen angeben, als in einer schweren, die Pfaff aufgelöset hat. Disquisit. analyticae. p. 137.

Befreundete Zahlen (numeri amicabiles) sind ein Paar Zahlen, deren jede gleich ist der Summe der aliquoten Theile der andern, z. B. 220 und 284. Die aliquoten Theile der ersten sind 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, und die Summe derselben = 284.

Die aliquoten Theile der andern sind 1, 2, 4, 71, 142, deren Summe = 220. Die Benennung, amicabiles, wird van Schooten zuerst gebraucht haben.

Michael Stifel erwähnt dieses einzigen Paares in seiner Ausgabe der Coß Christoph Rudolphs. Einmal führt er es als Beyspiel an, die aliquoten Theile einer Zahl zu finden (S 45), und setzt hinzu, es sey lustlich zu sehen, wie so eben alle partes aliquote von 220 machen 284, und wie erumb alle partes aliquote von 284 so eben machen 220. Am Ende des Buchs (S. 819) braucht er sie mit einigen andern Beyspielen zum Beweise, daß, wiewohl ein jede Coß einen unaussprechlichen Begriff in sich hat allerley künstlicher Rechnung, dennoch man viel feiner Rechnung finde, welche der Coß nicht sind unterworfen, sondern neben der Coß fließen aus der Theorica. Um diese Behauptung zu widerlegen zeigt van Schooten (Exercit. math. L. V. sect. 9.), wie man durch die Algebra befreundete Zahlen finden könne Die Methode gehört in die unbestimmte Algebra oder Analytik. Doch ist das von Schooten gebrauchte Verfahren zu eingeschränkt. Er findet dadurch drey Paare, 284 und 220; 18416 und 17296; 9437056 und 9363584. Zugleich führt Schooten eine von Descartes ihm mitgetheilte Regel, diese Gattung Zahlen zu finden, an, welche allerdings von dem Scharfsinne des Erfinders zeiget. Man wird sie am leichtesten verstehen, wenn sie in Zeichen ausgedruckt wird. Es seyn P, Q, R unbestimmte Primzahlen, und A eine Potenz der Zwey. Man suche eine Potenz A von der Beschaffenheit, daß 3 A — 1 = P; 6 A — 1 = Q; 18 A A — 1 = R, so sind 2 A R und 2 A P Q ein Paar befreundeter Zahlen. Die Regel ist ebenfalls eine eingeschränkte, da A eine Potenz der Zwey seyn soll. Auch bey Schootens Verfahren haben die beiden befreundeten Zahlen eine Potenz der Zwey zum gemeinschaftlichen Factor.

G. W. Krafft hat in den neuen Petersburger Commentarien T. II. eine Untersuchung über diese Materie mitgetheilt, die wegen der Bemerkungen über die Rela-

tion der Theiler einer Zahl und ihrer Summe lehrreich ist. (De numeris amicabilibus atque aliis ad hanc doctrinam spectantibus). Die von ihm gefundene allgemeinere Regel ist folgende: Es seyn P, Q, R Primzahlen, von welchen $R = (P + 1)(Q + 1) - 1$ ist; ferner sey a die Summe der Theiler einer Zahl A, die Eins und sie selbst mit eingeschlossen, und es sey $A : a = R + 1 : PQ + R$, so sind PQA und RA ein Paar befreundete Zahlen. Krafft sucht zuerst zu zwey Primzahlen, P und Q, die dritte R von der angegebenen Beschaffenheit, und darauf die Zahl A, welche zu der Summe ihrer Theiler das Verhältniß $R + 1 : PQ + R$ hat. Eine Zahl aus ihrem Verhältnisse zu der Summe ihrer Theiler zu finden, ist wieder eine Aufgabe, die sich nicht directe auflösen läßt. Doch giebt Krafft eine Methode, die in manchen Fällen zum Ziele führt. Daneben hat er eine Tafel der Verhältnisse der Zahlen von 1 bis 150 zu der Summe ihrer Theiler berechnet, worin man nachzusehen hat, ob das gegebene Verhältniß einer Zahl zu der Summe ihrer Theile darin vorkommt, wodurch dann ein Paar befreundeter Zahlen gefunden ist. Das Willkührliche bey der Annahme von P und Q kann die Entdeckung eines Paares solcher Zahlen sehr langwierig machen. In den Beyspielen, die Krafft beybringt, sieht man keinen Grund der Bestimmungen von P und Q. Ich würde mich zur Aufsuchung befreundeter Zahlen folgendes Verfahrens bedienen.

Da $R = PQ + P + Q$ seyn muß, so ist $R + 1 : 2R - P - Q = A : a$, oder, wenn $A : a = m : n$ ist, $R + 1 : 2R - P - Q = m : n$. Also ist $nR + n = 2mR - m(P + Q)$, und

$P + Q = \frac{(2m - n)R - n}{m}$. Da $P + Q = R - PQ$

ist, so ist $PQ = \frac{(n - m)R + n}{m}$. Folglich werden, wenn für R irgend eine Primzahl angenommen wird,

P und Q durch eine quadratische Gleichung gefunden. Es ist

$$P \text{ oder } Q = \frac{(2m - n)R - n}{2m}$$

$$\pm \frac{1}{2m} \sqrt{((2m - n)^2 R^2}$$

$$2 + (2m^2 + n^2 - 4mn)R + n^2 - 4mn).$$

Das obere Zeichen für eine der beiden Zahlen P oder Q, das untere für die andere. (s. Gleichung II. 1.) Man nehme für A irgend eine Zahl, und suche die Summe ihrer Divisoren a, so sind m und n gegeben. Nun muß ein solcher Werth der Primzahl R gesucht werden, daß die Wurzelgröße nicht allein einen möglichen rationalen Werth erhalte, sondern daß auch P und Q ganze und zwar Primzahlen werden. Alle diese Bedingungen schränken die Möglichkeit der befreundeten Zahlen sehr ein. Man hat nicht nöthig für R die Primzahlen von 1 an zu versuchen. Denn der Werth von R darf nicht zwischen die Wurzeln der Gleichung, $(2m - n)^2 x^2$

$$+ 2(2m^2 + n^2 - 4mn)x + n^2 - 4mn = 0,$$

fallen, weil sonst die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ wird, und wenn die Gleichung eine negative Wurzel hat, muß R größer als die positive seyn. Nur wenn sie unmögliche Wurzeln hat, giebt jeder Werth von R einen positiven Werth für die Größe unter dem Wurzelzeichen. (S. Gleichung I. 9.). Auch ist zu bemerken, daß $\frac{(2m - n)R - n}{m}$ eine ganze Zahl seyn muß.

Exempel. Man nehme A = 4, so ist die Summe der Divisoren = 7, also m : n = 4 : 7; und P oder

$$Q = \frac{R - 7}{8} \pm \tfrac{1}{8} \sqrt{(R^2 - 62R - 63)}.$$ Die Gleichung $x^2 - 62x - 63 = 0$ hat nur eine positive Wurzel zwischen 60 und 61. Man hat also für R erst von

61 an die Primzahlen zu versuchen. Es müssen $\frac{R-7}{4}$ und $\frac{3R+7}{4}$ ganze Zahlen seyn. Die erste Bedingung macht 61 unbrauchbar. Die Zahl 67 giebt keine rationale Wurzel. Setzt man $R = 71$, so wird P oder Q $= 8 \pm 3$, beides Primzahlen, $P = 11$; $Q = 5$. Die beiden befreundeten Zahlen sind 11. 5. 4 und 71. 4, das ist 220 und 284.

Die unbestimmte Analytik leistet hier gute Dienste. Die Größe unter dem Wurzelzeichen sey $\alpha^2 R^2 + 2\beta R + \gamma$ welche ein Quadrat seyn soll. Die Wurzel des Quadrats sey $\alpha R + p$, so ist $2\beta R + \gamma = 2p\alpha R + p^2$, und daher $R = \frac{p^2 - \gamma}{2(\beta - p\alpha)} = \frac{\gamma - p^2}{2(p\alpha - \beta)}$. Dieses ist die Form von R, nach welcher man eine beliebige Anzahl Werthe von p in ganzen Zahlen versuchen kann. Ist γ gerade, so muß p auch gerade seyn; ist γ ungerade, so ist p auch ungerade. In dem ersten Falle setze man 2 p statt p, in dem andern $2p \pm 1$ statt p. Die besondere Beschaffenheit der Formel für gegebene α, β, γ, mögen schickliche Abkürzungen an die Hand geben.

Wenn $\gamma = 0$ ist, so setze man $\sqrt{(\alpha^2 R^2 + 2\beta R)}$ und $= pR$, es ist $R = \frac{2\beta}{p^2 - \alpha^2}$. Kann man demnach einer in dreytheiligen Wurzelgröße für R einen Werth $r + u$ setzen, so daß dadurch das gegebene Glied der Wurzelgröße verschwindet, so giebt dieses eine beträchtliche Erleichterung. Dieses wird erhalten, wenn r eine der Wurzeln der Gleichung, $\alpha^2 u^2 + 2\beta u + \gamma = 0$, ist.

Exempel Es soll $R^2 - 62R - 63$ das Quadrat einer ganzen Zahl, und zugleich R eine Primzahl seyn, wenn es möglich ist. Es ist also $R = \frac{p^2 + 63}{-2(31 + p)}$.

Weil p ungerade und negativ seyn muß, so setze man $p = -2q - 1$, und es ist $R = \frac{q^2 + q + 16}{q - 15}$ $= q + 16 + \frac{256}{q-15}$. Hieraus ergiebt sich, daß $q - 15$ ein Factor von 256 ist, oder daß $q = \frac{256}{r}$ $+ 15$, wo r ein Factor von 256 ist. Die Factoren 1, 2, 4 geben für R keine Primzahl, aber $r = 8$ giebt $q = 47$, und $R = 71$.

Exempel. Man suche, ob aus der Zahl 5 sich, wie vorher aus 4, ein Paar befreundeter Zahlen herleiten lasse. Es ist also $A = 5$, $a = 6$, und $m : n = 5 : 6$; also

$$P \text{ oder } Q = \frac{2R - 3}{5} \pm \tfrac{1}{5}\sqrt{(4R^2 - 17R - 21)}.$$

Zugleich muß $\frac{2R - 3}{5}$ eine ganze Zahl seyn. Da alle Primzahlen sich mit einer der Ziffern, 1, 3, 7, 9, endigen; so sind hier nur diejenigen, die sich mit 9 endigen, brauchbar, und es hat also R die Form $10p - 1$. Setzt man diesen Werth für R, so wird die Wurzelgröße $= \sqrt{25(16p^2 - 10p)}$. Soll diese rational seyn, so ist $p = \frac{10}{16 - q^2}$. Offenbar ist keine ganze Zahl für q vorhanden, welche p zu einer ganzen positiven Zahl macht; aber auch kein Bruch. Denn wenn man statt q einen Bruch $\frac{q}{r}$ setzt, so ist $p = \frac{10r^2}{16r^2 - q^2}$. Hier müßte, da r^2 kein Factor des Nenners ist, der Nenner entweder 10 oder 5 seyn, daß ist, $16r^2 - q^2 = 10$ oder 5, welches für ganze Zahlen q und r wenigstens nicht möglich ist. Es kann also ein Paar befreundeter Zahlen nicht den gemeinschaftilchen Factor 5 haben.

Euler hat in dem zweyten Theile seiner Opusculorum (Berolini 1750) eine Abhandlung über die befreundeten Zahlen geliefert, die wegen des dabey angebrachten künstlichen Verfahrens, dergleichen Zahlen zu entdecken, lehrreich ist. Sie ist deutlich geschrieben. Es sind darin 61 Paare befreundeter Zahlen angegeben. Die Methoden erfordern alle gewisse Versuche, und die Kunst besteht darin, die Ungewißheit des Versuchens zu vermindern. Euler giebt den befreundeten Zahlen die Formen apq und ar; oder apq und abr; oder abpq und acr, wo a, b, c angenommene Zahlen, p, q, r gesuchte Primzahlen sind. Die Factoren derselben Zahlen haben nichts gemeinschaftliches. Auch sucht er in den Formen zap und zbq, worin a, b, p, q die vorige Bedeutung haben, aus diesen als angenommenen Zahlen den gemeinschaftlichen Factor z.

Bekanntes Glied ist in einer Gleichung dasjenige, welches nicht in die unbekannte Größe multiplicirt ist, es mag eintheilig oder vieltheilig seyn. Vieta nannte es Homogeneum corporationis.

Benannte Zahlen sind diejenigen, deren Einheit ein bestimmter Begriff ist. Z. B. 12 Fuß, 20 Thaler. Bey der Rechnung mit benannten Zahlen muß man die Eintheilung der Einheit in kleinere Theile kennen.

Benannte Zahlen können nicht mit einander multiplicirt werden. Wenn bey der Anwendung der Regel de Tri eine solche Multiplication vorkommt, so ist der eine Factor allemahl als eine absolute Zahl mit Bruchtheilen, die sich auf eine abstracte Einheit beziehen, oder auch ohne solche, zu betrachten. Wenn benannte Zahlen durch einander dividirt werden, so müssen beide gleichartig seyn. Der Quotient zeigt an, wie vielmahl der Divisor selbst oder ein gewisser Theil desselben, in dem Dividendus enthalten ist.

Bernoullische Zahlen sind die Coefficienten des niedrigsten Gliedes in den Summen der geraden Potenzen ganzer Zahlen von 1 bis x. Es ist nämlich, wenn S. x^{2n} die Summe der geraden Potenzen mit dem Exponenten 2n von der Wurzel 1 bis x bedeutet, (Potenz III. 13.)

$$S.\,x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$
$$S.\,x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 \;.\;.\;.\;.\;.\; - \tfrac{1}{30}x$$
$$S.\,x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 \;.\;.\;.\;.\;.\; + \tfrac{1}{42}x$$
$$S.\,x^8 = \tfrac{1}{9}x^9 \;.\;.\;.\;.\;.\; - \tfrac{1}{30}x$$

u. s. f.

Die absoluten Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, sind die ersten vier Bernoullischen Zahlen. Den Namen haben sie von ihrem Erfinder, Jakob Bernoulli. (Potenz. III. 19.)

2. Euler hat die ersten 15 dieser Zahlen in den Institt. Calc. diff. P. II. §. 122 mitgetheilt. In den Comm. Petrop. novis. T. XIV. hat er sie bis zur siebzehnten berechnet. Jakob Bernoulli hat nur die fünf ersten angegeben, und gezeigt, wie sie folgweise aus den vorhergehenden gefunden werden, das allgemeine Gesetz ihrer Fortschreitung aber nicht bestimmt. Dieses hat Moivre zuerst bemerkt (Miscell. Analyt. Suppl. p. 9). Euler hat es einfacher, und zur numerischen Berechnung bequemer dargestellt. Calc. diff. P. II. §. 123. Er hat auch den Gebrauch dieser Zahlen zur Vereinfachung mancher Reihen, insbesondere bey Summirungen, gezeigt.

3. Die ersten 12 Bernoullischen Zahlen sind

$A = \frac{1}{6}$; $B = \frac{1}{30}$;

$C = \frac{1}{42}$; $D = \frac{1}{30}$;

$E = \frac{5}{66}$; $F = \frac{691}{2730}$;

$G = \frac{7}{6}$; $H = \frac{3617}{510}$;

$J = \frac{43867}{798}$; $K = \frac{174611}{330}$

$L = \frac{854513}{138}$; $M = \frac{236364091}{2730}$.

4. Es seyn die Bernoullischen Zahlen, A, B, C, D . . . . $\overset{-3}{N}$, $\overset{-2}{N}$, $\overset{-1}{N}$, N, etc. wo N die nte derselben, $\overset{-1}{N}$, die (n — 1)te, u. s. f. ist. Die Binomial-Coefficienten in der (2n + 1)ten Potenz seyn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. so ist (Potenz III. 20).

$$\mathfrak{A}N - \mathfrak{C}\overset{-1}{N} + \mathfrak{E}\overset{-2}{N} - \mathfrak{G}\overset{-3}{N} + \ldots \pm \mathfrak{F}C \mp \mathfrak{D}B \pm \mathfrak{B}A \pm 1 = \pm \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}.$$

Setzt man für n folgweise 1, 2, 3, etc. so ist

$$3A + 1 = +\frac{3}{2}$$

$$5B - \frac{5.4.3}{1.2.3}A - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$7C - \frac{7.6.5}{1.2.3}B + \frac{7..3}{1..5}A + 1 = +\frac{7}{1}$$

$$9D - \frac{9.8.7}{1.2.3}C + \frac{9..5}{1..5}B - \frac{9..3}{1..7}A - 1 = -\frac{9}{2}$$

$$11E - \frac{11.10.9}{1.2.3}D + \frac{11..7}{1..5}C - \frac{11..5}{1..7}B + \frac{11..3}{1..9}A + 1 = +\frac{11}{2}$$

u. s. w.

5. Um das Gesetz der Formation deutlicher zu machen, setze man

$A = 1.2\alpha$; $B = 1.2.3.4\beta$

$C = 1.2..6\gamma$; $D = 1.2....8\delta$

$E = 1.2..10\varepsilon$; etc.

so ist

$$\alpha + \frac{1}{1.2.3} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1\ 2}$$

$$\beta - \frac{\alpha}{1.2.3} - \frac{1}{1..5} = - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..4}$$

$$\gamma - \frac{\beta}{1.2.3} + \frac{\alpha}{1..5} + \frac{1}{1..7} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..6}$$

$$\delta - \frac{\gamma}{1.2.3} + \frac{\beta}{1..5} - \frac{\alpha}{1..7} - \frac{1}{1..9} = - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..8}$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{1.2.3} + \frac{\gamma}{1..5} - \frac{\beta}{1..7} + \frac{\alpha}{1..9} + \frac{1}{1..11} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1...10}.$$

u. s. f.

Die Größen $-1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon,$ etc. machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Relations-Scale ist

$$+\frac{1}{1.2\,3}\ ;\ -\frac{1}{1.2..5}\ ;\ +\frac{1}{1.2..7},\ \text{u. s. f.}$$

nur daß zu dem hieraus entstehenden Werthe jeder noch eine Größe von der Form kommt, wie diejenigen sind, die in den vorhergehenden Formeln den Theil rechter Hand ausmachen.

6. Man vergleiche mit diesen Formeln diejenigen, welche für die Relationen der Coefficienten in der aus einer gebrochenen Function entstehenden Reihe, in dem Art.

Rücklaufende Reihen, 9. sich finden. Es erhellt daraus, daß die obigen Zahlen α, β, γ, δ, etc. Coefficienten in einer Reihe sind, die aus einer rationalen gebrochnen Function einer veränderlichen Größe entsteht, worin Zähler und Nenner eine ohne Ende fortgehende Reihe sind. Um die gebrochne Function nach dem hier vorkommenden Falle einzurichten, setze man den

Dividendus $= 1 - az + bz^2 - cz^3 + dz^4 - ez^5 + \text{etc.}$

Divisor $= 1 - Az + Bz^2 - Cz^3 + Dz^4 - Ez^5 + \text{etc.}$

Quotienten $= 1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \text{etc.}$

wo A, B, C, D, etc. aber nicht die Bernoullischen Zahlen bedeuten, sondern Coefficienten, die noch bestimmt werden sollen. Es ist nun

$1 = 1$

$\alpha + A = + a$

$\beta - A\alpha - B = - b$

$\gamma - A\beta + B\alpha + C = + c$

$\delta - A\gamma + B\beta - C\alpha - D = - d$

$\varepsilon - A\delta + B\gamma - C\beta + D\alpha + E = + e$

etc.

Die Vergleichung mit den Formeln für α, β, etc. in (5) giebt $A = \frac{1}{1.2.3}$; $B = \frac{1}{1.2..5}$;

$C = \frac{1}{1.2..7}$; $D = \frac{1}{1.2..9}$; $E = \frac{1}{1.2...11}$

u. s. w. Ferner

$a = \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2}$; $b = \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2.3.4}$;

$c = \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2..6}$; $d = \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2..8}$; $e = \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2..10}$ etc.

Nun ist $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{1.2.3}\varphi^3 + \frac{1}{1.2..5}\varphi^5 - \frac{1}{1,...7}\varphi^7 +$ etc. und $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{1.2.}\varphi^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\varphi^4 - \frac{1}{1.2..6}\varphi^6 +$ etc. (Cyklometrie 5. 6.) Man setze demnach φ^2 für z, und multiplicire zugleich den Divisor durch φ, dagegen man den Quotienten durch φ dividire, so ist der Dividendus $= \frac{1}{2}(1 + \cos.\,\varphi)$; der Divisor $\sin\varphi$, und der Quotient $= \frac{1}{\varphi} - \alpha\varphi^3 - \beta\varphi^5 - \gamma\varphi^5 - \delta\varphi^7 -$ etc. Nun ist $\frac{1+\cos\varphi}{2\sin\varphi} = \frac{1}{2}\,\text{cotang.}\,\frac{1}{2}\varphi$ (Goniometrie, 38.).

Folglich ist

$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\varphi} - \alpha\varphi - \beta\varphi^3 - \gamma\varphi^5 - \delta\varphi^7 -$ etc.

Die Bernoullischen Zahlen sind also Factoren der Coefficienten in der Reihe für $\cot\frac{1}{2}\varphi$. Es ist, wenn diese Zahlen selbst wieder eingeführt werden,

$$\cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \frac{2A}{1.2}\varphi - \frac{2B}{1.2.3.4}\varphi^3 - \frac{2C}{1.2..6}\varphi^5 - \frac{2D}{1.2...8.}\varphi^7 - \text{etc.}$$

8. Wenn $\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - a\varphi - b\varphi^3 - c\varphi^5 - d\varphi^7 - e\varphi^9 -$ etc. gesetzt wird, so ist (Cyklometrie, 15.)

$3a = 1$ | $5b = aa$
$7c = 2ab$ | $9d = 2ac + bb$
$11e = 2ad + 2bc$ | $13f = 2ae + 2bd + cc$,
$15g = 2af + 2be + 2cd$ etc.

Da die Coefficienten unveränderlich sind, so ist

$$\cot \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \tfrac{1}{2}a\varphi - \tfrac{1}{8}b\varphi^3 - \tfrac{1}{32}c\varphi^5$$

$$- \tfrac{1}{128}\varphi^7 - \tfrac{1}{512}\varphi^9 - \text{etc.}$$ Also ist

$4\alpha = a$; $4^2 . \beta = b$; $4^3 . \gamma = c$; $4^4 . \delta = d$; $4^5 . \varepsilon = e$; etc. Setzt man für a, b, c, etc. diese Werthe in den angeführten Formeln, so lassen diese sich folgweise durch 4, 4^2, 4^3, etc. dividiren, und es bleiben dieselben Relationen zwischen den Zahlen α, β, γ, etc. wie zwischen a, b, c, etc. nur daß ihre Werthe andere sind. Es ist

$3\alpha = \tfrac{1}{4}$ — $5\beta = \alpha\alpha$

$7\gamma = 2\alpha\beta$ — $9\delta = 2\alpha\gamma + \beta\beta$

$11\varepsilon = 2\alpha\delta + 2\beta\gamma$ — $13\zeta = 2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma\gamma$

$15\eta = 2\alpha\zeta + 2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta$ etc.

9. Die Relationen der Bernoullischen Zahlen, A, B, C, D, etc. selbst sind folgende:

$$3A = \frac{2.1}{1.2} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$5B = \frac{4.3}{1.2} \cdot AA$$

$$7C = \frac{6.5}{1.2} \cdot 2AB$$

$$9D = \frac{8.7}{1.2} \cdot 2AC + \frac{8..5}{1..4} \cdot BB$$

$$11E = \frac{10.9}{1.2} \cdot 2AD + \frac{10..7}{1..4} \cdot 2BC$$

$$13F = \frac{12.11}{1.2} \cdot 2AE + \frac{12..9}{1..4} \cdot 2BD + \frac{12..7}{1..6} \cdot CC$$

$$15G = \frac{14.13}{1.2} \cdot 2AF + \frac{14..11}{1..4} \cdot 2BE + \frac{14..9}{1..6} \cdot 2CD$$

etc.

Der Weg, auf welchem diese merkwürdigen Relationen der Bernoullischen Zahlen hier gefunden sind, ist ein anderer, als der mühsamere, auf welchem Euler in den Institt. Calc. diff. P. II. cap. 5. dazu gelangt ist.

Berührende gerade Linie an einem Puncte einer krummen Linie, (Tangente), ist diejenige, welche zwischen zwey schneidenden Linien, die durch diesen Punct und einen andern, auf entgegengesetzten Seiten desselben, gezogen sind, innerhalb ihres spitzigen Winkels liegt, dieser Winkel mag noch so klein und kleiner als jeder angebbare seyn.

1. Die krumme Linie sey AMR, (Fig. 34. Tab. II). Durch den Punct M, und die beiden Puncte N, n, auf entgegengesetzten Seiten von M, seyn die schneidenden, NMS, Mns, gezogen, so liegt die berührende TMt innerhalb des spitzen Winkels SMs und seines Scheitelwinkels, so klein auch der W. SMs werden mag. Wenn die Linien NMS und Mns sich um M drehen, so fallen sie, indem sie ihre Stellen wechseln auf der berührenden in eine einzige gerade Linie zusammen.

2. Kann die krumme Linie nur in zwey Puncten von einer geraden geschnitten werden, so ist eine berührende diejenige, welche nur einen Punct mit ihr gemein hat, und ganz auf einer Seite derselben liegt. Es giebt aber viele krumme Linien, die von einer geraden Linie in mehr als zwey Puncten geschnitten werden. Darum kann man die berührende nicht allgemein für diejenige erklären, die mit der krummen Linie nur einen Punct auf die gedachte Art gemein hat, oder man müßte dieses auf einen gewissen Theil der krummen Linie einschränken, wie Archimedes bey seiner Spirallinie thut. Er zeigt von dieser, daß jeder ihrer Umläufe nur in einem Puncte von der berührenden getroffen wird.

3. Wie die berührende an einem Kreise gezogen wird, lehren die Elemente, s. Kreis.

4. In einem Kegelschnitte kann durch jeden Punct eine gerade Linie gelegt werden, welche alle unter dem ge-

hörigen Winkel gezogenen parallelen Chorden oder Doppelordinaten halbirt. Die mit diesen Chorden durch den Endpunct dieser Linie gezogene parallele Linie berührt den Kegelschnitt, s. Linien der zweyten Ordnung.

5. Die Benennung, Tangente, wird schicklich der Linie, welche in der Goniometrie und Trigonometrie zur Bestimmung eines Winkels gebraucht wird, eigen gelassen werden können.

Analytische Methode, gerade berührende an eine krumme Linie zu ziehen.

6. Es sey AMR (Fig. 34.) ein Bogen der krummen Linie, für welche eiue Gleichung zwischen den Coordinaten AP und PM gegeben ist. Man nehme irgend einen Punct N auf der einen oder der andern Seite von M, und ziehe NQ parallel mit MP, so findet zwischen AQ. und QN dieselbe Gleichung Statt, wie zwischen AP und PM. Durch M, N werde eine gerade Linie NMS gezogen, welche die Abscissenlinie APQ in S treffe. Es sey Mm parallel mit AQ, so ist PS: PM = Mm: Nm. Das Verhältniß Mm: Nm suche man durch die beiden Abscissen und Ordinaten, und durch PS auszudrucken. Setzt man in diesem Verhältnisse AP = AQ, und MP = NQ, so geht die schneidende SMN in die berührende TMt über. Denn durch eine ähnliche Annahme für die schneidende Mns auf der andern Seite von M wird Ps = PS, daher Mns mit NMS in eine gerade Linie zusammen fällt, das ist, beide fallen in die berührende TMt.

7. Exempel. I. Es sey AMR (Fig. 34.) eine Parabel, deren Axe AP, und Parameter = a ist. Die Ordinaten MP, NQ seyn senkrecht auf die Axe; und $AP = x$; $MP = y$; $AQ = z$; $NQ = u$; die Subtangente $PT = t$, und die Subsecante $PS = v$. Es ist $ax = y^2$; und $az = u^2$; ferner $v : y = z - x : u - y$. Jene erstere Gleichung von der zweyten abgezogen giebt $a(z-x) = u^2 - y^2 = (u+y)(u-y)$. Daraus ist $z - x : u - y = u + y : a$; folglich $v : y = u + y : a$. Die-

selbe Proportion wird erhalten, wenn N auf der andern Seite von M, in n, genommen wird. Setzt man $u = y$, so werden die Werthe von PS und Ps sich gleich, das ist, $v = t$, und $t : y = 2y : a$, also $t = \frac{2y^2}{a}$, oder $t = 2x$. Ist PT gefunden, so ist dadurch die berührende bestimmt.

8. Exempel. II. Es sey AMB (Fig. 35.) eine halbe Ellipse, deren halbe große Axe $AC = a$; halbe kleine $CD = b$ ist. Die Construction und die Bezeichnungen wie in dem 1. Exempel. Die Gleichung für die Coordinaten AP ($= x$) und PM ($= y$) ist $b^2 (2ax - x^2) = a^2 y^2$, und für AQ, QN ist sie $b^2 (2az - z^2) = a^2 u^2$. Durch die Subtraction wird erhalten $2ab^2 (z - x) - b^2 (z^2 - x^2) = a^2 (u^2 - y^2)$, das ist, $2ab^2 (z - x) - b^2 (z + x) (z - x) = a^2 (u + y) (u - y.)$ Da $v : y = z - x : u - y$, so ist $v : y = a^2 (u + y) : 2ab^2 - b^2 (z + x)$, es mag N auf der einen oder der andern Seite von M liegen. Setzt man $z = x$, und $u = y$, so werden die beiden Werthe der Subsecante v für entgegengesetzte Lagen von N einander gleich, und $= PT$, so daß $t : y = a^2 y : b^2 (a - x)$, oder $t = \frac{a^2 y^2}{b^2 (a - x)} = \frac{2ax - x^2}{a - x}$. Dieses giebt die merkwürdige Proportion, $CP : AP = BP : PT$.

9. Exempel. III. Es sey die Gleichung für die krumme Linie: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, und für die Coordinaten u und z sey sie $u = a + bz + cz^2 + dz^3$. Die krume Linie ist eine parabolische der zweyten Ordnung. Hieraus ist $u - y = b (z - x) + c (z^2 - x^2) + d (z^3 - x^3)$, oder $u - y = b (z - x) + c (z + x) (z - x) + d (z^2 + zx + x^2) (z - x)$; also $v : y = 1 : b + c (z + x) + d (z^2 + zx + x^2)$. Setzt man $z = x$, so ist $t = \frac{y}{b + 2cx + 3dx^2}$. Auf dieselbe Art findet man für parabolische Linie höherer Ordnun-

gen die Subtangenten, vermittelst derer die berührenden sich ziehen lassen.

10. Exempel. IV. Die Gleichung zwischen den Coordinaten sey eine ungesonderte (oder y eine functio implicita von x, nämlich:

$$ay^3 - bxy^2 - cx^2y + dx^3 + exy = 0.$$

Statt der Coordinaten x und y nehme man nun die beiden z und u, für welche eben so ist

$$au^3 - bzu^2 - cz^2u + dz^3 + ezu = 0.$$

Zieht man die erstere Gleichung von dieser ab, so ist

$$a(u^3 - y^3) - b(u^2 - y^2)z - by^2(z - x)$$
$$- c(z^2 - x^2)u - cx^2(u - y) + d(z^3 - x^3)$$
$$+ e(z - x)u + ex(u - y) = 0,$$

das ist

$$[a(u^2 + uy + y^2) - bz(u + y) - cx^2 + ex]$$
$$(u - y) = [by^2 + cu(z + x) - b(z^2 + zx + x^2)$$
$$- eu](z - x).$$

Also ist

$$v : y = [a(u^2 + uy + y^2) - bz(u + y) - cx^2 + ex] :$$
$$[by^2 + cu(z + x) - d(z^2 + zx + x^2) - eu].$$

Setzt man $u = y$ und $z = x$, so ist

$$t : y = [3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex] :$$
$$[by^2 + 2cxy - 3dx^2 - ey].$$

11. Exempel. V. Es sey x der Logarithme von y in dem System, dessen Basis = a ist, wenn nämlich die dadurch bezeichneten Linien in Zahlen mittelst einer beliebigen Einheit ausgedruckt werden. Diese ist die Ordinate AB in dem Anfangspuncte der Abscissen A. (Fig. 36.) Demnach ist $y = a^x$. In der Figur ist PM = y, und AP = x. Eine andere Zahl sey u, und ihr Logarithme z in demselben System, so ist $u = a^z$. In der Figur wird u durch QN, und z durch AQ dargestellt. Aus beiden Gleichungen folgt erstlich durch die Division, $\frac{u}{y} = a^{z-x}$

Setzt man $a = 1 + b$, so ist nach dem binomischen Lehrsatze, $\frac{u}{y} = 1 + (z - x)\,b + \frac{(z-x)(z-x-1)}{1\cdot 2}b^2$
$+ z - x - 2\,\frac{(z-x-1)\,(z-x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}b^3 + \text{etc.}$

also ist

$$\frac{u-y}{z-x} = y\left(b + \frac{z-x-1}{2}b^2 + \frac{(z-x-1)\,(z-x-2)}{2\cdot 3}b^3 + \text{etc.}\right).$$

Die Subsecante (in der Figur PS) ist $= \frac{z-x}{u-y}$

$y = \frac{1}{b+q}$, wo q das ganze nach b folgende Stück der hier gefundenen Reihe bedeutet. Setzt man in derselben $z = x$, so erhält man den Werth der Subtangente P T

$$t = \frac{1}{b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \text{etc.}}.$$

Die Subtangente an der logarithmischen Linie ist also eine unveränderliche Größe. In dem Artikel von den Logarithmen wird gezeigt, daß $b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \text{etc.} = \log.\,\text{nat.}\,(1+b) = \log.\,\text{nat.}\ a$ ist. Folglich ist die Subtangente $t = \frac{1}{\log.\,\text{nat.}\,a}$. Will man sie als Linie, ohne eine Einheit anzunehmen, ausdrucken, so ist $t = \frac{AB}{\text{l. nat.}\,(a : AB)}$. Da Logarithmen sich nie auf Linien oder benannte Größen, sondern nur auf absolute Zahlen beziehen, so ist log a, wenn a eine Linie bedeutet, als $\log.\,\frac{a}{1}$ zu betrachten, wo für 1 die Linie gesetzt wird, die vorher zur Einheit diente. Für die Zahl t wird nun $\frac{t}{AB}$ ge-

setzt; wo r eine absolute Linie, ohne Beziehung auf eine Einheit, bedeutet.

Anwendung der Differentialrechnung zur Bestimmung der berührenden Linie.

12. Eine berührende gerade Linie kann auch erklärt werden, als diejenige, welche mit der krummen Linie in dem Berührungspuncte einerley Richtung hat. An der geraden TMt (Fig. 34.) seyn die Abscissen AP, AQ, wie an der krummen AMR, die Ordinaten PM, Qt, so wird ihre Richtung bestimmt durch das Verhältniß der Unterschiede der beiden Abscissen und der Ordinaten, Mm: tm, welches für jeden Unterschied dasselbe bleibt, und = PT: PM ist. An der krummen Linie AMR wird die Richtung in dem Puncte M bestimmt durch das Gränzverhältniß der Unterschiede Mm: Nm, da das Verhältniß endlicher Unterschiede die Richtung der Chorde oder der schneidenden SMN angiebt. Demnach ist die berührende gerade Linie diejenige, an welcher das Verhältniß der Unterschiede zweyer Abscissen und der zugehörigen Ordinaten dem Gränzverhältnisse dieser Unterschiede an der Curve gleich ist.

13. Es sey nun für die krumme Linie AMR (Fig. 34.) die Abscisse AP = x, Ordinate PM = y, die berührende MT, die Subtangente PT = t, so ist $t = \frac{y\,dx}{dy}$.

Denn das Gränzverhältniß von Nm: Mm wird durch $dy : dx$ bezeichnet. Das demselben gleiche an der berührenden ist PM: PT; folglich ist $dy : dx = y : t$.

Man kann die Formel für t auch folgendergestalt abfassen. Es sey die Differentialgleichung zwischen den Coordinaten, $P\,dx = Q\,dy$, so ist $Pt = Qy$, und $t = \frac{Qy}{P}$.

Die Formeln gelten für jeden Coordinatenwinkel.

14. Wenn der Coordinaten-Winkel ein rechter ist, so ist die Tangente des Winkels TMP, der berührenden mit der Ordinate (d. i. der Curve in M mit der Ordinate)

$= \frac{PT}{PM} = \frac{dx}{dy}$; und die Tangente des W. MTP, der berührenden mit der Absciſſenlinie $= \frac{dy}{dx}$.

15. Die Subtangente liegt mit dem Anfangspuncte der Abſciſſen auf derſelben Seite der Ordinate, wenn die abſoluten Veränderungen der Coordinaten gleichnamig (beides Zunahmen oder Abnahmen) ſind; auf verſchiedenen Seiten, wenn dieſe ungleichnamig ſind. Ein poſitiver Werth von $\frac{y\,dx}{dy}$ zeigt an, daß die poſitive Abſciſſe von ihrem Anfangspuncte an, und die Subtangente PT von dem Grundpuncte P der Ordinate angenommen, entgegengeſetzte Richtungen haben; ein negativer Werth von $\frac{y\,dx}{dy}$ zeigt das Gegentheil an. Bey negativen Abſciſſen verhält es ſich umgekehrt. Nämlich hier zeigt ein poſitiver Werth der Subtangente an, daß ihre Richtung dieſelbe wie die der negativen Abſciſſe iſt. Man hat hier aber lieber auf die Richtung der poſitiven Abſciſſen zu achten, um die Beurtheilung der Lage der Subtangente einfacher zu machen.

16 Die Differentialrechnung leiſtet das auf einem kürzern Wege, was die obige Differenzenrechnung auf einem längern fand. Das Verfahren iſt nach beiden im Weſentlichen daſſelbe, nach jener aber iſt es kürzer, weil in den Differentialformeln alle die Rechnungen ſchon enthalten ſind, die nach der andern Rechnungsart in jedem Falle erſt gemacht werden müſſen. Die Differenzenrechnung erläutert aber die Anwendung der Differentialrechnung auf dieſen Fall, und überhaupt ihr Verfahren ſehr gut. Man ſieht daraus, wie ein von der Quantität der Unterſchiede unabhängiges Verhältniß entſteht, und daß dabey nichts als unbedeutend klein weggelaſſen wird, ſondern daß Größen oder Verhältniſſe gleich geſetzt werden, die der Beſchaffenheit des Geſuchten zufolge nicht ungleich ſeyn

dürfen. Zur Vergleichung beider Rechnungsarten wollen wir die obigen Beyspiele nach der Differentialrechnung behandeln.

17. Die krumme Linie sey eine Parabel, deren Gleichung ist $ax = yy$. Nun ist $a\,dx = 2y\,dy$, daher $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$; also die Subtangente $t = \frac{2yy}{a} = 2x$.

18. Die krumme Linie sey eine Ellipse, deren Gleichung ist $bb\,(2ax - xx) = aayy$. Die Differentialgleichung ist $bb\,(a-x)\,dx = aay\,dy$; daher $\frac{dx}{dy} = \frac{aay}{bb(a-x)}$, und die Subtangente $t = \frac{aayy}{bb\,(a-x)} = \frac{(2a-x)\,x}{a-x}$.

19. Die krumme Linie sey eine von der parabolischen Gattung, und ihre Gleichung, $y = a + bx + cx^2 + dx^3$. Die Differentialgleichung ist $dy = b\,dx + 2cx\,dx + 3dx^2\,dx$.

Daher $t = \frac{y}{b + 2cx + 3dx^2}$

20. Die Gleichung für die krumme Linie sey

$$ay^3 - bxy^2 - cx^2y + dx^3 + exy = 0,$$

so ist die Differentialgleichung, wenn man zuerst bloß x, und darauf y veränderlich setzt, (Diff. Gleich. 4 u. 11.)

$$(-by^2 - 2cxy + 3dx^2 + ey)\,dx$$
$$+ (3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex)\,dy = 0$$

folglich $t = \frac{y\,(3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex)}{by^2 + 2cxy - 3dx^2 - ey}$.

21. Ist die Gleichung die transscendente: $y = a^x$, so wird aus der Differenzen-Gleichung die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = y\,(b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.})$ hergeleitet, indem für den Quotienten der endlichen Differenzen der

Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ gesetzt, zugleich aber auch $z = x$ genommen wird. Zu vergl. Differ. Formeln §. 12.

Die Subtangente, $\frac{ydx}{dy}$, ist die Constante

$$\frac{1}{b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.}}$$

22. Ist auf derselben Seite der Abscissenlinie mehr als eine stetige Folge von Ordinaten, wenn nämlich die Curve mehr als einen Zweig auf dieser Seite hat, so hat die Subtangente für Puncte der Curve, die auf den verschiedenen Zweigen zu einer gemeinschaftlichen Abscisse gehören, verschiedene Werthe. Sie kann daher nicht bloß von x eine Function seyn. Um die verschiedenen Werthe derselben zu bestimmen, verbinde man die Gleichung für den Differentialquotienten, $\frac{dx}{dy}$, als eine endliche veränderliche Größe, p, mit der Gleichung zwischen x und y, und leite daraus durch die Wegschaffung von y eine Gleichung zwischen dem Quotienten p und x her. Aus dieser Gleichung müssen sich alle Werthe des Quotienten p für irgend eine Abscisse ergeben, und daraus die Subtangenten zu dieser Abscisse. Ist die Gleichung eine algebraische, so muß ihr Grad wenigstens so groß seyn, als die Anzahl der möglichen Werthe, welche der zu einer und derselben Abscisse gehörige Differentialquotient haben kann.

23. Schneiden sich zwey oder mehrere Zweige der Curve in einem Puncte, so sind in diesem so viele berührende als Zweige, die ihn gemein haben. Die Formel für die Subtangente kann aber keine derselben angeben, weil die Werthe von y für diesen Punct nicht verschieden sind. Aber die Gleichung zwischen dem Differentialquotienten p und der Abscisse (22.) giebt alle Werthe von p eben so gut an, als wenn alle Ordinaten zu einer Abscisse verschieden sind.

24. Ein leichterer und auch in allgemeinerer Rücksicht merkwürdiger Weg die Subtangenten für den Durchschnittspunct zweyer oder mehrerer Zweige zu finden, ist folgender.

Es sey $\frac{dx}{dy} = \frac{Q}{P}$, wo P und Q Functionen von x und y sind. In diesen setze man $x + e$ für x und $y + f$ für y, und bezeichne diese Ausdrücke der Coordinaten durch x' und y', so daß $\frac{dx'}{dy'} = \frac{Q + \Delta Q}{P + \Delta P}$, wo P und Q dieselben Functionen von x und y wie vorher, ihre Differenzen ΔP und ΔQ aber zugleich von e und f sind. Für $x = a$, und $y = b$, werde sowohl P als Q Null, so ist $\frac{dx'}{dy'} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$. Je kleiner e und f genommen werden, desto näher kommt der Quotient $\frac{dx'}{dy'}$ dem $\frac{dx}{dy}$, und $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ dem $\frac{dQ}{dP}$. Daher ist für die Coordinaten a und b der Differentialquotient $\frac{dx}{dy} = \frac{dQ}{dP}$, wo $x = a$, und $y = b$ zu setzen ist. Dividirt man in $\frac{dQ}{dP}$ Zähler und Nenner durch dy, so enthalten sie den Differentialquotienten $\frac{dx}{dy}$ nebst beständigen Größen. Wird nun die Gleichung auf beiden Seiten durch $\frac{dP}{dy}$ multiplicirt, so entsteht eine quadratische für $\frac{dx}{dy}$. Hiebey wird vorausgesetzt, daß $\frac{dP}{dy}$ und $\frac{dQ}{dy}$ nicht zugleich Null sind, und daß der erstere Quotient nicht eine gegebene Größe sey; dann erhält

man zwey Werthe für $\frac{dx}{dy}$ und dadurch auch für die Subtangente an dem Doppelpuncte, wo sich zwey Zweige schneiden, und $x = a$; $y = b$ ist.

Wenn in ΔP und ΔQ alle Glieder sich heben, die e und f einfach enthalten, und nur die mit den Quadraten und höhern Potenzen nebst Producten von e und f bleiben, so wird die Gränze von $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ eine gebrochene Function, die das Quadrat von $\frac{dx}{dy}$ enthält. Ist dieses nicht bloß im Zähler, sondern auch im Nenner enthalten, so entsteht aus der Gleichung $\frac{dx}{dy} = \frac{dQ}{dP}$ eine cubische für $\frac{dx}{dy}$, also für den Fall, da drey Zweige sich in einem Puncte schneiden. Wenn in $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ auch e^2, f^2 und ef wegfallen, so entsteht eine Gleichung vom vierten Grade für $\frac{dx}{dy}$ in dem Falle, daß vier Zweige sich in einem Puncte schneiden. Auf ähnliche Art bey noch größerer Anzahl gleicher Ordinaten an einem Puncte.

25. Exempel I. Die Gleichung sey

$$x^3 + xy^2 - 5x^2 + 3x - 4y + 5 = 0,$$

welche für $x = +1$ diese wird: $y^2 - 4y + 4 = 0$, oder $(y-2)^2 = 0$, so daß beide Werthe von $y = +2$ sind. Die krumme Linie ist Fig. 37 Tab. III. abgebildet. Sie schneidet die Abscissenlinie AX in drey Puncten B, C, D, für welche die Abscissen AB, AC, AD die Wurzeln der cubischen Gleichung, $x^3 - 5x^2 + 3x + 5 = 0$ sind, und erstreckt sich mit zwey unendlichen Schenkeln, MU, DU, längs der Asymptote AU, die durch den Anfang der Abscissen A geht. Sie hat in Beziehung auf die Abscissenlinie zwey Zweige, die sich in M schneiden, für welchen Punct die Abscisse $AP = +1$, und die Or-

dinate $PM = +2$ ist. Hier sind zwey berührende TMt und $T'Mt'$, deren Lage zu bestimmen ist. Für einen unbestimmten Punct der Curve ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4 - 2xy}{3x^2 + y^2 - 10x + 3}.$$

Für den Punct M, an dem $x = +1$, und $y + 2$ ist, sind Zähler und Nenner Null. Da $dQ = -2\,dy - 2y\,dx$, und $dP = 6x\,dx + 2y\,dy - 10\,dx$; so ist für $x = +1$ und $y = +2$;

$$dQ = -2\,dy - 4\,dx = -2\left(1 + \frac{2\,dx}{dy}\right)dy,$$

$$dP = +4\,dy - 4\,dx = 4\left(1 - \frac{dx}{dy}\right)dy.$$

Folglich ist

$$\frac{dx}{dy} = -\left(1 + \frac{2\,dx}{dy}\right) : 2\left(1 - \frac{dx}{dy}\right).$$

Daraus wird erhalten

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - \frac{2\,dx}{dy} - \tfrac{1}{2} = 0,$$

und daher $\frac{dx}{dy} = 1 \pm \sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

Die Subtangenten sind $PT = 2 + 2\sqrt{\tfrac{3}{2}}$; und $PT' = 2 - 2\sqrt{\tfrac{3}{2}}$. Die negative hat die Richtung der positiven Abscisse AP, zufolge (14.).

26. Exempel. II. Die Gleichung für eine krumme Linie sey

$$x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y + 2 = 0,$$

so ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2 - 2xy}{3x^2 - 4x + y^2}.$$

Für $x = +1$ wird $yy - 2y + 1 = 0$, so daß y zwey gleiche Werthe, $+1$ hat. Für diese wird der Zähler und Nenner des Quotienten $\frac{dx}{dy}$ Null. Es ist

$dQ = -2ydx - 2xdy$, und $dP = 6xdx - 4dx + 2ydy$, also für $x = +1$, und $y = +1$,

$$dQ = -2dx - 2dy = -2\left(\frac{dx}{dy} + 1\right)dy,$$

$$dP = 2dx + 2dy = 2\left(\frac{dx}{dy} + 1\right)dy.$$

Demnach ist $\frac{dx}{dy} = -1$, und die Subtangente

$\frac{ydx}{dy} = -1$. Dieser einfache Werth zeigt an, daß die krumme Linie für die Coordinaten, $x = +1$, und $y = +1$ eine Spitze hat, in welcher zwey Zweige an einer gemeinschaftlichen Berührungslinie zusammen kommen. Sie ist in Fig. 38. Tab. III. abgebildet. Sie erstreckt sich mit zwey unendlichen Schenkeln MU, BU an der Asymptote AU hin, und ihre beiden Zweige vereinigen sich in M, ohne sich zu schneiden. Die Subtangente ist PT, negativ, und hat daher von P aus mit den positiven Abscissen dieselbe Richtung.

Lage der Berührenden für Ordinaten aus einem Puncte.

27. Es ist BMR (Fig. 39. Tab. III.) eine krumme Linie, in deren Ebene ein bestimmter Punct C, von dem an die krumme Linie gerade wie CM gezogen werden. Jeder Punct M der Curve wird durch die Länge von CM und ihren Winkel mit einer fixen durch A gelegten geraden AC bestimmt. Es wird eine allgemeine Formel für die Lage der berührenden TMt gegen CM gesucht, vermittelst welcher der Winkel CMT aus der Gleichung zwischen CM und dem Winkel ACM hergeleitet werden könne.

Man ziehe noch eine Ordinate CN, welche die berührende in t schneide, und beschreibe mit CM als Halbmesser den Bogen Mm innerhalb des Winkels MCN. Der veränderliche Radius der Curve CM sey y, und $CN = y + \Delta y$;

der Winkel $ACM = \phi$, und $MCN = \Delta\phi$. Ein Winkel ist bey der Vergleichung mit Linien ein Kreisbogen, dessen Halbmesser die linearische Einheit ist. Die berührende ist auch hier die gerade, an welcher das Gränzverhältniß der Veränderungen der Coordinaten, nämlich tm und MCt gleich ist dem Gränzverhältniß der Veränderungen Nm und MCN an der Curve. Man ziehe noch die senkrechte CP auf die berührende, so ist $\cos MCP = \frac{CP}{CM}$, und $\cos tCP = \frac{CP}{Ct}$, daher

$$\cos MCP - \cos tCP = \frac{CP(Ct - CM)}{CM.Ct}; \text{ das ist}$$

(Goniometrie, 28.),

$$2 \sin \tfrac{1}{2} (MCP + tCP) . \sin \tfrac{1}{2} MCt = \frac{CP(Ct - CM)}{CM.Ct}, \text{ und } \frac{Ct - CM}{Mct} =$$

$$\frac{CM.Ct}{CP} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} Mct}{Mct} \cdot \sin \tfrac{1}{2} (MCP + tCP).$$

Die Gränze dieses Werthes ist $\frac{CM^2 \sin MCP}{CMP}$,

oder, weil $CP = MC . \cos MCP$ ist, diese,

$\frac{CM. \sin MCP}{\cos MCP.}$, oder $\frac{CM}{\tang CMP}$. Diese Gränze

ist auch die von dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta \phi}$. Da diese durch

$\frac{dy}{\phi d}$ bezeichnet wird, so ist $\frac{dy}{d\phi} = \frac{y}{\tang CMP}$, also ist

$$\tang CMP = \frac{y d\phi}{dy}.$$

Das Differentialverhältniß von tm zu MCt kann man etwas kürzer durch die Differentialrechnung erhalten. Es ist $CM = CP. \sec MCP$, und das Differential von

$CM = CP.\, d\, sec.\, MCP = CP.\, sec.\, MCP.\, tang\, MCP.\, dMCP. = CM.\, tang\, MCP.\, dMCP$
$= \frac{CM}{tang\, CMP}\, dMCP.$ (s. Differentialformeln.)

28. Exempel. Es ist AMR (Fig. 40. Tab. III.) eine Parabel, deren Axe AX, Brennpunct F. Die Ordinate aus dem Puncte F ist $FM = y$, der Winkel $AFM = \phi$, der Parameter $= a = 4AF$. Die Gleichung zwischen y und ϕ ist

$$\tfrac{1}{2} a = (1 + \cos \phi)\, y,$$

wo $\cos \phi$ für einen stumpfen Winkel negativ ist.

$$\text{Es ist } dy = \frac{a \sin \phi\, d\phi}{2(1 + \cos \phi)^2} = \frac{y \sin \phi\, d\phi}{1 + \cos \phi};$$

$$\text{also } \frac{y\, d\phi}{dy} = \frac{1 + \cos \phi}{\sin \phi} = \cot \tfrac{1}{2} \phi.$$

Die berührende in M sey TMt, so ist tang FMT $= \cot \frac{1}{2} \phi$; also $FMT = 90^\circ - \frac{1}{2} \phi$.

Man ziehe MQ parallel mit AX, so ist $FMQ = \phi$. Ferner sey MN senkrecht auf TMT, so ist $FMN = \frac{1}{2} \phi$, also $NMQ = NMF$, und $QMt = FMT$. Wenn AMR die von F an sie gezogenen Linien nach dem Gesetze der Zurückstrahlung für das Licht zurück sendet, so sind die zurückgeworfenen der Axe parallel, und die mit der Axe parallelen Linien werden nach dem Brennpunct hin gebogen.

Daher ist der Winkel MTF der berührenden mit der Axe gleich dem FMT, weil jener $= QMt$ ist. Folglich ist $FT = FM$. Auch ist $FN = FM$, weil $FNM = NMQ = NMF$. Also $FN = FT$.

29. Exempel. Es ist AMB (Fig. 41.) eine halbe Ellipse, AB die große Axe, C der Mittelpunct, F, G sind die Brennpuncte, man sucht die Winkel der Linien FM, GM mit der berührenden TMt.

Es sey $AC = a$, $CF = CG = e$, und $aa - ee = bb$, dem Quadrat der halben kleinen Axe; $FM = y$;

AFM $= \varphi$, so ist $y = \frac{bb}{a - e\cos\varphi}$. Daraus $dy = -\frac{bbe\sin\varphi . d\varphi}{(a - e\cos\varphi)^2}$ negativ, weil y abnimmt, wenn φ wächst. Also ist tang TMF $= \frac{y d\varphi}{dy}$ $= -\frac{a - e\cos\varphi}{e\sin\varphi}$, wo die Negation einen stumpfen Winkel anzeigt. Oder es ist tang tMF $= \frac{a - e\cos\varphi}{e\sin\varphi}$.

Die Linie aus dem andern Brennpuncte, GM, sey $= z$, und AGM $= \omega$, so ist $z = \frac{bb}{a + e\cos\omega}$, und tang TMG $= \frac{a + e\cos\omega}{e\sin\omega}$.

Setzt man für die Zähler ihre Werthe durch y und z, so ist tang tMF $= \frac{bb}{ey\sin\varphi}$; und tang TMG $= \frac{bb}{ez\sin\omega}$. Da $y : z = \sin\omega : \sin\varphi$, oder $y \sin\varphi = z . \sin\omega$, so sind beide Tangenten einander gleich, und die gleichnamigen Winkel der Linien aus den Brennpuncten mit der berührenden sind gleich groß.

30. Exempel. Es sey $\frac{y d\varphi}{dy} = a$, einer unveränderlichen Größe, so ist $d\varphi = \frac{a dy}{y}$, daher $\varphi = a \operatorname{lognat} \frac{y}{c}$, wo c eine willkührliche Größe ist. Die Linie ist die logarithmische Spirale.

Berührende krumme Linien.

31. Eine krumme Linie berührt eine andere, wenn sie in einem gemeinschaftlichen Puncte dieselbe gerade berührende haben.

32. Einen Kreis zu ziehen, der eine krumme Linie AMR (Fig. 42. T. III.) in dem Puncte M berührt, ziehe man zuerst die berührende TMt mittelst der Subtangente PT, und auf diese die senkrechte NMn. Auf dieser nehme man irgend einen Punct C, (auf der einen oder der andern Seite von TMt,) und beschreibe aus diesem als Mittelpunct durch M einen Kreis, so berührt dieser die krumme Linie. Liegt der Kreis auf derselben Seite der berührenden geraden mit der krummen Linie, so geht er entweder zwischen der geraden berührenden und der krummen Linie durch, oder die krumme Linie liegt zwischen der geraden berührenden und dem Kreise, wie es in der Figur der Fall ist, oder der Halbmesser des Kreises hat eine solche Größe, daß der damit beschriebene Kreis den Uebergang von den Kreisen in der einen Lage zu denen in der andern macht. Diese ausgezeichnete Größe des Halbmessers findet sich bey dem osculirenden Kreise oder Krümmungskreise.

33. Aus der Gleichung für eine krumme Linie werde die endliche Differenz zweyer Ordinaten, Δy, durch die zugehörige Differenz der Abscissen, Δx, mittelst des Taylorschen Lehrsatzes dargestellt, nämlich

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2 y}{1.2\,dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3 y}{1.2.3\,dx^3}\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Die Differentialquotienten sollen immer veränderlich bleiben, so daß die Reihe nirgends abbricht. Ueber derselben Abscissenlinie, und mit demselben Anfangspuncte der Abscissen, sey eine andere krumme Linie verzeichnet, an welcher die Differentialquotienten eine endliche Reihe ausmachen. Die Ordinaten an dieser seyn z, zu der mit jener erstern Linie gemeinschaftlichen Abscisse x, und

$z = Const + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + etc.$
mit einer endlichen Anzahl Glieder. Für $x = h$, und $y = k$ sey $z = y = k$, und die Const. werde dieser Annahme gemäß bestimmt, damit beide Linien eine gemeinschaftliche Ordinate für $x = h$ erhalten.

Wenn $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3}$;

u. s. f. so berührt die parabolische Linie die gegebene in dem Endpuncte der Ordinate k, und die Berührung ist desto inniger, je mehr Glieder in der Reihe für z genommen sind.

34. Es sey zuerst $z = C + ax + bx^2$, welches eine Gleichung für eine Parabel ist, so ist $\frac{dz}{dx} = a + 2bx$, und $\frac{d^2z}{dx^2} = 2b$, also nach dem Taylorschen Lehrsatze, $\Delta z = (a + 2bx)\Delta x + b\Delta x^2$, wie man es auch durch die Differenzenrechnung findet. Setzt man die beiden Glieder dieses Werthes von Δz den beiden ersten in dem Werthe von Δy gleich, so sind dadurch die Werthe von a und b bestimmt, da x einen gegebenen Werth h hat. Setzt man nämlich der Abkürzung wegen,

$\Delta y = \alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + etc.$

so ist $a + 2bh = \alpha$, und $b = \beta$, also $a = \alpha - 2\beta h$, und $z + \Delta z$ ist von $y + \Delta y$ nur durch die Glieder verschieden, welche die dritte Potenz und höhere von Δx enthalten, so daß der Unterschied gegen Δz oder Δy in einem viel stärkern Verhältnisse abnimmt, als nach welchem die Differenzen Δx kleiner gemacht werden. Die parabolische Linie entfernt sich von der gegebenen Curve weniger als die gerade berührende an dem gemeinschaftlichen Puncte beider. Für die gerade berührende sey die Gleichung $t = C + (a + 2bh)x$, und $C = k - (a + 2bh)h$, so ist $\Delta t = (a + 2bh)\Delta x$, welches mit Δy nur in dem ersten Gliede der Reihe übereinkommt. Die jetzt bestimmte parabolische Linie nähert sich auch der Curve mehr als jede andere ihrer Gattung, welche die Curve in demselben

Puncte wie jene berührt. Denn für die letztere sey die Gleichung $\Delta z^1 = \text{Const} + mx + nx^2$, wo z^1 ihre Ordinate bedeutet, ferner $m + 2n = \alpha$, aber nicht $n = \beta$, so berührt sie zwar die gegebene Curve, weil sie eine gemeinschaftliche berührende mit ihr hat, die Differenz Δz^1 weicht aber in dem zweyten Gliede ihres Werthes von dem Werthe Δy ab.

35. Es sey $z = \text{Const.} + ax + bx^2 + cx^3$, so ist $\Delta z = (a + 2bx + 3cx^2)\Delta x + (b + 3cx)\Delta x^2 + c\Delta x^3$, wie man es sowohl durch die Differentialrechnung aus dem Taylorschen Lehrsatze, als durch die Differenzenrechnung findet. Nun sey $a + 2bh + 3ch^2 = \alpha$; $b + 3ch = \beta$; $c = \gamma$, so ist für $x = h$ die Ordinate z an der parabolischen Linie von der Ordinate y an der gegebenen Curve nur in denen Gliedern verschieden, welche Δx^4 und höhere Potenzen von Δx enthalten. Die Abweichung nimmt daher bey Verminderung der Differenz Δx sehr ab. Die parabolische Linie berührt die Curve genauer als die von der ersten Gattung es thut.

36. Auf diese Art kann man parabolische Linien höheren Grades finden, welche die gegebene Curve noch vollkommener berühren. Wenn die parabolische Linie des ersten Grades zwischen der Curve und der geraden berührenden durchgeht, so geht die parabolische des zweyten Grades zwischen jener und der Curve hin, die vom dritten Grade zwischen der vom zweyten und der Curve. u. s. f.

37. Man darf daher für einen Bogen irgend einer krummen Linie den Bogen einer parabolischen setzen, wenn man sich nur wegen der Gränze der Fehler versichern kann. Denn aus der Gleichung zwischen den Coordinaten ergiebt sich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, und daraus die folgenden; aus diesen die Größen α, β, γ, etc. und daraus a, b, c, etc. nebst der Constans. Auch ohne die endliche Gleichung für die Curve zu haben, genügt es an dem ersten Differentialquotienten, wenn nur die Ordinate k

3. Die ersten 12 Bernoullischen Zahlen sind

$A = \frac{1}{6}$; $B = \frac{1}{30}$;

$C = \frac{1}{42}$; $D = \frac{1}{30}$;

$E = \frac{5}{66}$; $F = \frac{691}{2730}$;

$G = \frac{7}{6}$; $H = \frac{3617}{510}$;

$J = \frac{43867}{798}$; $K = \frac{174611}{330}$;

$L = \frac{854513}{138}$; $M = \frac{236364091}{2730}$.

4. Es seyn die Bernoullischen Zahlen, A, B, C, D . . . . $\overset{-3}{N}$, $\overset{-2}{N}$, $\overset{-1}{N}$, N, etc. wo N die nte derselben, $\overset{-1}{N}$, die (n — 1)te, u. s. f. ist. Die Binomial-Coefficienten in der (2n + 1)ten Potenz seyn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. so ist (Potenz III. 20).

$$\mathfrak{A}N - \mathfrak{C}\overset{-1}{N} + \mathfrak{E}\overset{-2}{N} - \mathfrak{G}\overset{-3}{N} + \ldots \pm \mathfrak{F}C \mp \mathfrak{D}B \pm \mathfrak{B}A \pm 1 = \pm \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}.$$

Setzt man für n folgweise 1, 2, 3, etc. so ist

$$3A + 1 = + \frac{3}{2}$$

$$5B - \frac{5.4.3}{1.2.3}A - 1 = - \frac{5}{2}$$

$$7C - \frac{7.6.5}{1.2.3}B + \frac{7..3}{1..5}A + 1 = + \frac{7}{1}$$

$$9D - \frac{9.8.7}{1.2.3}C + \frac{9..5}{1..5}B - \frac{9..3}{1..7}A - 1 = - \frac{9}{2}$$

$$11E - \frac{11.10.9}{1.2.3}D + \frac{11..7}{1..5}C - \frac{11..5}{1..7}B + \frac{11..3}{1..9}A + 1 = + \frac{11}{2}$$

u. s. w.

5. Um das Gesetz der Formation deutlicher zu machen, setze man

$A = 1.2\alpha$; $B = 1.2.3.4\beta$

$C = 1.2..6\gamma$; $D = 1.2....8\delta$

$E = 1.2..10\varepsilon$; etc.

so ist

$$\alpha + \frac{1}{1.2.3} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1.2}$$

$$\beta - \frac{\alpha}{1.2.3} - \frac{1}{1..5} = - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..4}$$

$$\gamma - \frac{\beta}{1.2.3} + \frac{\alpha}{1..5} + \frac{1}{1..7} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..6}$$

$$\delta - \frac{\gamma}{1.2.3} + \frac{\beta}{1..5} - \frac{\alpha}{1..7} - \frac{1}{1..9} = - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..8}$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{1.2.3} + \frac{\gamma}{1..5} - \frac{\beta}{1..7} + \frac{\alpha}{1..9} + \frac{1}{1..11} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1...10}.$$

u. s. f.

Die Größen $-1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon,$ etc. machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Relations-Scale ist

$$+\frac{1}{1.2.3} \;;\; -\frac{1}{1.2..5} \;;\; +\frac{1}{1.2..7}, \text{ u. s. f.}$$

nur daß zu dem hieraus entstehenden Werthe jeder noch eine Größe von der Form kommt, wie diejenigen sind, die in den vorhergehenden Formeln den Theil rechter Hand ausmachen.

6. Man vergleiche mit diesen Formeln diejenigen, welche für die Relationen der Coefficienten in der aus einer gebrochenen Function entstehenden Reihe, in dem Art.

3. Die ersten 12 Bernoullischen Zahlen sind

$A = \frac{1}{6}$; $B = \frac{1}{30}$;

$C = \frac{1}{42}$; $D = \frac{1}{30}$;

$E = \frac{5}{66}$; $F = \frac{691}{2730}$;

$G = \frac{7}{6}$; $H = \frac{3617}{510}$;

$J = \frac{43867}{798}$; $K = \frac{174611}{330}$

$L = \frac{854513}{138}$; $M = \frac{236364091}{2730}$.

4. Es seyn die Bernoullischen Zahlen, A, B, C, D . . . . $\overset{-3}{N}$, $\overset{-2}{N}$, $\overset{-1}{N}$, N, etc. wo N die nte derselben, $\overset{-1}{N}$, die (n — 1)te, u. s. f. ist. Die Binomial-Coefficienten in der (2n + 1)ten Potenz seyn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. so ist (Potenz III. 20).

$$\mathfrak{A}N - \mathfrak{C}\overset{-1}{N} + \mathfrak{E}\overset{-2}{N} - \mathfrak{G}\overset{-3}{N} + \ldots \pm \mathfrak{F}C \mp \mathfrak{D}B$$
$$\pm \mathfrak{B}A \pm 1 = \pm \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}.$$

Setzt man für n folgweise 1, 2, 3, etc. so ist

$$3A + 1 = + \frac{3}{2}$$

$$5B - \frac{5.4.3}{1.2.3}A - 1 = - \frac{5}{2}$$

$$7C - \frac{7.6.5}{1.2.3}B + \frac{7..3}{1..5}A + 1 = + \frac{7}{1}$$

$$9D - \frac{9.8.7}{1.2.3}C + \frac{9..5}{1..5}B - \frac{9..3}{1..7}A - 1 = - \frac{9}{2}$$

$$11E - \frac{11.10.9}{1.2.3}D + \frac{11..7}{1..5}C - \frac{11..5}{1..7}B$$
$$+ \frac{11..3}{1..9}A + 1 = + \frac{11}{2}$$

u. s. w.

5. Um das Gesetz der Formation deutlicher zu machen, setze man

$A = 1.2\alpha$; $B = 1.2.3.4\beta$

$C = 1.2..6\gamma$; $D = 1.2....8\delta$

$E = 1.2..10\varepsilon$; etc.

so ist

$$\alpha + \frac{1}{1.2.3} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1.2}$$

$$\beta - \frac{\alpha}{1.2.3} - \frac{1}{1..5} = - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..4}$$

$$\gamma - \frac{\beta}{1.2.3} + \frac{\alpha}{1..5} + \frac{1}{1..7} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..6}$$

$$\delta - \frac{\gamma}{1.2.3} + \frac{\beta}{1..5} - \frac{\alpha}{1..7} - \frac{1}{1..9} = - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..8}$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{1.2.3} + \frac{\gamma}{1..5} - \frac{\beta}{1..7} + \frac{\alpha}{1..9} + \frac{1}{1..11} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1...10}.$$

u. s. f.

Die Größen $-1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc. machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Relations-Scale ist

$+\frac{1}{1.2.3}$; $-\frac{1}{1.2..5}$; $+\frac{1}{1.2..7}$, u. s. f.

nur daß zu dem hieraus entstehenden Werthe jeder noch eine Größe von der Form kommt, wie diejenigen sind, die in den vorhergehenden Formeln den Theil rechter Hand ausmachen.

6. Man vergleiche mit diesen Formeln diejenigen, welche für die Relationen der Coefficienten in der aus einer gebrochenen Function entstehenden Reihe, in dem Art.

Rücklaufende Reihen, 9. sich finden. Es erhellt daraus, daß die obigen Zahlen α, β, γ, δ, etc. Coefficienten in einer Reihe sind, die aus einer rationalen gebrochnen Function einer veränderlichen Größe entsteht, worin Zähler und Nenner eine ohne Ende fortgehende Reihe sind. Um die gebrochne Function nach dem hier vorkommenden Falle einzurichten, setze man den

$$\text{Dividendus} = 1 - az + bz^2 - cz^3 + dz^4 - ez^5 + \text{etc.}$$

$$\text{Divisor} = 1 - Az + Bz^2 - Cz^3 + Dz^4 - Ez^5 + \text{etc.}$$

$$\text{Quotienten} = 1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

wo A, B, C, D, etc. aber nicht die Bernoullischen Zahlen bedeuten, sondern Coefficienten, die noch bestimmt werden sollen. Es ist nun

$$1 = 1$$

$$\alpha + A = + a$$

$$\beta - A\alpha - B = - b$$

$$\gamma - A\beta + B\alpha + C = + c$$

$$\delta - A\gamma + B\beta - C\alpha - D = - d$$

$$\varepsilon - A\delta + B\gamma - C\beta + D\alpha + E = + e$$

etc.

Die Vergleichung mit den Formeln für α, β, etc. in (5) giebt $A = \frac{1}{1.2.3}$; $B = \frac{1}{1.2..5}$;

$C = \frac{1}{1.2..7}$; $D = \frac{1}{1.2..9}$; $E = \frac{1}{1.2...11}$

u. s. w. Ferner

$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2}$; $b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2.3.4}$;

$c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2..6}$; $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2..8}$; $e = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2..10}$ etc.

Nun ist $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{1.2.3}\varphi^3 + \frac{1}{1.2..5}\varphi^5 - \frac{1}{1....7}\varphi^7 + \text{etc.}$ und $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{1.2.}\varphi^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\varphi^4 - \frac{1}{1.2..6}\varphi^6 + \text{etc.}$ (Cyklometrie 5. 6.) Man setze demnach φ^2 für z, und multiplicire zugleich den Divisor durch φ, dagegen man den Quotienten durch φ dividire, so ist der Dividendus $= \frac{1}{2}(1 + \cos.\varphi)$; der Divisor $\sin\varphi$, und der Quotient $= \frac{1}{\varphi} - \alpha\varphi^3 - \beta\varphi^5 - \gamma\varphi^5 - \delta\varphi^7 - \text{etc.}$ Nun ist $\frac{1+\cos\varphi}{2\sin\varphi} = \frac{1}{2}\,\text{cotang.}\,\frac{1}{2}\varphi$ (Goniometrie, 38.).

Folglich ist

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\varphi} - \alpha\varphi - \beta\varphi^3 - \gamma\varphi^5 - \delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

Die Bernoullischen Zahlen sind also Factoren der Coefficienten in der Reihe für $\cot\frac{1}{2}\varphi$. Es ist, wenn diese Zahlen selbst wieder eingeführt werden,

$$\cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \frac{2A}{1.2}\varphi - \frac{2B}{1.2.3.4}\varphi^5 - \frac{2C}{1.2..6}\varphi^6 - \frac{2D}{1.2...8.}\varphi^7 - \text{etc.}$$

8. Wenn $\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - a\varphi - b\varphi^3 - c\varphi^6 - d\varphi^7 - e\varphi^9 - \text{etc.}$ gesetzt wird, so ist (Cyklometrie, 15.)

$3a = 1$ $\quad$ $5b = aa$

$7c = 2ab$ $\quad$ $9d = 2ac + bb$

$11e = 2ad + 2bc$ $\quad$ $13f = 2ae + 2bd + cc$,

$15g = 2af + 2be + 2cd$ etc.

N

Da die Coefficienten unveränderlich sind, so ist

$$\cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \tfrac{1}{2}a\varphi - \tfrac{1}{8}b\varphi^3 - \tfrac{1}{32}c\varphi^5$$

$$- \tfrac{1}{128}\varphi^7 - \tfrac{1}{512}\varphi^9 - \text{etc.}$$ Also ist

$4\alpha = a$; $4^2 . \beta = b$; $4^3 . \gamma = c$; $4^4 . \delta = d$; $4^5 . \varepsilon = e$; etc. Setzt man für a, b, c, etc. diese Werthe in den angeführten Formeln, so lassen diese sich folgweise durch 4, 4^2, 4^3, etc. dividiren, und es bleiben dieselben Relationen zwischen den Zahlen α, β, γ, etc. wie zwischen a, b, c, etc. nur daß ihre Werthe andere sind. Es ist

$3\alpha = \tfrac{1}{4}$ $\quad 5\beta = \alpha\alpha$

$7\gamma = 2\alpha\beta$ $\quad 9\delta = 2\alpha\gamma + \beta\beta$

$11\varepsilon = 2\alpha\delta + 2\beta\gamma$ $\quad 13\zeta = 2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma\gamma$

$15\eta = 2\alpha\zeta + 2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta$ etc.

9. Die Relationen der Bernoullischen Zahlen, A, B, C, D, etc. selbst sind folgende:

$$3A = \frac{2.1}{1.2} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$5B = \frac{4.3}{1.2} \cdot AA$$

$$7C = \frac{6.5}{1.2} \cdot 2AB$$

$$9D = \frac{8.7}{1.2} \cdot 2AC + \frac{8..5}{1..4} \cdot BB$$

$$11E = \frac{10.9}{1.2} \cdot 2AD + \frac{10..7}{1..4} \cdot 2BC$$

$$13F = \frac{12.11}{1.2} \cdot 2AE + \frac{12..9}{1..4} \cdot 2BD + \frac{12..7}{1..6} \cdot CC$$

$$15G = \frac{14.13}{1.2} \cdot 2AF + \frac{14..11}{1..4} \cdot 2BE + \frac{14..9}{1..6} \cdot 2CD$$

etc.

Der Weg, auf welchem diese merkwürdigen Relationen der Bernoullischen Zahlen hier gefunden sind, ist ein anderer, als der mühsamere, auf welchem Euler in den Institt. Calc. diff. P. II. cap. 5. dazu gelangt ist.

Berührende gerade Linie an einem Puncte einer krummen Linie, (Tangente), ist diejenige, welche zwischen zwey schneidenden Linien, die durch diesen Punct und einen andern, auf entgegengesetzten Seiten desselben, gezogen sind, innerhalb ihres spitzigen Winkels liegt, dieser Winkel mag noch so klein und kleiner als jeder angebbare seyn.

1. Die krumme Linie sey A M R, (Fig. 34. Tab. II). Durch den Punct M, und die beiden Puncte N, n, auf entgegengesetzten Seiten von M, seyn die schneidenden, NMS, Mns, gezogen, so liegt die berührende TMt innerhalb des spitzen Winkels SMs und seines Scheitelwinkels, so klein auch der W. SMs werden mag. Wenn die Linien NMS und Mns sich um M drehen, so fallen sie, indem sie ihre Stellen wechseln auf der berührenden in eine einzige gerade Linie zusammen.

2. Kann die krumme Linie nur in zwey Puncten von einer geraden geschnitten werden, so ist eine berührende diejenige, welche nur einen Punct mit ihr gemein hat, und ganz auf einer Seite derselben liegt. Es giebt aber viele krumme Linien, die von einer geraden Linie in mehr als zwey Puncten geschnitten werden. Darum kann man die berührende nicht allgemein für diejenige erklären, die mit der krummen Linie nur einen Punct auf die gedachte Art gemein hat, oder man müßte dieses auf einen gewissen Theil der krummen Linie einschränken, wie Archimedes bey seiner Spirallinie thut. Er zeigt von dieser, daß jeder ihrer Umläufe nur in einem Puncte von der berührenden getroffen wird.

3. Wie die berührende an einem Kreise gezogen wird, lehren die Elemente, s. Kreis.

4. In einem Kegelschnitte kann durch jeden Punct eine gerade Linie gelegt werden, welche alle unter dem ge-

hörigen Winkel gezogenen parallelen Chorden oder Doppelordinaten halbirt. Die mit diesen Chorden durch den Endpunct dieser Linie gezogene parallele Linie berührt den Kegelschnitt, s. Linien der zweyten Ordnung.

5. Die Benennung, Tangente, wird schicklich der Linie, welche in der Goniometrie und Trigonometrie zur Bestimmung eines Winkels gebraucht wird, eigen gelassen werden können.

Analytische Methode, gerade berührende an eine krumme Linie zu ziehen.

6. Es sey AMR (Fig. 34.) ein Bogen der krummen Linie, für welche eiue Gleichung zwischen den Coordinaten AP und PM gegeben ist. Man nehme irgend einen Punct N auf der einen oder der andern Seite von M, und ziehe NQ parallel mit MP, so findet zwischen AQ. und QN dieselbe Gleichung Statt, wie zwischen AP und PM. Durch M, N werde eine gerade Linie NMS gezogen, welche die Abscissenlinie APQ in S treffe. Es sey Mm parallel mit AQ, so ist PS: PM = Mm: Nm. Das Verhältniß Mm: Nm suche man durch die beiden Abscissen und Ordinaten, und durch PS auszudrucken. Setzt man in diesem Verhältnisse AP = AQ, und MP = NQ, so geht die schneidende SMN in die berührende TMt über. Denn durch eine ähnliche Annahme für die schneidende Mns auf der andern Seite von M wird Ps = PS, daher Mns mit NMS in eine gerade Linie zusammen fällt, das ist, beide fallen in die berührende TMt.

7. Exempel. I. Es sey AMR (Fig. 34.) eine Parabel, deren Axe AP, und Parameter = a ist. Die Ordinaten MP, NQ seyn senkrecht auf die Axe; und AP = x; MP = y; AQ = z; NQ = u; die Subtangente PT = t, und die Subsecante PS = v. Es ist $ax = y^2$; und $az = u^2$; ferner $v : y = z - x : u - y$. Jene erstere Gleichung von der zweyten abgezogen giebt $a(z-x) = u^2 - y^2 = (u+y)(u-y)$. Daraus ist $z - x : u - y = u + y : a$; folglich $v : y = u + y : a$. Die-

selbe Proportion wird erhalten, wenn N auf der andern Seite von M, in n, genommen wird. Setzt man $u = y$, so werden die Werthe von PS und Ps sich gleich, das ist, $v = t$, und $t : y = 2y : a$, also $t = \frac{2y^2}{a}$, oder $t = 2x$. Ist PT gefunden, so ist dadurch die berührende bestimmt.

8. Exempel. II. Es sey AMB (Fig. 35.) eine halbe Ellipse, deren halbe große Axe AC $= a$; halbe kleine CD $= b$ ist. Die Construction und die Bezeichnungen wie in dem 1. Exempel. Die Gleichung für die Coordinaten AP ($= x$) und PM ($= y$) ist $b^2 (2ax - x^2) = a^2 y^2$, und für AQ, QN ist sie $b^2 (2az - z^2) = a^2 u^2$. Durch die Subtraction wird erhalten $2ab^2 (z - x) - b^2 (z^2 - x^2) = a^2 (u^2 - y^2)$, das ist, $2ab^2 (z - x) - b^2 (z + x)(z - x) = a^2 (u + y)(u - y)$. Da $v : y = z - x : u - y$, so ist $v : y = a^2 (u + y) : 2ab^2 - b^2 (z + x)$, es mag N auf der einen oder der andern Seite von M liegen. Setzt man $z = x$, und $u = y$, so werden die beiden Werthe der Subsecante v für entgegengesetzte Lagen von N einander gleich, und $=$ PT, so daß $t : y = a^2 y : b^2 (a - x)$, oder $t = \frac{a^2 y^2}{b^2 (a - x)} = \frac{2ax - x^2}{a - x}$. Dieses giebt die merkwürdige Proportion, CP : AP $=$ BP : PT.

9. Exempel. III. Es sey die Gleichung für die krumme Linie: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, und für die Coordinaten u und z sey sie $u = a + bz + cz^2 + dz^3$. Die krume Linie ist eine parabolische der zweyten Ordnung. Hieraus ist $u - y = b (z - x) + c (z^2 - x^2) + d (z^3 - x^3)$, oder $u - y = b (z - x) + c (z + x)(z - x) + d (z^2 + zx + x^2)(z - x)$; also $v : y = 1 : b + c (z + x) + d (z^2 + zx + x^2)$. Setzt man $z = x$, so ist $t = \frac{y}{b + 2cx + 3dx^2}$. Auf dieselbe Art findet man für parabolische Linie höherer Ordnun-

gen die Subtangenten, vermittelst derer die berührenden sich ziehen lassen.

10. Exempel. IV. Die Gleichung zwischen den Coordinaten sey eine ungesonderte (oder y eine functio implicita von x, nämlich:

$$ay^3 - bxy^2 - cx^2y + dx^3 + exy = 0.$$

Statt der Coordinaten x und y nehme man nun die beiden z und u, für welche eben so ist

$$au^3 - bzu^2 - cz^2u + dz^3 + ezu = 0.$$

Zieht man die erstere Gleichung von dieser ab, so ist

$$a(u^3 - y^3) - b(u^2 - y^2)z - by^2(z - x)$$
$$- c(z^2 - x^2)u - cx^2(u - y) + d(z^3 - x^3)$$
$$+ e(z - x)u + ex(u - y) = 0,$$

das ist

$$[a(u^2 + uy + y^2) - bz(u + y) - cx^2 + ex]$$
$$(u - y) = [by^2 + cu(z + x) - b(z^2 + zx + x^2)$$
$$- eu](z - x).$$

Also ist

$$v : y = [a(u^2 + uy + y^2) - bz(u + y) - cx^2 + ex] :$$
$$[by^2 + cu(z + x) - d(z^2 + zx + x^2) - eu].$$

Setzt man $u = y$ und $z = x$, so ist

$$t : y = [3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex] :$$
$$[by^2 + 2cxy - 3dx^2 - ey].$$

11. Exempel. V. Es sey x der Logarithme von y in dem System, dessen Basis $= a$ ist, wenn nämlich die dadurch bezeichneten Linien in Zahlen mittelst einer beliebigen Einheit ausgedruckt werden. Diese ist die Ordinate AB in dem Anfangspuncte der Abscissen A. (Fig. 36.) Demnach ist $y = a^x$. In der Figur ist $PM = y$, und $AP = x$. Eine andere Zahl sey u, und ihr Logarithme z in demselben System, so ist $u = a^z$. In der Figur wird u durch QN, und z durch AQ dargestellt. Aus beiden Gleichungen folgt erstlich durch die Division, $\frac{u}{y} = a^{z-x}$

Setzt man $a = 1 + b$, so ist nach dem binomischen Lehrsatze, $\frac{u}{y} = 1 + (z - x)\, b + \frac{(z-x)(z-x-1)}{1 \cdot 2} b^2$

$+ z - x - 2 \frac{(z-x-1)(z-x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 + \text{etc.}$

also ist

$$\frac{u-y}{z-x} = y \left(b + \frac{z-x-1}{2} b^2 + \frac{(z-x-1)(z-x-2)}{2 \cdot 3} b^3 + \text{etc.}\right).$$

Die Subsecante (in der Figur PS) ist $= \frac{z-x}{u-y}$

$y = \frac{1}{b+q}$, wo q das ganze nach b folgende Stück der hier gefundenen Reihe bedeutet. Setzt man in derselben $z = x$, so erhält man den Werth der Subtangente P T

$$t = \frac{1}{b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 + \text{etc.}}$$

Die Subtangente an der logarithmischen Linie ist also eine unveränderliche Größe. In dem Artikel von den Logarithmen wird gezeigt, daß $b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 + \text{etc.} = \log.\, \text{nat.}\, (1 + b) = \log.\, \text{nat.}\, a$ ist. Folglich ist die Subtangente $t = \frac{1}{\log.\, \text{nat.}\, a}$. Will man sie als Linie, ohne eine Einheit anzunehmen, ausdrucken, so ist $t = \frac{AB}{\text{l. nat.}\, (a : AB)}$. Da Logarithmen sich nie auf Linien oder benannte Größen, sondern nur auf absolute Zahlen beziehen, so ist log a, wenn a eine Linie bedeutet, als $\log. \frac{a}{1}$ zu betrachten, wo für 1 die Linie gesetzt wird, die vorher zur Einheit diente. Für die Zahl t wird nun $\frac{t}{AB}$ ge-

setzt, wo r eine absolute Linie, ohne Beziehung auf eine Einheit, bedeutet.

Anwendung der Differentialrechnung zur Bestimmung der berührenden Linie.

12. Eine berührende gerade Linie kann auch erklärt werden, als diejenige, welche mit der krummen Linie in dem Berührungspuncte einerley Richtung hat. An der geraden TMt (Fig. 34.) seyn die Abscissen AP, AQ, wie an der krummen AMR, die Ordinaten PM, Qt, so wird ihre Richtung bestimmt durch das Verhältniß der Unterschiede der beiden Abscissen und der Ordinaten, Mm: tm, welches für jeden Unterschied dasselbe bleibt, und = PT: PM ist. An der krummen Linie AMR wird die Richtung in dem Puncte M bestimmt durch das Gränzverhältniß der Unterschiede Mm: Nm, da das Verhältniß endlicher Unterschiede die Richtung der Chorde oder der schneidenden SMN angiebt. Demnach ist die berührende gerade Linie diejenige, an welcher das Verhältniß der Unterschiede zweyer Abscissen und der zugehörigen Ordinaten dem Gränzverhältnisse dieser Unterschiede an der Curve gleich ist.

13. Es sey nun für die krumme Linie AMR (Fig. 34.) die Abscisse AP = x, Ordinate PM = y, die berührende MT, die Subtangente PT = t, so ist $t = \frac{y\,dx}{dy}$.

Denn das Gränzverhältniß von Nm: Mm wird durch $dy : dx$ bezeichnet. Das demselben gleiche an der berührenden ist PM: PT; folglich ist $dy : dx = y : t$.

Man kann die Formel für t auch folgendergestalt abfassen. Es sey die Differentialgleichung zwischen den Coordinaten, $P\,dx = Q\,dy$, so ist $Pt = Qy$, und $t = \frac{Qy}{P}$.

Die Formeln gelten für jeden Coordinatenwinkel.

14. Wenn der Coordinaten-Winkel ein rechter ist, so ist die Tangente des Winkels TMP, der berührenden mit der Ordinate (d. i. der Curve in M mit der Ordinate)

$= \frac{PT}{PM} = \frac{dx}{dy}$; und die Tangente des W. MTP, der berührenden mit der Abscissenlinie $= \frac{dy}{dx}$.

15. Die Subtangente liegt mit dem Anfangspuncte der Abscissen auf derselben Seite der Ordinate, wenn die absoluten Veränderungen der Coordinaten gleichnamig (beides Zunahmen oder Abnahmen) sind; auf verschiedenen Seiten, wenn diese ungleichnamig sind. Ein positiver Werth von $\frac{y\,dx}{dy}$ zeigt an, daß die positive Abscisse von ihrem Anfangspuncte an, und die Subtangente PT von dem Grundpuncte P der Ordinate angenommen, entgegengesetzte Richtungen haben; ein negativer Werth von $\frac{y\,dx}{dy}$ zeigt das Gegentheil an. Bey negativen Abscissen verhält es sich umgekehrt. Nämlich hier zeigt ein positiver Werth der Subtangente an, daß ihre Richtung dieselbe wie die der negativen Abscisse ist. Man hat hier aber lieber auf die Richtung der positiven Abscissen zu achten, um die Beurtheilung der Lage der Subtangente einfacher zu machen.

16 Die Differentialrechnung leistet das auf einem kürzern Wege, was die obige Differenzenrechnung auf einem längern fand. Das Verfahren ist nach beiden im Wesentlichen dasselbe, nach jener aber ist es kürzer, weil in den Differentialformeln alle die Rechnungen schon enthalten sind, die nach der andern Rechnungsart in jedem Falle erst gemacht werden müssen. Die Differenzenrechnung erläutert aber die Anwendung der Differentialrechnung auf diesen Fall, und überhaupt ihr Verfahren sehr gut. Man sieht daraus, wie ein von der Quantität der Unterschiede unabhängiges Verhältniß entsteht, und daß dabey nichts als unbedeutend klein weggelassen wird, sondern daß Größen oder Verhältnisse gleich gesetzt werden, die der Beschaffenheit des Gesuchten zufolge nicht ungleich seyn

dürfen. Zur Vergleichung beider Rechnungsarten wollen wir die obigen Beyspiele nach der Differentialrechnung behandeln.

17. Die krumme Linie sey eine Parabel, deren Gleichung ist $ax = yy$. Nun ist $a\,dx = 2y\,dy$, daher $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$; also die Subtangente $t = \frac{2yy}{a} = 2x$.

18. Die krumme Linie sey eine Ellipse, deren Gleichung ist $bb\,(2ax - xx) = aayy$. Die Differentialgleichung ist $bb\,(a-x)\,dx = aay\,dy$; daher $\frac{dx}{dy} = \frac{aay}{bb(a-x)}$, und die Subtangente $t = \frac{aayy}{bb\,(a-x)} = \frac{(2a-x)\,x}{a-x}$.

19. Die krumme Linie sey eine von der parabolischen Gattung, und ihre Gleichung, $y = a + bx + cx^2 + dx^3$. Die Differentialgleichung ist $dy = b\,dx + 2cx\,dx + 3dx^2\,dx$.

Daher $t = \frac{y}{b + 2cx + 3dx^2}$

20. Die Gleichung für die krumme Linie sey

$$ay^3 - bxy^2 - cx^2y + dx^3 + exy = 0,$$

so ist die Differentialgleichung, wenn man zuerst bloß x, und darauf y veränderlich setzt, (Diff. Gleich. 4 u. 11.)

$$(-by^2 - 2cxy + 3dx^2 + ey)\,dx + (3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex)\,dy = 0$$

folglich $t = \frac{y\,(3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex)}{by^2 + 2cxy - 3dx^2 - ey}$.

21. Ist die Gleichung die transscendente: $y = a^x$, so wird aus der Differenzen-Gleichung die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = y\,(b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.})$ hergeleitet, indem für den Quotienten der endlichen Differenzen der

Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ gesetzt, zugleich aber auch $z = x$ genommen wird. Zu vergl. Differ. Formeln §. 12.

Die Subtangente, $\frac{y dx}{dy}$, ist die Constante

$$\frac{1}{b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \text{etc.}}$$

22. Ist auf derselben Seite der Abscissenlinie mehr als eine stetige Folge von Ordinaten, wenn nämlich die Curve mehr als einen Zweig auf dieser Seite hat, so hat die Subtangente für Puncte der Curve, die auf den verschiedenen Zweigen zu einer gemeinschaftlichen Abscisse gehören, verschiedene Werthe. Sie kann daher nicht bloß von x eine Function seyn. Um die verschiedenen Werthe derselben zu bestimmen, verbinde man die Gleichung für den Differentialquotienten, $\frac{dx}{dy}$, als eine endliche veränderliche Größe, p, mit der Gleichung zwischen x und y, und leite daraus durch die Wegschaffung von y eine Gleichung zwischen dem Quotienten p und x her. Aus dieser Gleichung müssen sich alle Werthe des Quotienten p für irgend eine Abscisse ergeben, und daraus die Subtangenten zu dieser Abscisse. Ist die Gleichung eine algebraische, so muß ihr Grad wenigstens so groß seyn, als die Anzahl der möglichen Werthe welche der zu einer und derselben Abscisse gehörige Differentialquotient haben kann.

23. Schneiden sich zwey oder mehrere Zweige der Curve in einem Puncte, so sind in diesem so viele berührende als Zweige, die ihn gemein haben. Die Formel für die Subtangente kann aber keine derselben angeben, weil die Werthe von y für diesen Punct nicht verschieden sind. Aber die Gleichung zwischen dem Differentialquotienten p und der Abscisse (22.) giebt alle Werthe von p eben so gut an, als wenn alle Ordinaten zu einer Abscisse verschieden sind.

24. Ein leichterer und auch in allgemeinerer Rücksicht merkwürdiger Weg die Subtangenten für den Durchschnittspunct zweyer oder mehrerer Zweige zu finden, ist folgender.

Es sey $\frac{dx}{dy} = \frac{Q}{P}$, wo P und Q Functionen von x und y sind. In diesen setze man $x + e$ für x und $y + f$ für y, und bezeichne diese Ausdrücke der Coordinaten durch x' und y', so daß $\frac{dx'}{dy'} = \frac{Q + \Delta Q}{P + \Delta P}$, wo P und Q dieselben Functionen von x und y wie vorher, ihre Differenzen ΔP und ΔQ aber zugleich von e und f sind. Für $x = a$, und $y = b$, werde sowohl P als Q Null, so ist $\frac{dx'}{dy'} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$. Je kleiner e und f genommen werden, desto näher kommt der Quotient $\frac{dx'}{dy'}$ dem $\frac{dx}{dy}$, und $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ dem $\frac{dQ}{dP}$. Daher ist für die Coordinaten a und b der Differentialquotient $\frac{dx}{dy} = \frac{dQ}{dP}$, wo $x = a$, und $y = b$ zu setzen ist. Dividirt man in $\frac{dQ}{dP}$ Zähler und Nenner durch dy, so enthalten sie den Differentialquotienten $\frac{dx}{dy}$ nebst beständigen Größen. Wird nun die Gleichung auf beiden Seiten durch $\frac{dP}{dy}$ multiplicirt, so entsteht eine quadratische für $\frac{dx}{dy}$. Hiebey wird vorausgesetzt, daß $\frac{dP}{dy}$ und $\frac{dQ}{dy}$ nicht zugleich Null sind, und daß der erstere Quotient nicht eine gegebene Größe sey; dann erhält

man zwey Werthe für $\frac{dx}{dy}$ und dadurch auch für die Subtangente an dem Doppelpuncte, wo sich zwey Zweige schneiden, und $x = a$; $y = b$ ist.

Wenn in ΔP und ΔQ alle Glieder sich heben, die e und f einfach enthalten, und nur die mit den Quadraten und höhern Potenzen nebst Producten von e und f bleiben, so wird die Gränze von $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ eine gebrochene Function, die das Quadrat von $\frac{dx}{dy}$ enthält. Ist dieses nicht bloß im Zähler, sondern auch im Nenner enthalten, so entsteht aus der Gleichung $\frac{dx}{dy} = \frac{dQ}{dP}$ eine cubische für $\frac{dx}{dy}$, also für den Fall, da drey Zweige sich in einem Puncte schneiden. Wenn in $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ auch e^2, f^2 und ef wegfallen, so entsteht eine Gleichung vom vierten Grade für $\frac{dx}{dy}$ in dem Falle, daß vier Zweige sich in einem Puncte schneiden. Auf ähnliche Art bey noch größerer Anzahl gleicher Ordinaten an einem Puncte.

25. Exempel I. Die Gleichung sey

$$x^3 + xy^2 - 5x^2 + 3x - 4y + 5 = 0,$$

welche für $x = +1$ diese wird: $y^2 - 4y + 4 = 0$, oder $(y-2)^2 = 0$, so daß beide Werthe von $y = +2$ sind. Die krumme Linie ist Fig. 37 Tab. III. abgebildet. Sie schneidet die Abscissenlinie AX in drey Puncten B, C, D, für welche die Abscissen AB, AC, AD die Wurzeln der cubischen Gleichung, $x^3 - 5x^2 + 3x + 5 = 0$ sind, und erstreckt sich mit zwey unendlichen Schenkeln, MU, DU, längs der Asymptote AU, die durch den Anfang der Abscissen A geht. Sie hat in Beziehung auf die Abscissenlinie zwey Zweige, die sich in M schneiden, für welchen Punct die Abscisse $AP = +1$, und die Or-

dinate $PM = +2$ ist. Hier sind zwey berührende TMt und T^1Mt^1, deren Lage zu bestimmen ist. Für einen unbestimmten Punct der Curve ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4 - 2xy}{3x^2 + y^2 - 10x + 3}.$$

Für den Punct M, an dem $x = +1$, und $y + 2$ ist, sind Zähler und Nenner Null. Da $dQ = -2xdy - 2ydx$, und $dP = 6xdx + 2ydy - 10dx$; so ist für $x = +1$ und $y = +2$;

$$dQ = -2dy - 4dx = -2\left(1 + \frac{2dx}{dy}\right)dy,$$

$$dP = +4dy - 4dx = 4\left(1 - \frac{dx}{dy}\right)dy.$$

Folglich ist

$$\frac{dx}{dy} = -\left(1 + \frac{2dx}{dy}\right) : 2\left(1 - \frac{dx}{dy}\right).$$

Daraus wird erhalten

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - \frac{2dx}{dy} - \tfrac{1}{2} = 0,$$

und daher $\frac{dx}{dy} = 1 \pm \sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

Die Subtangenten sind $PT = 2 + 2\sqrt{\tfrac{3}{2}}$; und $PT^1 = 2 - 2\sqrt{\tfrac{3}{2}}$. Die negative hat die Richtung der positiven Abscisse AP, zufolge (14.).

26. Exempel. II. Die Gleichung für eine krumme Linie sey

$$x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y + 2 = 0,$$

so ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2 - 2xy}{3x^2 - 4x + y^2}.$$

Für $x = +1$ wird $yy - 2y + 1 = 0$, so daß y zwey gleiche Werthe, $+1$ hat. Für diese wird der Zähler und Nenner des Quotienten $\frac{dx}{dy}$ Null. Es ist

$dQ = -2y\,dx - 2x\,dy$, und $dP = 6x\,dx - 4\,dx + 2y\,dy$, also für $x = +1$, und $y = +1$,

$$dQ = -2dx - 2dy = -2\left(\frac{dx}{dy} + 1\right)dy,$$

$$dP = 2dx + 2dy = 2\left(\frac{dx}{dy} + 1\right)dy.$$

Demnach ist $\frac{dx}{dy} = -1$, und die Subtangente $\frac{y\,dx}{dy} = -1$. Dieser einfache Werth zeigt an, daß die krumme Linie für die Coordinaten, $x = +1$, und $y = +1$ eine Spitze hat, in welcher zwey Zweige an einer gemeinschaftlichen Berührungslinie zusammen kömmen. Sie ist in Fig. 38. Tab. III. abgebildet. Sie erstreckt sich mit zwey unendlichen Schenkeln MU, BU an der Asymptote AU hin, und ihre beiden Zweige vereinigen sich in M, ohne sich zu schneiden. Die Subtangente ist PT, negativ, und hat daher von P aus mit den positiven Abscissen dieselbe Richtung.

Lage der Berührenden für Ordinaten aus einem Puncte.

27. Es ist BMR (Fig. 39. Tab. III.) eine krumme Linie, in deren Ebene ein bestimmter Punct C, von dem an die krumme Linie gerade wie CM gezogen werden. Jeder Punct M der Curve wird durch die Länge von CM und ihren Winkel mit einer fixen durch A gelegten geraden AC bestimmt. Es wird eine allgemeine Formel für die Lage der berührenden TMt gegen CM gesucht, vermittelst welcher der Winkel CMT aus der Gleichung zwischen CM und dem Winkel ACM hergeleitet werden könne.

Man ziehe noch eine Ordinate CN, welche die berührende in t schneide, und beschreibe mit CM als Halbmesser den Bogen Mm innerhalb des Winkels MCN. Der veränderliche Radius der Curve CM sey y, und $CN = y + \Delta y$;

der Winkel $ACM = \phi$, und $MCN = \Delta\phi$. Ein Winkel ist bey der Vergleichung mit Linien ein Kreisbogen, dessen Halbmesser die linearische Einheit ist. Die berührende ist auch hier die gerade, an welcher das Gränzverhältniß der Veränderungen der Coordinaten, nämlich tm und MCt gleich ist dem Gränzverhältniß der Veränderungen Nm und MCN an der Curve. Man ziehe noch die senkrechte CP auf die berührende, so ist $\cos MCP$ $= \frac{CP}{CM}$, und $\cos tCP = \frac{CP}{Ct}$, daher

$\cos MCP - \cos tCP = \frac{CP(Ct - CM)}{CM.Ct}$; das ist (Goniometrie, 28.),

$$2 \sin \tfrac{1}{2} (MCP + tCP) . \sin \tfrac{1}{2} MCt = \frac{CP(Ct - CM)}{CM.Ct}, \text{ und } \frac{Ct - CM}{Mct} =$$

$$\frac{CM.Ct}{CP} . \frac{2 \sin \frac{1}{2} Mct}{Mct} . \sin \tfrac{1}{2} (MCP + tCP).$$

Die Gränze dieses Werthes ist $\frac{CM^2 \sin MCP}{CMP}$,

oder, weil $CP = MC . \cos MCP$ ist, diese,

$\frac{CM. \sin MCP}{\cos MCP.}$, oder $\frac{CM}{\text{tang } CMP}$. Diese Gränze ist auch die von dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta \phi}$. Da diese durch $\frac{dy}{\phi d}$ bezeichnet wird, so ist $\frac{dy}{d\phi} = \frac{y}{\text{tang } CMP}$, also ist

$$\text{tang } CMP = \frac{y\,d\phi}{dy}.$$

Das Differentialverhältniß von tm zu MCt kann man etwas kürzer durch die Differentialrechnung erhalten. Es ist $CM = CP . \sec MCP$, und das Differential von

$CM = CP. d\,\sec. MCP = CP. \sec. MCP. \tan MCP. dMCP. = CM. \tan MCP. dMCP$
$= \frac{CM}{\tan CMP} dMCP.$ (s. Differentialformeln.)

28. Exempel. Es ist AMR (Fig. 40. Tab. III.) eine Parabel, deren Axe AX, Brennpunct F. Die Ordinate aus dem Puncte F ist $FM = y$, der Winkel $AFM = \varphi$, der Parameter $= a = 4AF$. Die Gleichung zwischen y und φ ist

$$\tfrac{1}{2} a = (1 + \cos\varphi)\, y,$$

wo $\cos\varphi$ für einen stumpfen Winkel negativ ist.

$$\text{Es ist } dy = \frac{a \sin\varphi\, d\varphi}{2(1+\cos\varphi)^2} = \frac{y \sin\varphi\, d\varphi}{1+\cos\varphi};$$

$$\text{also } \frac{y\,d\varphi}{dy} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Die berührende in M sey TMt, so ist tang FMT $= \cot \frac{1}{2}\varphi$; also $FMT = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

Man ziehe MQ parallel mit AX, so ist $FMQ = \varphi$. Ferner sey MN senkrecht auf TMT, so ist $FMN = \frac{1}{2}\varphi$, also $NMQ = NMF$, und $QMt = FMT$. Wenn AMR die von F an sie gezogenen Linien nach dem Gesetze der Zurückstrahlung für das Licht zurück sendet, so sind die zurückgeworfenen der Axe parallel, und die mit der Axe parallelen Linien werden nach dem Brennpunct hin gebogen.

Daher ist der Winkel MTF der berührenden mit der Axe gleich dem FMT, weil jener $= QMt$ ist. Folglich ist $FT = FM$. Auch ist $FN = FM$, weil $FNM = NMQ = NMF$. Also $FN = FT$.

29. Exempel. Es ist AMB (Fig. 41.) eine halbe Ellipse, AB die große Axe, C der Mittelpunct, F, G sind die Brennpuncte, man sucht die Winkel der Linien FM, GM mit der berührenden TMt.

Es sey $AC = a$, $CF = CG = e$, und $aa - ee = bb$, dem Quadrat der halben kleinen Axe; $FM = y$;

AFM $= \phi$, so ist $y = \frac{bb}{a - e \cos\phi}$. Daraus $dy = - \frac{bbe \sin\phi . d\phi}{(a - e \cos\phi)^2}$ negativ, weil y abnimmt, wenn ϕ wächst. Also ist tang TMF $= \frac{y d\phi}{dy}$ $= - \frac{a - e \cos\phi}{e \sin\phi}$, wo die Negation einen stumpfen Winkel anzeigt. Oder es ist tang tMF $= \frac{a - e \cos\phi}{e \sin\phi}$.

Die Linie aus dem andern Brennpuncte, GM, sey $= z$, und AGM $= \omega$, so ist $z = \frac{bb}{a + e \cos\omega}$, und tang TMG $= \frac{a + e \cos\omega}{e \sin\omega}$.

Setzt man für die Zähler ihre Werthe durch y und z, so ist tang tMF $= \frac{bb}{ey \sin\phi}$;
und tang TMG $= \frac{bb}{ez \sin\omega}$. Da $y : z = \sin\omega : \sin\phi$, oder $y \sin\phi = z . \sin\omega$, so sind beide Tangenten einander gleich, und die gleichnamigen Winkel der Linien aus den Brennpuncten mit der berührenden sind gleich groß.

30. Exempel. Es sey $\frac{y d\phi}{dy} = a$, einer unveränderlichen Größe, so ist $d\phi = \frac{a dy}{y}$, daher $\phi = a \operatorname{lognat} \frac{y}{c}$, wo c eine willkührliche Größe ist. Die Linie ist die logarithmische Spirale.

Berührende krumme Linien.

31. Eine krumme Linie berührt eine andere, wenn sie in einem gemeinschaftlichen Puncte dieselbe gerade berührende haben.

32. Einen Kreis zu ziehen, der eine krumme Linie AMR (Fig. 42. T. III.) in dem Puncte M berührt, ziehe man zuerst die berührende TMt mittelst der Subtangente PT, und auf diese die senkrechte NMn. Auf dieser nehme man irgend einen Punct C, (auf der einen oder der andern Seite von TMt,) und beschreibe aus diesem als Mittelpunct durch M einen Kreis, so berührt dieser die krumme Linie. Liegt der Kreis auf derselben Seite der berührenden geraden mit der krummen Linie, so geht er entweder zwischen der geraden berührenden und der krummen Linie durch, oder die krumme Linie liegt zwischen der geraden berührenden und dem Kreise, wie es in der Figur der Fall ist, oder der Halbmesser des Kreises hat eine solche Größe, daß der damit beschriebene Kreis den Uebergang von den Kreisen in der einen Lage zu denen in der andern macht. Diese ausgezeichnete Größe des Halbmessers findet sich bey dem osculirenden Kreise oder Krümmungskreise.

33. Aus der Gleichung für eine krumme Linie werde die endliche Differenz zweyer Ordinaten, Δy, durch die zugehörige Differenz der Abscissen, Δx, mittelst des Taylorschen Lehrsatzes dargestellt, nämlich

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2 y}{1.2\, dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3 y}{1.2.3\, dx^3}\Delta x^3 +$$

etc.

Die Differentialquotienten sollen immer veränderlich bleiben, so daß die Reihe nirgends abbricht. Ueber derselben Abscissenlinie, und mit demselben Anfangspuncte der Abscissen, sey eine andere krumme Linie verzeichnet, an welcher die Differentialquotienten eine endliche Reihe ausmachen. Die Ordinaten an dieser seyn z, zu der mit jener erstern Linie gemeinschaftlichen Abscisse x, und

$$z = \text{Const} + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.}$$

mit einer endlichen Anzahl Glieder. Für $x = h$, und $y = k$ sey $z = y = k$, und die Const. werde dieser Annahme gemäß bestimmt, damit beide Linien eine gemeinschaftliche Ordinate für $x = h$ erhalten.

Wenn $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3}$; u. s. f. so berührt die parabolische Linie die gegebene in dem Endpuncte der Ordinate k, und die Berührung ist desto inniger, je mehr Glieder in der Reihe für z genommen sind.

34. Es sey zuerst $z = C + ax + bx^2$, welches eine Gleichung für eine Parabel ist, so ist $\frac{dz}{dx} = a + 2bx$, und $\frac{d^2z}{dx^2} = 2b$, also nach dem Taylorschen Lehrsatze, $\Delta z = (a + 2bx)\Delta x + b\Delta x^2$, wie man es auch durch die Differenzenrechnung findet. Setzt man die beiden Glieder dieses Werthes von Δz den beiden ersten in dem Werthe von Δy gleich, so sind dadurch die Werthe von a und b bestimmt, da x einen gegebenen Werth h hat. Setzt man nämlich der Abkürzung wegen,

$$\Delta y = \alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + \text{etc.}$$

so ist $a + 2bh = \alpha$, und $b = \beta$, also $a = \alpha - 2\beta h$, und $z + \Delta z$ ist von $y + \Delta y$ nur durch die Glieder verschieden, welche die dritte Potenz und höhere von Δx enthalten, so daß der Unterschied gegen Δz oder Δy in einem viel stärkern Verhältnisse abnimmt, als nach welchem die Differenzen Δx kleiner gemacht werden. Die parabolische Linie entfernt sich von der gegebenen Curve weniger als die gerade berührende an dem gemeinschaftlichen Puncte beider. Für die gerade berührende sey die Gleichung $t = C + (a + 2bh)x$, und $C = k - (a + 2bh)h$, so ist $\Delta t = (a + 2bh)\Delta x$, welches mit Δy nur in dem ersten Gliede der Reihe übereinkommt. Die jetzt bestimmte parabolische Linie nähert sich auch der Curve mehr als jede andere ihrer Gattung, welche die Curve in demselben

Puncte wie jene berührt. Denn für die letztere sey die Gleichung $\Delta z^1 = \text{Const} + mx + nx^2$, wo z^1 ihre Ordinate bedeutet, ferner $m + 2n = \alpha$, aber nicht $n = \beta$, so berührt sie zwar die gegebene Curve, weil sie eine gemeinschaftliche berührende mit ihr hat, die Differenz Δz^1 weicht aber in dem zweyten Gliede ihres Werthes von dem Werthe Δy ab.

35. Es sey $z = \text{Const.} + ax + bx^2 + cx^3$, so ist $\Delta z = (a + 2bx + 3cx^2)\Delta x + (b + 3cx)\Delta x^2 + c\Delta x^3$, wie man es sowohl durch die Differentialrechnung aus dem Taylorschen Lehrsatze, als durch die Differenzenrechnung findet. Nun sey $a + 2bh + 3ch^2 = \alpha$; $b + 3ch = \beta$; $c = \gamma$, so ist für $x = h$ die Ordinate z an der parabolischen Linie von der Ordinate y an der gegebenen Curve nur in denen Gliedern verschieden, welche Δx^4 und höhere Potenzen von Δx enthalten. Die Abweichung nimmt daher bey Verminderung der Differenz Δx sehr ab. Die parabolische Linie berührt die Curve genauer als die von der ersten Gattung es thut.

36. Auf diese Art kann man parabolische Linien höheren Grades finden, welche die gegebene Curve noch vollkommener berühren. Wenn die parabolische Linie des ersten Grades zwischen der Curve und der geraden berührenden durchgeht, so geht die parabolische des zweyten Grades zwischen jener und der Curve hin, die vom dritten Grade zwischen der vom zweyten und der Curve. u. s. f.

37. Man darf daher für einen Bogen irgend einer krummen Linie den Bogen einer parabolischen setzen, wenn man sich nur wegen der Gränze der Fehler versichern kann. Denn aus der Gleichung zwischen den Coordinaten ergiebt sich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, und daraus die folgenden; aus diesen die Größen α, β, γ, etc. und daraus a, b, c, etc. nebst der Constans. Auch ohne die endliche Gleichung für die Curve zu haben, genügt es an dem ersten Differentialquotienten, wenn nur die Ordinate k

für die Abscisse h bekannt ist. Allein man muß wohl bemerken, daß zwey Linien, ungeachtet einer sehr genauen Berührung in einem Puncte, sich doch beträchtlich von einander entfernen können. Man darf ohne Einschränkung eine osculirende parabolische Linie so wenig als einen osculirenden Kreis für eine andere krumme Linie setzen. Der Unterschied zwischen Δz und Δy nimmt in einem viel stärkern Verhältnisse zu, als in welchem Δx wächst. Verändert man den Werth der Abscisse k, die zu einem Berührungspuncte gehört, so erhält man eine andere osculirende Linie, weil die Werthe von α, β, γ, etc. nebst der Ordinate k sich ändern, und die Const. erhält auch einen andern Werth. Dazu kömmt, daß, wenn die Reihe der Differentialquotienten nicht abbricht, die Reihe für Δy nur durch kleine Werthe von Δx in Beziehung auf die linearische Einheit convergirend gemacht werden mag.

38. Die parabolischen Linien haben als osculirende oder annähernde Linien vor dem Krümmungskreise den Vorzug, daß sie sich jedem Laufe einer andern Linie durch die Änderung ihrer Krümmung gleichsam mehr anschmiegen als ein Kreis, dessen Krümmung unveränderlich ist, und daß man nach Beschaffenheit der Umstände sie von einem höhern oder niedrigern Grade nehmen kann. Auch ist es bequem, daß sie dieselben Abscissen mit der aufgegebenen Curve behalten, und daß beider Ordinaten parallel sind. Aber sie bleiben immer nur berührende Linien.

39. In einer Untersuchung über das ballistische Problem (Mathem. Abhandlungen, Potsdam 1797) ist eine osculirende parabolische Linie an dem Wurfspuncte der Trajectorie in einem widerstehenden Mittel für diese selbst genommen. Daß die berührende von dieser bey einem beträchtlichen Bogen sehr abweichen werde, ist begreiflich.

Normale und Subnormale.

40. Wegen des Zusammenhanges mit der Untersuchung finde hier auch die Bestimmung der Normale und

Subnormale an irgend einem Puncte einer krummen Linie ihre Stelle.

41. Die Normale ist die auf die berührende in dem Berührungspuncte gezogene senkrechte. In Fig. 40. ist es die Linie MN. Die Subnormale ist das Stück der Abscissenlinie PN zwischen der Ordinate und Normale.

42. Bey rechtwinklichten Coordinaten ist, wenn TP die Subtangente ist, TP : PM = PM : PN. Da $TP = \frac{ydx}{dy}$; so ist die Subnormale $PN = \frac{ydy}{dx}$.

43. Exempel I. Es sey AMR (Fig. 40.) eine Parabel, so ist $ax = yy$, also $\frac{1}{2}adx = ydy$, und $PN = \frac{1}{2}a$.

44. Exempel II. Es ist AMB (Fig. 41.) eine halbe Ellipse, die halbe große Axe $AC = a$, die halbe kleine $CD = b$; $AP = x$; $PM = y$, so ist $bb(2ax - xx) = aayy$. Daraus ist $bb(a-x)dx = aaydy$, also ist $PN = \frac{bb}{aa}(a-x)$, und $AC^2 : CD^2 = CP : CN$.

Die Normale an der Ellipse halbirt den Winkel FMG der aus den Brennpuncten nach M gezogenen Linien, wegen (29.).

45. Exempel III. An der Hyperbel ist, bey gleichförmigen Bedeutungen der Buchstaben, $bb(2ax + xx) = aayy$, also die Subnormale $= \frac{bb}{aa}(a + x)$.

Geschichte der Methoden Berührende zu ziehen.

46. Die alten Geometer bestimmten die Lage der berührenden bloß durch Hülfe der Geometrie. Als man im 17ten Jahrhundert die Rechnung mit der Geometrie zu verbinden anfieng, war man sehr angelegentlich auf Methoden bedacht, die berührenden durch allgemeine analyti-

sche Regeln zu bestimmen. Descartes giebt in seiner Geometrie, 2ten B. ein Verfahren an, Normalen an eine jede krumme Linie zu ziehen, für welche eine algebraische Gleichung vorhanden ist, und sagt davon, daß diese Aufgabe unter allen, die er kenne, die nützlichste und allgemeinste sey, ja auch, daß ihm in der ganzen Geometrie die Auflösung derselben das liebste wäre. Es ist freylich noch etwas unbequem, allein als einer der ersten Versuche in dieser Art merkwürdig. Aus einem Puncte der Abscissenlinie als Mittelpunct werde ein Kreis beschrieben, der die Curve in zwey oder mehrern Puncten schneide. Man verbinde die allgemeine Gleichung zwischen dem Halbmesser dieses Kreises, dem Abstand seines Mittelpunctes von dem Anfange der Abscissen (v) und den Coordinaten der Curve mit der besondern Gleichung für diese, und suche denjenigen Werth von v, für welchen zwey Durchschnittspuncte zusammenfallen. Durch diesen Werth wird der Kreis ein berührender, und der Halbmesser in dem Berührungspuncte die Normale an demselben. Descartes bestimmt durch die Methode der Indeterminirten die Form der Coefficienten, wodurch die Gleichung für v zwey gleiche Wurzeln erhält. Einen bequemern Weg, die berührende zu ziehen, worauf er durch Fermats Methode geleitet war, zeigt er an einem Beyspiele in einem seiner Briefe (Epist. T. III. p. 175.). Aus der Gleichung für eine Curve leitet er eine Gleichung zwischen dem Abstande zweyer Ordinaten und der zu einer derselben gehörigen Subsecante her, und setzt in dieser den Abstand der Ordinate Null, so verwandelt sich die Subsecante in die Subtangente. — In Wolfs Analysis Finit. §. 410, 440, 491. sind Beyspiele der erstern Methode an den drey Kegelschnitten anzutreffen.

47. Die eben erwähnte Methode von Fermat ist sinnreich, und dadurch merkwürdig, daß sie die erste Anwendung der Methode der Gränzen ist. Fermat hatte diese schon zur Bestimmung der größten oder kleinsten Werthe einer Function gebraucht, und zeigte an der Para-

bel, wie sie auch die berührende zu finden diene. Er hat nie eine Erklärung, noch einen allgemeinen Beweis dieser Methode mitgetheilt, sondern begnügte sich sie in besondern Anwendungen zu zeigen. Dies verleitete Descartes zu einem Mißverständnisse, daß er glaubte, eine berührende sollte die größte unter allen Linien seyn, die von einem Puncte an die convexe Seite einer Curve gezogen werden können. Als er nach dieser Voraussetzung die berührende an einen Kreis aus einem gegebenen Puncte ziehen wollte, mußte er etwas widersprechendes finden. Auch übereilte er sich sehr, wie er das Verfahren, welches Fermat bey der Parabel gebraucht hatte, auf andere Linien anwenden wollte. Aus Eifersucht gegen Fermat suchte er dessen Methoden fehlerhaft zu finden, und begieng dadurch selbst Mißgriffe. Von dem Streite, der hierüber zwischen Descartes und Fermats Verehrern entstand, sehe man die Briefe des erstern, 47 bis 54, in der latein. Ausgabe; die Preißschrift von Genty über Fermat, und die Geschichte der Mathematik von Montucla, Th. 2. S. 138 ff. der 2ten Ausg. Der letztere hat aber den Geist der Fermatschen Methode nicht recht gefaßt. Die Methode der Tangenten hängt nach Fermat gar nicht von der Methode zur Bestimmung der Größten und Kleinsten ab, sondern beide sind Anwendungen eines allgemeinen Verfahrens, die Gränze eines Verhältnisses zur Bestimmung der Relation gewisser Größen zu gebrauchen.

48. Fermats Methode berührende zu ziehen verdient, wegen der Verwandtschaft mit der Methode durch die Differentialrechnung, hier gezeigt zu werden. Es soll dies aber an einem Beyspiele geschehen, welches etwas schwerer ist als das von Fermat genommene, und wobey Descartes selbst den Sinn der Methode verfehlte. In Fermats Werken, die nach seinem Tode herausgegeben sind, ist sein Verfahren für berührende nirgends bestimmt erklärt, und auch nicht bewiesen.

Es sey AMR (Fig. 43. Tab. III.) eine krumme Linie, welche in M von der geraden TMR berührt werde.

Die Abscissenlinie sey AX, welche von MT in T geschnitten wird. Zu dem Puncte M gehören die Coordinaten AP, PM, zu einem andern Puncte N die Coordinaten AQ, QN. Die verlängerte QN treffe die berührende TM in R. Man setze $AP = x$; $PM = y$; $AQ = x + e$; $QN = z$; $TP = t$. Nun ist $t : t + e = y : QR$, aber that zu $t + e$ ein kleineres Verhältniß als y zu z, oder $\frac{t}{t+e} < \frac{y}{z}$. Diese Formel der Ungleichheit nähert sich immer mehr und ohne Ende einer Formel der Gleichheit, da QR und QN sich einander immer näher kommen, je kleiner der Abstand PQ zwischen den beiden Ordinaten wird, und, indem QN in MQ fällt, das Verhältniß beider das der Gleichheit wird. Ist nun y oder eine Potenz derselben eine gesonderte Function von x, damit z durch x und e ausgedruckt werden könne, so geht die Ungleichheit in Gleichheit über, wenn $e = 0$ genommen wird, ohne daß darum die Gleichung identisch würde. Dieses wird ein Beyspiel deutlich machen.

Die krumme Linie sey eine Ellipse, für welche die Gleichung ist: $aayy = bb\,(2ax - xx)$. Für die Coordinaten $x + e$ und z ist sie: $aazz = bb\,(2a(x+e) - (x+e)^2)$. Daher ist

$$\frac{t^2}{(t+e)^2} < \frac{2ax - xx}{2a(x+e) - (x+e)^2}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Product der beiden Nenner, so ist nach gehöriger Reduction, durch Aufhebung der gleichen Glieder, und Division durch e,

$$t^2\,(2a - 2x - e) < (2t + e)\,(2ax - xx).$$

Wenn e verschwindet, so bleibt

$$t^2\,(a - x) = t\,(2ax - xx),$$

so daß $t = \frac{2ax - xx}{a - x}$.

49. Hudde erleichterte die erste Methode des Descartes durch die Regel, welche er fand, um einer Glei-

chung zwey oder mehr gleiche Wurzeln zu geben. S. Huddenii epist. I. de reductione aequationum, in accession. ad Cartesii Geom. p. 436.

50. Huygens ward durch die von Fermat nur angedeutete Regel veranlaßt, ihr eine bequemere Form zu geben. Diese ist vollkommen diejenige, welche durch die Differentialrechnung gefunden wird. Statt der Bezeichnungen dx und dy hat er e und $\frac{ey}{z}$, wo z die Subtangente bedeutet. In der Gleichung zwischen x und y setzt er $x + e$ für x, und $y + \frac{ey}{z}$ für y, und läßt das Quadrat nebst den höhern Potenzen der Differenzen weg. Er erweiset seine Regel an einem Beyspiele, so daß man die Allgemeinheit derselben daraus einsieht. Seine Regel ist folgendergestalt ausgedruckt: Nachdem alle Termini der vorgegebenen Gleichung auf eine Seite gebracht sind, multiplicire man alle diejenigen, welche y enthalten, durch die Anzahl der Dimensionen von y, und dieses giebt den Dividendus. Darauf multiplicire man alle Terminos, die x enthalten, ebenfalls mit der Anzahl der Dimensionen von x in jedem, und dividire jeden derselben durch x selbst; dieses ist der Divisor zu jenem Dividendus. Der Quotient ist die Linie z, wodurch er die Subtangente bezeichnet. Hugenii Opera varia Vol. 1. pag. 495. Der Aufsatz ist zuerst in den Divers ouvrages de Mathem. et de Phys. par Mrs. de l' Acad. R. 1693 erschienen. Huygens sagt, daß Hudde und de Slüse ihm eine mit der seinigen übereinstimmende Regel mitgetheilt hätten; er wisse aber nicht, auf welchem Wege sie von ihnen gefunden sey. Die Regel, wie de Slüse sie vorgetragen hat, steht in den Philosoph. Transactionen vom J. 1672 und 1673. Huygens wird die Regel vor dieser Zeit schon gefunden haben, ob er gleich den Beweis viel später erst bekannt gemacht hat.

51. Barrow beschäftigt sich viel mit der Bestimmung der berührenden, in seinen Lection. geom. VIII.

IX. X. Seine wirklich künstlichen Methoden sind ganz in Vergessenheit gerathen, so daß auch Montucla davon nichts weiter anführt als die Regel, welche Barrow zuletzt giebt. Barrow zeigt, wie man aus der berührenden an einer Curve die berührende an einer andern Curve, die aus jener auf gewisse Art bestimmt wird, finden könne, theils in einem Durchschnittspuncte mit jener, theils in andern Puncten; nicht allein bey parallelen Ordinaten, sondern auch bey solchen, die aus einem Puncte gezogen sind. Nun mag man für die erstere Curve einen Kreis nehmen, oder für sie eine gerade setzen. Will man also an eine gegebene Curve berührende ziehen, so muß man zuerst eine Relation derselben zu einer geraden Linie, zum Kreise oder einer Curve, deren berührende sich ziehen lassen, suchen, und zwar eine solche, dergleichen Barrow zum Grunde gelegt hat. Das Verfahren erfordert, wie in der ältern Geometrie gewöhnlich ist, in jedem Falle besondere Veranstaltungen. Am Ende (pag. 80.) giebt Barrow eine allgemeine Regel, bey parallelen Ordinaten eine berührende in jedem Puncte zu ziehen. Sie ist ganz die in (13*) vorgetragene. Er leitet sie aus dem Verhältnisse Mm : Nm in dem als unendlich klein betrachteten Dreyeck MmN (Fig. 34. Tab. II.) her. Er bezeichnet die beyden Glieder des Verhältnisses durch e und a. Die Größen P, Q in der Formel $Pdx = Qdy$ (13*.) bestimmt er eben so wie es durch die Differentialrechnung geschieht, und vertauscht e und a (d. i. dx und dy) mit t und y.

52. Die Methoden dieser Geometer finden bey irrationalen Größen in der Gleichung für eine Curve Schwierigkeit, noch mehr, wenn die Relation der Coordinaten Bogen oder Flächenräume einer andern krummen Linie in sich schließt, wiewohl doch Barrow schon gewisse Fälle dieser Art aufgelöset hat. Newton aber war durch seine Fluxionen-Rechnung im Stande, bey allen Arten von Gleichungen für krumme Linien berührende zu ziehen. Dieses zeigt er in dem Tractat: Methodus Fluxionum et serierum infinitarum, in neun verschiedenen Fällen, und fügt noch

sieben hieher gehörige Aufgaben, aber ohne Auflösung, hinzu, z. B. den Punct zu finden, wo die berührende einen gegebenen Winkel mit der Abscissenlinie macht; wo sie gegen diese am meisten oder am wenigsten geneigt ist; eine krumme Linie nach einem gewissen Gesetze zu beschreiben, die eine andere der Lage nach gegebene in einem gegebenen Puncte berührt. Wenn man diese Untersuchungen in Newtons Schrift durchgeht, so vergleiche man damit die von Barrow gegebenen Auflösungen, wo transscendente Functionen vorkommen.

Newton hat schon im J. 1665 seine neue Rechnungs-Methode auf die Aufgabe von den berührenden angewandt. Da er die krummen Linien durch Zusammensetzung von Bewegungen entstehen ließ, so gab die Richtung des beschreibenden Punctes ihm die berührende in jedem Puncte des Weges. Z. B. wenn in Fig. 34. der Punct M der Ordinate PM auf derselben in der Richtung PM sich bewegt, indem zugleich die Ordinate sich parallel von P nach Q fortrückt, und der Punct auf der Ordinate den Weg mN beschrieben hat, nachdem PM in QN gerückt ist, so würde die gerade MN die Richtung der zusammengesetzten Bewegung seyn, wenn beyde Bewegungen nach mN und PQ gleichförmig wären. Sind sie dieses nicht, so ist der Weg des beschreibenden Punctes eine krumme Linie; das Verhältniß der Geschwindigkeiten nach PQ und PM in dem Puncte M ist das Gränzverhältniß der Linien Mm, mN, und die Richtung ist die Linie TM in dem Dreyecke TPM, worin TP : PM jenes Gränzverhältniß ist.

53. Früher schon hat Roberval die Lage der berührenden aus der Zusammensetzung zweyer Bewegungen hergeleitet. Er bemerkte, daß die berührende nichts anders als die Richtung des sie beschreibenden beweglichen Punctes ist, wiewohl er hievon keinen deutlichen und einleuchtenden Beweis giebt. Er konnte seinen Grundsatz aber nur in besondern Fällen anwenden. Denn dazu ist es nöthig, das Verhältniß der Geschwindigkeiten für die par-

tiellen oder relativen Bewegungen zu entwickeln. Wo eine krumme Linie keine Eigenschaft zeigte, woraus dieses Verhältniß unmittelbar hergeleitet werden konnte, war die Methode in seinen Händen unzulänglich. Der leichteste Fall ist bey den Kegelschnitten. Auf der Ellipse hat der beschreibende Punct zwey gleiche relative Geschwindigkeiten, wodurch er sich dem einen Brennpuncte nähert, und von dem andern sich entfernt. Die berührende halbirt also den Winkel beyder Richtungen. Auf der Hyperbel sind die relativen Geschwindigkeiten in Absicht auf die Brennpuncte gleich, und beyde entfernend oder nähernd. Daher halbirt die berührende ebenfalls den Winkel der beyden Richtungen, und geht zwischen den Brennpunkten durch.

54. Als Leibnitz seine Differentialrechnung in den Actis Erud. 1684 bekannt machte, zeigte er die vortheilhafte Anwendung derselben zur Bestimmung der berührenden in ein paar Beyspielen, die für die bis dahin bekannten Methoden zu schwer gewesen wären. Es sind darin irrationale Ausdrücke und Bruchgrößen gehäuft. Er bemerkt, daß seine Methode sich auch auf transscendente Linien erstreckt. An den ältern Methoden tadelt er, daß sie nur die Differenz einer einzigen veränderlichen Größe, und nicht zugleich die Differenzen der damit verbundenen Grössen gebrauchen, daher es nach denselben nöthig ist, Brüche und Irrationalgrößen wegzuschaffen.

Leibniz möchte immer die Methode berührende zu ziehen von Barrow gelernt haben, und es bliebe doch seine Erweiterung derselben durch die von ihm erfundene Differentialrechnung eine wichtige Verbesserung, worauf so große Geometer, wie Barrow und Huygens nicht gekommen sind, da sie sich ganz an geometrische Methoden hielten. Allein Leibnitz hat hier alles oder das meiste aus sich selbst genommen. In dem Aufsatze de Geometria recondita, cet. A. E. 1686. erzählt er, wie er schon in den ersten Zeiten seines mathematischen Studium auf die Betrachtung des von ihm sehr treffend genannten charakteristischen Dreyecks gekommen sey, das ist, des Dreyecks von den

verschwindenden Differenzen der Coordinaten und des Bogens einer krummen Linie, woraus er sehr viele Lehrsätze hergeleitet, die er hernach bey den beiden Gregory's und Barrow gefunden habe. Da die Anwendung der algebraischen Rechnung ihn nicht befriedigt habe, sey er auf seine Analysis Indivisibilium et infinitorum gerathen. Jakob Bernoulli äußerte in seinem Aufsatze, specimen calc. diff. in dimensione Parabolae helicoidis, A. Er 1691. daß wer die Barrowische Rechnung gefaßt hätte, die von Leibnitz gefundene nicht verfehlen könnte, als welche auf jene ganz gegründet sey, und etwa nur in der Notation der Differentiale, und einigen Abkürzungen der Rechnung sich unterscheide. In einem folgenden Aufsatze, specimen alterum calculi differentialis, ib. 1691 lenkte er aber ein, und erklärte sich dahin, daß die Uebereinstimmung beider Methoden nicht weiter gehe, als daß, wenn man die eine begriffen habe, die andere desto leichter verstanden werden könne. Auch leiste die Leibnizische Rechnung vieles, was die Barrowische nicht im Stande sey, und es habe eine seltene Kraft des Geistes erfordert, die Rechnung so kurz und einfach zu machen, als Leibnitz sie geliefert hat.

Berührungspunct ist der Punct, wo eine krumme Linie von einer geraden, oder von einer andern krummen Linie berührt wird.

Berührungswinkel (Angulus contactus, seu contingentiae) ist die Lage, die ein Bogen einer krummen Linie gegen die sie berührende an dem Berührungspuncte hat.

Der Winkel einer krummen Linie mit einer geraden sie schneidenden ist der Winkel, welchen die berührende an jener in dem Durchschnittspuncte mit dieser macht. Denn bey diesem Winkel kommt es bloß auf die Richtung der krummen Linie in dem Durchschnittspuncte an, nicht auf die benachbarten Theile des Bogens. Der Winkel einer

krummen Linie mit der sie berührenden selbst ist also vollkommen Null. Sieht man aber auf die Ablenkung der krummen Linie von der berührenden geraden, so kann diese als ein gemischtlinichter Winkel (angulus mixtilineus) des Bogens der krummen Linie und der berührenden an dem einen Endpuncte betrachtet werden, nach der Analogie des Winkels zweyer geraden Linien. Man kann einen solchen Winkel aber nicht mit geradlinichten, auch nicht mit solchen unendlich kleinen, sondern nur mit andern seiner Art vergleichen. Der Kreis giebt ein Mittel zu dieser Vergleichung.

Es sey A E (Fig. 44. Tab. III.) ein Bogen eines Kreises, dessen Mittelpunct C ist. In A sey die berührende A D. Euklides zeigt (III. 16.), daß zwischen der auf A C senkrechten (oder berührenden) A D und dem Kreise keine gerade Linie gezogen werden kann, daher der Winkel des Kreises und der berührenden A D kleiner ist als jeder spitzige geradlinichte Winkel.

Ob nun gleich jede gerade Linie A F, die durch A innerhalb des W. C A D gezogen wird, den Kreisbogen A E B schneidet, so lassen sich doch unendlich viele Kreise ziehen, die zwischen dem Bogen A E und der gemeinschaftlichen berührenden durchgehen, nämlich alle, die aus einem Mittelpuncte auf der Linie durch A und C, mit einem Halbmesser, größer als A C, beschrieben werden. (Kästners Anfangsgründe der Geom. S. 20. Zus. 6.) Die stetige Ablenkung ist an den größern Kreisen geringer als an den kleinern, bey gleicher Länge der Bogen.

Die Ablenkung des Kreisbogens A E in E von der berührenden A D, in Absicht auf die Richtung, ist der Winkel der in E berührenden mit A D, das ist der Winkel A C E. Auf dem mit A G beschriebenen Kreise sey der Bogen A e = A E, so ist die Ablenkung des Bogens A e in e der Winkel A G e. Nimmt man die Bogen A E, A e gleich groß, so verhalten sich die Ablenkungen in E und e wie A G : A C, weil bey gleichen Bogen die Win-

kel sich umgekehrt wie die Halbmesser verhalten. Statt der Ablenkungen gleich großer Bogen in den Endpuncten mag man auch kurz die Ablenkungen der ganzen unbestimmten Bogen setzen. Dieses sind die gemischtlinichten Winkel DAE, DAe, welche zwar nicht mit geradlinichten Winkeln verglichen werden können, aber doch ein bestimmbares Verhältniß unter sich haben, nämlich das umgekehrte Verhältniß ihrer Halbmesser. Mit einem geradlinichten Winkel kann der gemischtlinichte nicht verglichen werden, weil auf den Schenkeln jenes die Theile immer dieselbe Lage gegen einander behalten, auf diesem nicht.

Nun sey MAm (Fig. 45.) ein Bogen einer krummen Linie, an welcher in A die berührende gerade DAd gezogen ist, und BAb ein Kreisbogen, der aus einem Mittelpuncte C auf der durch A normalen AC beschrieben ist, so daß zwischen demselben und dem Bogen der Curve MAm kein anderer Kreisbogen durchgehen könne, sondern jeder andere, aus einem Mittelpuncte auf der Normale beschriebene Kreis entweder zwischen DAd und MAm durchgehe, oder innerhalb des Kreisbogens BAb falle, das ist, es sey AC der Halbmesser des Krümmungskreises. Solchergestalt ist der Berührungswinkel in A an der krummen Linie MAm und an dem Kreise BAb derselbe. In jedem andern Puncte der krummen Linie, wie M, ist der Berührungswinkel daselbst und an dem zugehörigen Krümmungskreise auch gleich groß. Daher verhalten sich die Berührungswinkel in A und M umgekehrt wie die Halbmesser der Krümmung in A und M.

Die Halbmesser der Krümmung verhalten sich umgekehrt wie die Krümmungswinkel; also verhalten sich die Berührungswinkel wie die Krümmungswinkel, d. i. die Winkel zweyer aneinander stoßenden Bogen einer Curve.

Über den Berührungswinkel ist im 16ten Jahrhundert ein lebhafter Streit zwischen Peletarius (Pelle-

tier) und Clavius entstanden. Der erste behauptete, der Berührungswinkel sey kein wahrer Winkel, überhaupt keine Größe, sondern die gerade berührende am Kreise falle mit dem Umfange zusammen, und sey nicht gegen sie geneigt; der Winkel des Halbkreises mit dem Durchmesser sey allerdings einem geradlinichten Rechten gleich.

Clavius behauptete dagegen, der Berührungswinkel im Kreise sey wirklich ein Winkel, und zwar eine Größe, die sich ins Unendliche theilen lasse, zwar nicht durch eine gerade Linie, aber wol durch den Umfang eines größern Kreises; doch sey er kleiner als jeder mögliche geradlinichte; der Winkel des Halbkreises sey kleiner als ein geradlinichter Rechter, doch aber größer als jeder geradlinichte spitze Winkel. Auch seyn der Berührungswinkel und ein geradlinichter ungleichartige Größen, und könnten daher nicht verglichen werden. Dieses zur Erwiederung auf einen Grund, den P. für seine Behauptung anführte. Clavius hat seines Gegners Gründe und seine eigenen in seinem Commentar über Euklides Elemente (III. 28) angeführt.

Die Geschichte des Streites und die Untersuchung der Frage hat Wallis in einer Abhandlung 1656 vorgetragen, welcher er eine Vertheidigung noch 1685 folgen ließ. Beide Abhandlungen stehen in dem zweyten Theile seiner Werke, p. 605 — 664. Die zweyte Abhandlung ward dadurch veranlaßt, daß ein Jesuit, Leotaud, in seiner Cyclomathia, 1662, die Vertheidigung des Clavius übernommen hatte. Wallis erklärt sich für die Meinung des Peletarius.

Man kann sagen, daß beide Recht haben, weil sie den Winkel einer krummen Linie mit einer geraden sich verschiedentlich gedenken. Tacquet sagt in seiner Ausgabe des Euklides, daß beide sich irrige Vorstellungen von der Natur der Winkel machten. Diese seyn keine Größen, sondern Beschaffenheiten (modi) einer Größe, und könnten nur in Absicht auf Congruenz oder Nicht-Congruenz verglichen werden.

Ein Berührungswinkel kann unendlich klein, oder unendlich groß, in Vergleichung mit Berührungswinkeln an Kreisen seyn. Wenn zwischen der krummen Linie MAm und der in A berührenden geraden DAd kein Kreisbogen durch A, aus einem Mittelpuncte auf der Normale AC, gezogen werden kann, so groß auch der Halbmesser genommen werden mag, so ist der Krümmungswinkel MAD unendlich klein, und die Krümmung von MAm in A unendlich gering. Umgekehrt, wenn jeder Kreis, der aus einem Mittelpuncte auf der Normale durch A beschrieben wird, zwischen der berührenden DAd und der krummen Linie durchgeht, der Halbmesser mag noch so klein genommen werden, so ist der Krümmungswinkel der krummen Linie in A unendlich groß, und die Krümmung daselbst unendlich stark.

Exempel. Die krumme Linie AMN (Fig. 46.) sey eine höhere Parabel, deren Gleichung ist $y^3 = a^2x$. Die Axe sey AX; auf dieser die Abscisse $AP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$. Man ziehe AM, und auf diese die senkrechte MQ, welche AX in Q schneidet, und setze $AQ = 2u$. Da $AP : AM = AM : AQ$ ist, so ist $2ux = x^2 + y^2$, und $2u = x + \frac{y^2}{x}$. Für unsere krumme Linie ist $2u = x + \frac{a^2}{y}$. Dieses ist der Durchmesser AQ eines Kreises, der durch M geht. Je näher M an A genommen wird, desto größer wird dieser Durchmesser. Nimmt man also einen Punct m auf dem Bogen AM zwischen A und M, so geht der durch die Puncte A, m auf gleiche Art beschriebene Kreis zwischen dem durch die Puncte A, M beschriebenen und der in A beide berührenden AD hindurch. Nimmt man zwischen A und m wieder einen Punct, und beschreibt durch diesen und A aus einem Mittelpuncte auf AX einen Kreis, so nähert sich dieser der berührenden noch mehr als der durch A, m, beschriebene. Die Gränze aller dieser Kreise ist

ein Kreis mit einem unendlich großen Durchmesser; das ist, die Ablenkung der krummen Linie in A von der berührenden ist unendlich gering, oder die Krümmung unendlich klein.

Die krumme Linie sey eine andere Art von höherer Parabel, deren Gleichung ist $y^3 = ax^2$. Nun ist $2u = x + \sqrt{ay}$. Ein Kreis durch A und m beschrieben, aus einem Mittelpuncte auf AX, fällt innerhalb des durch A, M auf gleiche Art beschriebenen Kreises; die Ablenkung der krummen Linie von der berührenden AD wird immer größer, und in A unendlich stark, wo der Durchmesser des Kreises unendlich klein ist.

Wenn die Gleichung ist $y^4 = a^3x$, so ist $2u = x + \frac{a^3}{y^2}$, und die Ablenkung von der berührenden in A ist unendlich geringer als an der krummen Linie, deren Gleichung ist $y^3 = a^2x$. Läßt man die Exponenten von y nach der Folge der natürlichen Zahlen zunehmen, so entsteht eine Folge von Berührungswinkeln, deren jeder unendlich klein gegen den vorhergehenden ist. Für die erste in dieser Reihe von krummen Linien, die apollonische Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$, ist der Berührungswinkel in A gleich dem an einem Kreise mit dem Durchmesser a.

An der krummen Linie, deren Gleichung ist $y^4 = ax^3$, ist $2u = x + \sqrt[3]{ay^2}$. Unterscheidet man dieses u durch ein Strichlein von dem u für die Linie mit der Gleichung $y^3 = ax^2$, so ist die Gränze für $u : u' = \sqrt{y} : \sqrt[3]{y^2} = 1 : \sqrt[6]{y}$; da in dem Werthe des Durchmessers der Theil x gegen den zweyten Theil zuletzt unendlich klein wird. An der krummen Linie mit der Gleichung $y^4 = ax^3$ ist also der Berührungswinkel bey A unendlich größer als an der andern, mit der Gleichung $y^3 = ax^2$.

Zu vergleichen: Newtoni Methodus fluxionum et seriérum infin. p. 114. edit. Castillion.

Beständige Größe (Constans) ist diejenige, die nach der Integration einer Differentialgleichung dem Integral beygefügt wird, weil bey der Differentiation einer Gleichung dasjenige Glied, was bloß eine unveränderliche Größe enthält, weggelassen wird, und also bey jeder Integration ein solches Glied als vorhanden anzunehmen ist. Was es für einen Werth habe, muß aus den Bedingungen der Verbindung der Größen bestimmt werden. In manchen Fällen ist es Null. In allgemeinen Untersuchungen bleibt es unbestimmt, und wird durch Const. oder C bezeichnet.

Bestimmt ist, wobey nichts willkührliches Statt hat. Eine bestimmte Aufgabe ist, die nur auf eine Art aufgelöset werden kann, oder zu welcher die mögliche Anzahl der verschiedenen Auflösungen gegeben wird. Eine bestimmte Gleichung ist, worin nur eine einzige unbekannte Größe vorkommt. Eine bestimmte Zahl ist, deren Verhältniß zur Einheit gegeben wird, wie 8; $\frac{3}{4}$; $\frac{10}{3}$. Dahin gehören aber auch alle Irrationalzahlen, wenn gleich der Exponens ihres Verhältnisses zu der Einheit oder zu einer rationalen Zahl nicht vollständig angegeben werden kann.

Bestimmter Schnitt (Sectio determinata; διωρισμενη τομη) ist die Benennung einer geometrischen Aufgabe, worüber Apollonius, der große Geometer des Alterthums, eine Abhandlung in zwey Büchern oder Abtheilungen geschrieben hat, die verloren sind. Pappus hat in seinen mathematischen Sammlungen in der Vorrede zu dem 7ten Buche eine kurze Nachricht von dem Inhalte dieser Schrift gegeben, und in diesem Buche 51 Sätze, die zu den Aufgaben von dem bestimmten Schnitte nöthig sind (Lemmata) mit den Beweisen vorgetragen. Nach Anleitung jener Nachricht hat Snellius ein ähnliches Werk zu liefern unternommen, in dem Apollonius Batavus, Lugd. 1608. pagg. 37. 4. Es ist aber noch sehr unvollständig, wie man aus dem bloßen Anblick

erkennen mag. Die Hülfssätze bey Pappus sind nicht benutzt. Daher ist Robert Simson mit dieser Bearbeitung der Aufgabe sehr unzufrieden. Um dieselbe Zeit mit Snellius beschäftigte sich Marinus Ghetaldus aus Ragusa mit dieser Aufgabe. Seine Constructionen sind aber nach Montucla's Urtheil oft zu schwerfällig. Ein Italiener, Giannini, ist diesem Schriftsteller zufolge besser in die Methode des alten Geometers eingegangen. Inzwischen ist die Schrift des Snellius vor nicht langer Zeit von einem Engländer Lawson ins Englische übersetzt, London 1772, und mit einer neuen Restauration von Wales begleitet. Eine Wiederherstellung des Apollonischen Werkes, die von dem Original kaum verschieden seyn mag, hat Robert Simson geliefert. Er hat eben so viele Hauptaufgaben und so viele besondere Fälle (epitagmata), als nach Pappus Anzeige in dem griechischen Werke waren, auch eben so viele Bestimmungen eines größten oder kleinsten Verhältnisses, wo ein solches Statt findet. Zu den zwey Büchern des Apollonius hat er noch zwey eigene gefügt, die etwas schwerere verwandte Aufgaben enthalten. In der Sammlung, Rob. Simson Opera reliqua, Glasguae, 1776. 4. sind die wiederhergestellten Bücher des Apollonius von S. 59 — 193; die beiden zugefügten von S. 198 — 313 enthalten. Dieses Werk ist dienlich sich eine Übung in der geometrischen Analysis und Synthesis zu verschaffen, wozu ein Theil desselben auch schon hinreichend seyn möchte.

Die Aufgabe fordert, auf einer geraden Linie einige Puncte so anzugeben, daß die Rechtecke oder Quadrate von den Theilen ein gegebenes Verhältniß haben, bey einer bestimmten gegenseitigen Lage der Puncte. Daher die Benennung der Aufgabe.

A P B

I. Auf einer geraden Linie sind zwey Puncte, A, B, gegeben, und neben bey eine gerade Linie von gegebener Länge D, es wird auf jener der Punct P gesucht, so daß $PA^2 : PB^2$, oder auch $PA \times D : PB^2$ einem gegebenen Verhält-

nisse gleich sey, der Punct P mag zwischen A und B, oder außer beiden, auf dieser oder jener Seite liegen sollen.

A P B C

II. Auf einer geraden Linie seyn drey Puncte, A, B, C, gegeben, es wird der Punct P gesucht, so daß $PA \times D : PB \times PC$, oder $PA^2 : PB \times PC$ einem gegebenen Verhältnisse gleich, und die gegenseitige Lage aller vier Puncte irgend eine bestimmte sey. Die beygefügte Anordnung ist nur eine einzelne.

A P B C D

III. Auf einer geraden Linie seyn vier Puncte, A, B. C, D, gegeben, es wird der Punct P gesucht, so daß $PA \times PB : PC \times PD$ einem gegebenen Verhältnisse gleich, und die gegenseitige Lage aller fünf Puncte irgend eine bestimmte sey.

Die Aufgaben haben, als algebraische betrachtet, gar keine Schwierigkeit. Sie führen nur auf Gleichungen vom zweyten Grade Das Künstliche nach der Methode der Alten besteht darin, sie bloß durch Verbindungen von Verhältnissen, und durch Zusammensetzungen von Rechtecken und Quadraten, mittelst einer geometrischen Rechnung allein, oder mit Zuziehung einer Construction aufzulösen, und zwar so, daß P die verlangte Lage gegen die gegebenen Puncte erhalte. Apollonius hat die Auflösungen auf zweyerley Art gegeben, einmahl bloß durch gerade Linien, nach dem Verfahren des Euklides im zweyten Buche der Elemente, dann aber auch auf eine feinere und lehrreichere Art durch Anwendung der an einen Halbkreis gezogenen Linien, die mit den Theilen auf der gegebenen in Verbindung gebracht werden. Die Mannichfaltigkeit der Fälle, welche nach der Methode der Alten alle einzeln vorgenommen werden mußten, und die Bestimmung des Verhältnisses, welches zu der Gränze der Möglichkeit und Unmöglichkeit einer Auflösung gehört, mit der Angabe, ob es größer oder kleiner sey, als jedes andere, das eine Auf=

lösung möglich macht, verursachten, daß die Abhandlung weitläufig wurde. Sie hat 51 Lemmata, und 83 Lehrsätze enthalten.

Simson macht das eine Glied des Verhältnisses der Rechtecke und Quadrate um eine gegebene Größe größer oder kleiner, und setzt das Verhältniß dieses veränderten Gliedes zu dem andern Gliede einem gegebenen gleich. Z. B. bey drey gegebenen Puncten in nr. II.

$$AP \times D - D \times E : PB \times PC = m : n,$$

oder auch

$$AP \times PB - D \times E : PC^2 = m : n,$$

wo D und E gegebene Längen, und m : n ein bestimmtes Verhältniß ist.

Unter den Lemmaten, die Pappus vorgetragen hat, sind manche merkwürdige Verhältnisse, die durch Abtheilungen auf einer Linie entstehen. Der folgende Satz (XL. bey Pappus) diene zum Beyspiel.

A C D E B

Es sind auf einer geraden Linie fünf Puncte, A, B, C, D, E, so genommen, daß

$$AC \times CB : AE \times EB = CD^2 : DE^2,$$

so ist

$$AC \times AE : BE \times BC = AD^2 : BD^2.$$

Der Beweis, den Pappus giebt, läßt sich hier nicht mittheilen, weil dazu andere Sätze nöthig sind. Beide Proportionen sind Folge einer dritten, nämlich dieser:

$$AD \times DB : CD \times DE = AD - BD : CD - DE.$$

Denn man setze $AD = a$, $BD = b$; $CD = c$; $DE = d$, so ist die letztere Proportion

$$ab : cd = a - b : c - d,$$

also $ab\,(c - d) = cd\,(a - b)$.

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $c + d$, und subtrahirt darauf beiderseits $cc\,dd$, so erhält man

$$(a + d)\,(b - d)\,cc = (a - c)\,(b + c)\,dd,$$

woraus die erste Proportion folgt. Die zweyte erhält man auf ähnliche Art, nachdem man die anfängliche Gleichung mit $a + b$ multiplicirt hat.

Ein verwandter Satz ist folgender (XXXIX. bey Pappus). Wenn

$$AB \times AE : DB \times DE = AC^2 : CD^2,$$

so ist

$$AB \times DB : AE \times DE = CB^2 : CE^2.$$

Bey dem Gebrauche der vorigen Bezeichnungen giebt die erste Proportion die Gleichung,

$$(a + b + d)\, cc + 2bcd = abd.$$

Hieraus

sowohl $(b + c)^2 d = (a + b)\,(bd - cc)$

als $(c + d)^2 b = (a + d)\,(bd - cc)$,

woraus sich die zweyte Proportion ergiebt.

Beugungspunct, s. Wendungspunct.

Bewegung ist im mathematischen Verstande die Vorstellung von der stetigen Veränderung der Lage eines Punctes, einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers. Es ist ein dem Verstande ursprünglich angehöriger Begriff, wodurch wir die sinnlichen Erscheinungen bey Veränderung der Lage der Körper gegen einander in Verbindung zu bringen vermögend sind. Die Bewegung, welche in der reinen Mathematik nur gedacht wird, legen wir den Körpern als etwas an ihnen vorhandenes bey. Dem Verstande gehört die Form der Bewegung. Die Form ist nur in ihm vorhanden, da der zurückgelegte Weg eines Körpers nichts wirkliches, und seine Lage nur etwas augenblickliches ist.

Linien werden durch stetige Bewegung eines Punctes erzeugt. Weil allenthalben in ihr Puncte gedenkbar sind, so kann man einen Punct stetig durch sie hinführen. So fährt man beym Abzeichnen einer Figur auf einem durchscheinenden Papier mit einem Stifte über ihren Gränzen hin.

Flächen werden durch die Bewegung einer Linie erzeugt. Eine gerade Linie bleibe in derselben Ebene, sich gleich und parallel, so entsteht ein Parallelogramm. Verändert sie sich, so kann jede ebene Figur dadurch entstehen. Man mag sie auch um einen festen Punct in derselben Ebene, sich drehen lassen. Bleibt sie sich gleich, so beschreibt sie eine Kreisfläche, ihr Endpunct die Kreislinie. Verändert sie sich, so kann jede krummlinichte Figur dadurch beschrieben werden. Das Gesetz der Veränderung bestimmt die Natur der krummen Linie. So werden in der Astronomie Ellipsen durch einen veränderlichen radius vector beschrieben, der sich um den einen Brennpunct dreht. Bleibt die beschreibende gerade Linie nicht in derselben Ebene, geht aber doch sich parallel durch eine in sich zurücklaufende krumme Linie, als einen Kreis, eine Ellipse, so beschreibt sie die Oberfläche eines Cylinders oder cylinderförmigen Körpers. Geht sie durch einen firen Punct, indem sie sich längs jener krummen Linie bewegt, so beschreibt sie die Oberfläche eines Kegels oder kegelförmigen Körpers.

Körper werden durch Bewegung einer ebenen Fläche erzeugt. So ein Parallelepipedum durch die sich parallele Bewegung eines Parallelogramms. Verändert die ebene Figur ihre Größe, bleibt sich aber ähnlich, so entsteht, bey Beobachtung eines gewissen Gesetzes, ein Kegel oder kegelförmiger Körper. Jeder Körper kann durch eine nach einem gewissen Gesetze sich verändernde Figur, bey paralleler Bewegung hervorgebracht werden. Die erzeugende Ebene mag sich auch um eine in ihr gezogene gerade Linie drehen. So kann sie cylinderförmige und kegelförmige Körper beschreiben. Bey jenen ist die Ebene ein Parallelogramm, dessen Grundlinie aber veränderlich seyn mag; bey diesen ist die Ebene ein geradlinichtes Dreyeck, dessen Grundlinie dieselbe oder veränderlich ist. Durch Umdrehung einer krummlinichten Figur, um eine Are, die sie in gleiche und ähnliche Hälften theilt, entstehen Körper, die zum Theil zu dem Kegelgeschlechte gerechnet werden.

Die alten Geometer haben die Vorstellung einer Bewegung in die Geometrie aufgenommen. Euklides läßt die Kugel, den senkrechten Kegel und Cylinder durch Umdrehung einer ebenen Figur entstehen. Apollonius, der in seiner Erklärung des Kegels den schiefen mit begreift, läßt die Kegelfläche durch eine gerade Linie beschrieben werden, welche durch einen fixen Punct gelegt ist, und längs dem Umfange eines Kreises, in welchem aber jener Punct nicht liegt, herumgeführt wird. Archimedes führte eine gedoppelte Bewegung in die Geometrie ein, nämlich bey seiner Spirale. Diese wird beschrieben, indem eine unbestimmte gerade Linie sich um einen fixen Punct gleichförmig in derselben Ebene bewegt, und ein Punct auf derselben gleichförmig fortrückt. Er bringt hier auch den Begriff von Geschwindigkeit in eine geometrische Untersuchung. Er zeigt, daß bey der gleichförmigen oder gleich geschwinden Bewegung eines Punctes die Wege sich wie die Zeiten verhalten, auch, daß bey zwey Puncten, deren jeder eine gleichförmige Bewegung hat, die in gleichen Zeiten beschriebenen Wege ein gegebenes Verhältniß haben.

Die Neuern haben auch ungleichförmige Bewegungen in die Geometrie eingeführt. Neper legt in der Theorie der Logarithmen zwey Bewegungen zum Grunde, eine gleichförmige und eine ungleichförmige, wobey die Geschwindigkeiten in geometrischer Progression abnehmen. Descartes gebrauchte ungleichförmige Geschwindigkeiten bey der Construction der Beaunischen Curve. Newtons Fluxionen sind Verhältnisse der Geschwindigkeiten der Puncte, Linien und Ebenen, die durch ihre Bewegung Linien, Flächen und Körper erzeugen. Indem die Ordinate einer krummen Linie parallel mit sich selbst auf der Abscissenlinie fortrückt, rücke ein Punct auf ihr in ihrer Richtung fort, entweder nach der Abscisse hin oder sich entfernend. Das Gesetz der Geschwindigkeit dieses Punctes in Beziehung auf die Geschwindigkeit der Ordinatenlinie bestimmt die Curve.

Vergl. Kästners Geschichte der Mathem. Bd. IV. S.

Beweis ist eine Verbindung von Sätzen, welche entweder den Grund enthält, warum einem Subjecte ein Prädicat beygelegt wird, oder welche zeigt, wie aus einem Satze ein anderer Satz hergeleitet wird. In mathematischen Untersuchungen ist das Subject entweder eine Größe mit einer gewissen Form, z. B. die geometrischen, Kreis, Ellipse, Kegel, unter den arithmetischen, eine dekadisch ausgedruckte Zahl, eine Potenz einer eintheiligen Größe mit irgend einem Exponenten; oder das Subject ist eine Verbindung mehrerer Größen, z. B. Aggregat, Product, Bruch, Proportion, Gleichung, Progression. Ein Subject kann oft auch als ein Satz betrachtet werden, z. B. eine Proportion, eine Gleichung enthalten wirklich jede einen gewissen Satz. Das Prädicat ist die Bestimmung einer Gleichheit, bisweilen auch einer Ungleichheit, in geometrischen Sätzen außer dieser Bestimmung in einigen Fallen eine gewisse Lage der Linien und Flächen.

Sehr häufig oder am häufigsten wird ein Satz, manchmahl mehrere, als Bedingung oder Voraussetzung (hypothesis) aufgestellt, und daraus mit Zuziehung schon erwiesener Sätze ein neuer Satz hergeleitet.

Daß sowohl die Sätze, welche in einem Beweise angewandt werden, richtig seyn, als auch, daß in der Art ihrer Verbindung keine Mängel sich finden müssen, oder daß, wie die Logiker sich ausdrücken, Materie und Form der Schlüsse richtig seyn, wird in der Mathematik um so strenger gefordert, da es bey mathematischen Beweisen leicht ist, darauf zu achten, und hier keine der Schwierigkeiten sich findet, die bey philosophischen und physikalischen Untersuchungen häufig eintreten.

Von den Schlußarten, die in der Logik entwickelt werden, gebraucht man in der Mathematik nur die nach der ersten Figur, in welcher man von dem Allgemeinen auf das Untergeordnete schließt. In der reinen Mathematik werden nur allgemein bejahende Sätze aufgenommen. Jene Schlußart kommt nur in der Analysis und analytischen Geometrie vor. Was z. B. von Gleichungen allgemein

erwiesen ist, gilt auch von einer Gleichung irgend eines Grades, und einer individuellen; die Entwickelung einer Größe in die Form einer Reihe wird auf jeden besondern Fall angewandt, so auch die Differentiation und Integration einer Function, die im Allgemeinen gelehrt ist. Die Eigenschaften, welche Linien der zweyten Ordnung zukommen, werden jeder der drey Gattungen dieser Ordnung beygelegt. — In der Geometrie, nach Art der Alten behandelt, wird nie vom Allgemeinen auf das Untergeordnete geschlossen, sondern die Eigenschaften des Untergeordneten werden besonders erwiesen. Z. B. an dem Kreise wird gezeigt, daß das Quadrat der halben Chorde, die senkrecht auf einem Durchmesser steht, dem Rechtecke von den Abschnitten des Durchmessers gleich ist, obgleich dieser Satz schon in einem andern von den Segmenten zweyer, auf irgend eine Art sich schneidenden Linien enthalten ist.

Die Schlußarten, welche in der Mathematik am häufigsten gebraucht werden, sind folgende.

I. Wenn A, B, C, D, E, etc, irgend welche Größen, auch zusammengesetzte, bedeuten, und es von diesen erwiesen ist, daß $A = B$, und $B = C$ ist, so folgt, daß $A = C$ ist. Ist $C = D$, so folgt, daß $A = D$ ist; wenn ferner $D = E$ ist, so ist $A = E$, u. s. f. so lang auch die Reihe seyn mag.

II. Ist erwiesen oder bedungen, daß $A = B$ und $C = D$ ist, so ist $A + C = B + D$, und auch $A - C = B - D$; ferner $A + C = B + C$ und $A - C = B - C$.

III. Ist erwiesen oder bedungen, daß $A = B$ ist, so ist $mA = mB$, und $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$. Auch sind die gleichnamigen Potenzen und Wurzeln von A und B gleich. Die Differentiale dergleichen Functionen A, B, sind gleich. Die Integrale der gleichen Differentialfunctionen A, B, mit zwey veränderlichen Größen sind gleich, oder nur um eine beständige Größe verschieden.

IV. Sind A und B ungleich, so sind auch $A + C$ und $B + C$ ungleich; so wie $A - C$ und $B - C$. Ist A

größer als B, und B größer als C, so ist A größer als C. Ist A kleiner als B, und B kleiner als C, so ist A kleiner als C.

V. Es bedeuten $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$ etc. Gleichungen zwischen gegebenen und unbekannten Größen, oder Gleichungen zwischen unveränderlichen und veränderlichen Größen; diese mögen theils angenommene theils vorher erwiesene seyn. Aus der Verbindung von $A=0$ und $B=0$ durch solche Verwandlungen, wie II. und III. enthalten, entstehe eine Gleichung $P=0$; durch die Verbindung der Gleichung $D=0$ (oder $B=0$; oder der neuen $P=0$) und $C=0$, entstehe eine Gleichung $Q=0$. Aus der Verbindung einer dieser Gleichungen mit der Gleichung $D=0$ entstehe wieder eine, $R=0$. So fährt man fort, bis daß man auf eine Gleichung kommt, welche die Relation zwischen den Größen darstellt, die mit einander verknüpft werden sollen, die übrigen ausgesondert. Dieser Gang der Beweise ist der gewöhnlichste in der Analysis. Da Proportionen in der That Gleichungen, nämlich zwischen zwey Verhältnissen, sind, so ist derselbe Gang auch in geometrischen Beweisen, nach Art der Alten, häufig anzutreffen, hier aber öfterer mit den andern Schlußarten, besonders I. verbunden, als es in der Analysis geschieht.

Alle Mittelsätze, die bey einem Beweise angewandt werden, müssen vorher erwiesen seyn, wenn sie nicht eine bedungene Relation der Größen enthalten. In dem Beweise selbst muß bloß ihre Combination vorgenommen werden. Es ist ein Fehler gegen die gute Methode, Beweise in Beweise einzuschalten. Wo man dergleichen Parenthesen antrifft, und sie zu überschlagen nicht im Stande ist, muß man sie heraus heben, und als einen besondern Satz voran gehen lassen. Es ist auch sehr gut, bey der Schlußart V. alle Gleichungen, die gebraucht werden, vorher aufzustellen, wodurch die Übersicht des Beweises erleichtert wird, oder dieses als Leser für sich zu thun, wenn der Verfasser des Beweises es nicht für nöthig gehalten hat. Man sieht gleich Anfangs, worauf es bey dem Beweise ankommt.

Eine von den alten Geometern oft gebrauchte Beweisart, die Gleichheit zweyer Größen A und B zu zeigen, ist, daß bewiesen wird, A könne nicht größer, und auch nicht kleiner als B seyn.

In der Analysis des Unendlichen nach Art der Alten behandelt, kommt folgende Schlußart vor. Wenn A eine Größe ist, die zwischen zwey andern P, Q so enthalten ist, daß A immer größer als P und kleiner als Q ist, so nahe auch P und Q durch Veränderung in der Anzahl und Quantität ihrer Theile einander kommen, und wenn die gemeinschaftliche Gränze, welcher P und Q sich ohne einen bestimmbaren Unterschied nähern, G heißt, so ist A = G.

Von dieser und der vorhergehenden Schlußart s. Exhaustions-Methode.

In einigen Fällen ist folgende Schlußart brauchbar. Wenn zwey Größen zwischen zwey veränderlichen Größen, deren Unterschied kleiner als jede angebbare Größe gemacht werden kann, enthalten sind, so sind sie einander gleich. s. Proportion.

Beweise durch Induction, das ist, eine allgemeine Behauptung aus Bemerkungen des Zutreffenden in besondern Fällen, finden in der Geometrie gar nicht Statt; in der Arithmetik und Analysis müssen sie bisweilen die Stelle der strengen und allgemeinen Beweise vertreten. Die Formen der Zahlen haben zuweilen Eigenschaften, die sich nicht leicht erweisen lassen, ob sie gleich in allen einzelnen Fällen die Probe halten. Z. B. der Satz, daß jede ganze Zahl sich in vier oder wenigere Quadrate zerlegen läßt. Die Summen der Potenzen von Zahlen, die in arithmetischer Progression sind, bis zu der sechsten Potenz, fand Wallis durch eine mühsame Induction (Arithm. Infin. Prop. 19. 39. seq.). Das Gesetz der Binomial-Coefficienten ist zuerst durch Induction, anfangs nur, von Briggs, für ganze Exponenten, hernach von Newton für gebrochne, durch wirkliche Ausziehung einer Wurzel, gefunden. Die Induction wird vornemlich bey den Coefficienten einer Reihe, oder auch bey den gleich-

stelligen Coefficienten mehrerer Reihen, angewandt, ihr Gesetz zu finden. Inzwischen muß man, wenn es nur möglich ist, immer allgemeine Beweise suchen.

Ein bequemer Weg dazu ist oft folgender. Man zeige, daß das aus der Induction gefundene Gesetz für jeden folgenden Coefficienten gilt, wenn es für die vorhergehenden gültig ist, oder daß es für den (m + 1)ten Coefficienten gilt, wenn es für den mten angenommen wird. Kästner hat diese Beweisart oft gebraucht. Jakob Bernoulli mag sie zuerst angewandt haben. Acta Erud. 1686, pag. 360. Opp. T. I. nr. 24. Ars conjectandi, p. 93.

Ein analogischer Beweis ist, wenn eine Formel, die bey einer gewissen Beschaffenheit der Größen richtig erwiesen ist, auch auf andere Fälle, wo diese Beschaffenheit nicht ist, ausgedehnt wird. Z. B. wenn der binomische Lehrsatz, nachdem er für ganze, positive Exponenten erwiesen ist, auch bey gebrochnen, und bey negativen Exponenten angewandt wird. Es war ein analogischer Beweis, wodurch Newton aus der Quadratur solcher krummen Linien, deren Gleichung ist $y = (1 = x^2)^m$, wenn m eine ganze positive Zahl ist, die Quadratur eines circularen und hyperbolischen Segments, aus der Gleichung $y = (1 \pm x^2)\ \frac{1}{2}$, mittelst einer Interpolation herleitete. (Newtoni Opusc. T I. nr. XI. s. Binom. Lehrsatz.)

Die Beweise vermittelst des Gebrauchs entgegengesetzter Größen kommen bey den Alten nicht vor. Jeder Fall wurde unabhängig von dem andern erwiesen. Wir leiten aus den Resultaten der Rechnung für einen ausgewählten Fall, in welchem alle Größen absolut (positiv, in Beziehung auf die negativen) genommen werden, die Resultate für diejenigen Fälle, in welchen eine oder mehrere negativ, in Beziehung auf die ihnen gleichnamigen in dem Normalfalle, gesetzt werden, bloß durch gehörige Verwandlung der Vorzeichen her. Dieses ist ein wichtiges Abkürzungsmittel des Vortrages.

Die Beweise der Elementarsätze in der Arithmetik mag man an bestimmten Zahlen führen, nur so, daß

daraus die Allgemeinheit des Satzes oder des Verfahrens daraus erhelle, indem die individuellen Zahlen nur die Stelle allgemeiner Zeichen vertreten.

Man theilt die Beweise ein in synthetische und analytische. Jene gehen von den Eigenschaften des Subjectes oder den bedungenen Sätzen aus, und verbinden damit die schicklichen, sonst erwiesenen Sätze, um zu dem Prädicate oder der Folgerung in dem aufgestellten Satze zu gelangen. Die analytischen Beweise gehen von der Folgerung aus, und zeigen, daß man dadurch auf einen zugestandenen Satz kommt. Die letztern kommen selten vor. Wenn aber ein Schriftsteller einen Satz behauptet, ohne ihn zu beweisen, so ist ein analytischer Beweis ein guter Weg sich von der Richtigkeit zu versichern, in dem Falle, daß man den directen Weg dazu nicht finden kann. S. Analysis als Methode.

Die Beweise sind noch entweder directe, oder indirecte, die man auch apagogische nennt. Die directen zeigen, wie ein Satz aus den Prämissen folgt; die indirecten zeigen, daß das Gegentheil unmöglich ist, der Satz also wahr, weil ein drittes nicht Statt findet. Die letztern werden am meisten gebraucht darzuthun, daß ein Satz auch umgekehrt richtig ist. Im ersten und dritten Buche des Euklides kommen viele Beyspiele vor.

Bezeichnung (notatio) ist die Darstellung der Größen, ihrer Formen und Verbindungen durch gewisse willkührliche Zeichen (Symbole, Charaktere) und deren Zusammensetzungen. Dadurch wird die Theorie der Sache auf die Theorie der Zeichen reducirt. Die alten Geometer bedienten sich keiner andern Zeichen als der Buchstaben, wodurch die Linien angedeutet wurden. Diophantus nahm erst einige Zeichen für die unbekannte Größe und die Potenzen an. Die Bezeichnungen in der Algebra und Analysis sind allmählich eingeführt, so wie die Rechnungen mehr zusammengesetzt wurden. Die zunehmenden

Verwickelungen in den Verbindungen der Größen, je allgemeiner und vielbefassender die analytischen Untersuchungen werden, machen noch weitere Bezeichnungen nöthig. So sind in der combinatorischen Analysis durch Hindenburg manche neue Bezeichnungen durch gewisse Combinationen der Buchstabenzeichen eingeführt. Arbogast hat in seinem Calcul des dérivations (Strasbourg 1800) viele neue Zeichen zufolge seiner neuen Methode angenommen. Auch Burmann ist bemüht für combinatorische Rechnungen eine neue Bezeichnungsart anzugeben, die Kürze und Deutlichkeit mit einander vereinige.

Die Buchstabenzeichen reichen oft bey verwickelten Rechnungen nicht zu, darum hat man schon lange durch Strichelchen an der Spitze, oder durch Marken über ihnen, den Mangel zu ersetzen gesucht. Bey den Buchstaben ist der Vortheil, daß man die Zeichen sich zugleich hörbar macht, welches bey andern willkührlichen Zeichen nicht Statt hat.

Die mathematischen Zeichen stellen entweder die Grössen, oder ihre Formen, oder ihre Verbindungen dar.

Die Größen selbst werden durch Buchstaben angedeutet, die bekannten oder gegebenen und die unveränderlichen Größen durch die ersten Buchstaben eines Alphabets, die unbekannten und die veränderlichen durch die letztern Buchstaben; Zahlfactoren häufig durch die mittlern Buchstaben m, n, p, etc. Gewisse zusammengesetzte Größen von bestimmter Form, wie die Binomial-Coefficienten, die Bernoullischen Zahlen, werden oft durch ihnen vorzüglich gewidmete Buchstaben bezeichnet, so wie überhaupt zusammengesetzte Größen, wie die Coefficienten in einer Reihe, durch einzelne Buchstaben ausgedruckt werden.

Zu den Zeichen der Formen gehören das Zeichen einer Potenz, wie a^m; das Wurzelzeichen, $\sqrt[n]{a}$; die abgekürzten Wörter sin A; cos A; tang A, etc. auch log A oder l A. Ferner die Bezeichnungen der ersten, zweyten u. s. f.

Unterschiede einer Reihe von Größen, Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc.; eines Differentialverhältnisses, wie $dx : dy$; eines Integrals $\int X dx$, wo X eine Function von x ist. Das allgemeinste Zeichen einer Form ist die Bezeichnung einer Function einer veränderlichen Größe x durch φx oder ψx, oder Fx; zweyer solcher Größen x, y durch $\varphi(x, y)$ oder $F(x, y)$ u. s. f.

Zu den Zeichen der Verbindungen gehören die Zeichen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division, (S. Buchstabenrechnung) der Verhältnisse und Proportionen. Von den Zeichen der Verbindungen in der combinatorischen Analysis s. diese.

Eine Übersicht der gewöhnlichen Zeichen in dem Artikel: Zeichen.

Beziehung (relatio) ist erstlich die Verknüpfung einer Größe mit einer andern nach ihren geometrischen Verhältnisse, und so fern mit Verhältniß (ratio) einerley. Zweytens zeigt es eine Nebenbestimmung in Absicht auf Lage, oder Vergrößerung und Verminderung an, das ist, was man Positiv und Negativ nennt. Nämlich um mehrere verwandte Fälle einer Verbindung von Größen in einer einzigen Rechnung zu begreifen, ändert man nur die Vorzeichen der Größen, welche in Absicht der ihnen gleichnamigen eine entgegengesetzte Beschaffenheit, oder Beziehung erhalten. Da man auch in einem Aggregat von Größen diejenigen, welche verschiedene Vorzeichen haben, entgegengesetzte nennt, so kommt hier auch eine Beziehung der Größen, nach dieser Beschaffenheit, vor.

Relation heißt, drittens, überhaupt die Art, wie eine Größe aus andern zusammengesetzt wird. Die Relation der Ordinaten an einer krummen Linie zu den Abscissen wird durch die Gleichung für die krumme Linie bestimmt.

Beziehungs-Scale (Scala relationis) ist die Reihe der mit ihren Vorzeichen verbundenen Factoren, womit die Glieder einer rücklaufenden Reihe von irgend einem an, rückwärts genommen, folgweise multiplicirt

werden, um das nächstfolgende Glied zu erhalten, s. rückläufende Reihe.

Billion ist eine Million von Millionen, s. Zahl.

Bimediale, s. Mediale.

Binarische Arithmetik, s. Dyadik.

Binion, eine Verbindung von zwey Größen oder Dingen aus mehrern gleichartigen, s. Combination.

Binomial-Coefficienten (unciae binomiales) sind die Zahlen, welche anzeigen, wie oft in der entwickelten Potenz eines Binomium, $a + b$, jede Gattung von Product aus den Theilen desselben vorkommt. Die Form derselben ist in dem Artikel, binomischer Lehrsatz, entwickelt. Wenn sie von dem des zweyten Gliedes an gezählt werden, so ist der rte Coefficient in der nten Potenz des Binomium $a + b$ gleich der Anzahl der Combinationen von r Dingen aus n, ohne Wiederholungen.

1. Zur abgekürzten Bezeichnung sowohl der Stelle als der Potenz dienen, nach der von Hindenburg gewählten bequemen Art, die Buchstaben des deutschen großen Alphabets, mit dem Exponenten der Potenz oben an der linken Seite. Weil der Coefficient des ersten Gliedes der Potenz allemahl $= 1$ ist, so bekommt dieser keinen besondern Buchstaben. Es ist, wenn der Exponent der Potenz $= n$ ist,

$$^{n}\mathfrak{A} = n\,;\ ^{n}\mathfrak{B} = \frac{n.n-1.}{1.2}\,;\ ^{n}\mathfrak{C} = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,;$$

$$^{n}\mathfrak{D} = \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}.\ \text{u. s. f.}$$

Die Puncte zwischen den Factoren vertreten die Stelle der Klammern oder Parenthesenzeichen. Die hier aufgestellten Ausdrücke werden in dem gegenwärtigen Artikel als bloße Formen von Größen, ohne Rücksicht auf eine besondere Beziehung, betrachtet, daher n jede Art von Zahl, ganze

oder gebrochne, bejahte oder verneinte, seyn mag. Der binomische Lehrsatz, allgemein genommen, beruht auf den Eigenschaften dieser Zahlen.

2. Die Coefficienten in einer unbestimmten Stelle, als der mten, bezeichnet Hindenburg durch einen Buchstaben aus der Schwabacher Schrift, als ${}^n\mathfrak{M}$, so daß

$${}^n\mathfrak{M} = \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots n-m+1 \,.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m} \text{ ist.}$$

Dieses geschieht anzuzeigen, daß ${}^n\mathfrak{M}$ nicht den zwölften Coefficienten, sondern einen unbestimmten bezeichnet. Inzwischen, wenn der Coefficient durch Puncte von denen, die eine bestimmte Stelle haben, abgesondert ist, mag man auch die gewöhnliche Schrift gebrauchen, welches hier geschehen wird, so daß die mittlern Buchstaben des Alphabets allemahl unbestimmte Coefficienten bedeuten.

3. Um die Stelle eines Coefficienten nach einem andern anzugeben, wird die Zahl der Stelle gerade über den Buchstaben gesetzt. So ist ${}^n\overset{4}{\mathfrak{M}}$ der vierte Coefficient nach dem mten oder nach ${}^n\mathfrak{M}$, und ${}^n\overset{r}{\mathfrak{M}}$ der rte nach demselben, also

$${}^n\overset{r}{\mathfrak{M}} = \frac{n \,.\, n-1 \ldots n-m-r+1 \,.}{1 \,.\, 2 \ldots m+r} .$$

Geht der andere Coefficient vor ${}^n\mathfrak{M}$ vorher, so wird dieses durch Beyfügung des Vorzeichens — angedeutet. So ist ${}^n\overset{-4}{\mathfrak{M}}$ der vierte vorhergehende, und ${}^n\overset{-r}{\mathfrak{M}}$ der rte vorhergehende Coefficient. Die Zahl $\pm r$ heißt der Distanz-Exponent.

4. In der beygefügten Tafel sind die Binomial-Coefficienten bis zu dem zwölften für ganze positive Exponenten verzeichnet. Die Exponenten sind mit den römischen Zahlziffern bezeichnet: die Stellen der Coefficienten sind die Zahlen in der obersten Querreihe.

Tafel der Binomial-Coefficienten bis zur XII. Potenz.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
I.	1	1											
II.	1	2	1										
III.	1	3	3	1									
IV.	1	4	6	4	1								
V.	1	5	10	10	5	1							
VI.	1	6	15	20	15	6	1						
VII.	1	7	21	35	35	21	7	1					
VIII.	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
IX.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
X.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
XI.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
XII.	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Jede Querreihe oder horizontale Reihe entsteht aus der nächst obern, wenn zu jeder Zahl in dieser die nächstvorhergehende addirt wird. Dieses rührt daher, daß jede nächsthöhere Potenz aus der vorhergehenden durch die Multiplication mit a + b entsteht.

5. Dieses folgt auch aus der Form der Coefficienten. Es ist ${}^{n}\mathfrak{M} = \frac{n.n-1\ldots n-m+1.}{1.2\ldots\ldots m.}$, und ${}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}} = \frac{n.n-1\ldots\ldots n-m.}{1.2\ldots\ldots m+1.}$. Die Summe dieser beiden nächsten Coefficienten in der nten Potenz ist $= \frac{n+1.n.n-1\ldots n-m+1.}{1.2.3\ldots\ldots m+1.}$. Dieses ist der (m + 1)te Coefficient der (n + 1)ten Potenz, oder ${}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$. Es ist daher ${}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}} = {}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$, auch, wenn n irgend eine Zahl, eine ganze oder gebrochne, positive oder negative Zahl ist.

6. Die Summe der Coefficienten in der mten Stelle bis zu dem aus der nten Potenz ist der (m + 1)te Coef-

ficient aus der $(n+1)$ten Potenz. Z. B. wenn $m=4$, und $n=9$, so ist $1+5+15+35+70+126 = 252$, dem fünften Coefficienten der 10ten Potenz.

Es ist nämlich allgemein:

$$= {}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}} = {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$$

$$= {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$$

$$= {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\mathfrak{M} + {}^{n-2}\mathfrak{M} + {}^{n-2}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$$

$$= {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\mathfrak{M} + {}^{n-2}\mathfrak{M} + {}^{n-3}\mathfrak{M} + {}^{n-3}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$$

u. s. f.

Ist n eine ganze Zahl, so bricht die Reihe mit dem $(n-m+1)$ten Gliede ab. Denn die Reihe der Coefficienten in der $m$ten Stelle fängt an, wenn $n=m$ ist, und enthält also bis zur $n$ten Potenz $n-m+1$ Glieder.

7. Ist n aber eine positive gebrochne Zahl oder eine negative, so bricht die Reihe nicht ab mit einem Coefficienten aus der $m$ten Stelle, sondern es muß eine Ergänzung, ${}^{n-p}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$, hinzugefügt werden, wo $p+1$ die Stellenzahl des Gliedes ist, mit welchem die Reihe abgebrochen wird. Z. B. es sey $n=\frac{1}{2}$, und $m=3$, also $\mathfrak{M}=\mathfrak{C}$, und $\overset{+1}{\mathfrak{M}}=\mathfrak{D}$. Nun ist

$$^{\frac{3}{2}}\mathfrak{D} = + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{3.5.7}{2.4.6} - \frac{5.7.9}{2.4.6} - \frac{7.9.11}{2.4.6} + \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}.$$

Oder

$$^{\frac{3}{2}}\mathfrak{D} = + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{3.5.7}{2.4.6} - \frac{5.7.9}{2.4.6} - \frac{7.9.11}{2.4.6} - \frac{9.11.13}{2.4.6} + \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}.$$

Auf diese Art kann man der Reihe so viele Glieder geben als man will.

Es sey $n = \frac{1}{3}$; $m = 3$, so ist

$$^{\frac{4}{3}}\mathfrak{D} = \frac{1.2.5}{3.6.9} - \frac{2.5.8}{3.6.9} - \frac{5.8.11}{3.6.9} - \frac{8.11.14}{3.6.9} + \frac{8.11.14.17}{3.6.9.12},$$

und auf ähnliche Art mit mehrern Gliedern.

8. Es ist $m.{}^{n}\mathfrak{M} = (n - m + 1).{}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}$; für jeden Werth von n.

Denn es ist $^{n}\mathfrak{M} = \frac{n.n-1 \ldots . n-m+2.n-m+1.}{1.2 \ldots m-1.\ m}$,

und $^{n}\overset{-1}{\mathfrak{M}} = \frac{n.n-1 \ldots n-m+2.}{1.2 \ldots m-1}$.

9. Für jeden Werth von n ist aus (1.)
$(n+1).\ 1 = 1.{}^{n+1}\mathfrak{A}$; $(n+1).{}^{n}\mathfrak{C} = 4.{}^{n+1}\mathfrak{D}$;
$(n+1).{}^{n}\mathfrak{A} = 2.{}^{n+1}\mathfrak{B}$; $(n+1).{}^{n}\mathfrak{D} = 5.{}^{n+1}\mathfrak{E}$;
$(n+1).{}^{n}\mathfrak{B} = 3.{}^{n+1}\mathfrak{C}$; etc.

10. Da $1 + {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{C} +$ etc. $= (1+1)^{n} = 2^{n}$; so ist $(n+1)2^{n} = 1.{}^{n+1}\mathfrak{A} + 2.{}^{n+1}\mathfrak{B} + 3.{}^{n+1}\mathfrak{C} + 4.{}^{n+1}\mathfrak{D}$; etc.

11. Es ist $^{n}\mathfrak{N} = 1$, und $^{n}\overset{+1}{\mathfrak{N}} = 0$, wenn n eine ganze Zahl ist, zufolge (2.), wenn $m = n$ gesetzt wird, für die erste Formel, und, $m = n + 1$ gesetzt, für die zweyte.

Daher ist $^{n-1}\mathfrak{N} = 0$.

Werth des mittelsten Coefficienten in $(a+b)^{2n}$.

12. Es ist das Product $2n.2n-1 \ldots n+2.n+1. = .2n-1.2n-3 \ldots 3.1. \times 2^{n}$, wenn n eine ganze Zahl ist.

Denn man nehme die Gleichung als richtig an, so ist, wenn beide Theile mit $2(2n+1)$ multiplicirt werden,

$.2n+2.2n+1.2n\ldots.n+2. =$

$.2n+1.2n-1.2n-3\ldots.3.1.\times 2^{n+1}.$

Dieses ist eine vollkommen ähnliche Gleichung mit der angenommenen, und entsteht aus derselben, wenn $n+1$ statt n gesetzt wird. Ist nun jene Gleichung für einen Werth von n, als ganze Zahl richtig, so ist sie es auch für die nächstfolgende ganze Zahl. Sie ist aber richtig für $n = 1$, oder $n = 2$: oder $n = 3$; also auch für $n = 4$; daher für $n = 5$, u. s. f. für alle ganze Zahlen.

13. Folglich ist der nte Coefficient in der 2nten Potenz, das ist,

$$^{2n}\mathfrak{N} = \frac{1.3.5\ldots.2n-1.}{2.4.6\ldots.2n} \times 2^{2n}.$$

Denn es ist $^{2n}\mathfrak{N} = \frac{2n.2n-1\ldots.n+1.}{1.2\ldots n}$, woraus für ein ganzes n, vermittelst (12.) sogleich jener Werth erhalten wird.

Für ein ganzes n ist dieser Coefficient der größte in der Potenz, $(a+b)^{2n}$, und der mittelste, wenn der Coefficient von a^{2n} mitgezählt wird.

14. Da $2^{2n} = (1+1)^{2n}$, so ist 2^{2n} gleich der Summe aller Coefficienten in der Potenz $(a+b)^{2n}$, den Coefficienten von a^{2n} mitgezählt. Es verhält sich also der nte Coefficient in der 2nten Potenz zu der Summe aller, wie das Product der ungeraden Zahlen, $1.3.5\ldots 2n-1$ zu dem Producte der geraden, $2.4.6\ldots 2n$.

15. Es sey π der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, so ist $\frac{\pi}{2} =$

$$\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.\text{etc.}}.$$ (Cyklometrie, 29.).

Bricht man im Zähler mit einem ganzen Paare Factoren ab, so ist $\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{\cdot}} > \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}.$

Bricht man aber im Nenner mit einem ganzen Paar Factoren ab, so ist $\sqrt{\frac{2n\pi}{2}} < \frac{2.4.6\ldots.2n}{1.3.5\ldots2n-1}$.

16. Daher ist ${}^{2n}\mathfrak{N} > 2^{2n}.\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}$,

und ${}^{2n}\mathfrak{N} < 2^{2n}.\sqrt{\frac{2}{2n\pi}}$.

In einer ungeraden Potenz sind die Coefficienten der beiden mittelsten Glieder einander gleich, und jeder halb so groß als der Coefficient des mittelsten in der nächstfolgenden geraden Potenz.

Diese Formeln dienen zur Berechnung des mittelsten Coefficienten, wenn der Exponens sehr groß ist, welches in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung vorkommt.

17. Die Formeln (16.) hat Stirling durch Interpolation gewisser Reihen gefunden, zugleich mit zweyerley Ergänzungsreihen, in der Schrift, Methodus differentialis, p. 119. Londini 1730. Moivre hat Stirlings Formeln vorläufig bekannt gemacht, in den Miscellaneis analyticis, p. 170. Eine andere Annäherungsformel hat Moivre in diesen Miscellaneen p. 102. mitgetheilt, und in einer allgemeinern Gestalt in der Doctrine of Chances, 2d edit. p. 236.

Summirung der Producte je zweyer Binomial-Coefficienten aus verschiedenen Potenzen oder aus derselben Potenz.

18. Die Reihe der Binomial-Coefficienten für die Exponenten α und β sey, nach der eingeführten Bezeichnung,

$1, {}^{\alpha}\mathfrak{A}, {}^{\alpha}\mathfrak{B}, {}^{\alpha}\mathfrak{C} \ldots {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}, {}^{\alpha}\mathfrak{M}, {}^{\alpha}\overset{+1}{\mathfrak{M}} \ldots$

$1, {}^{\beta}\mathfrak{A}, {}^{\beta}\mathfrak{B}, {}^{\beta}\mathfrak{C} \ldots {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}, {}^{\beta}\mathfrak{M}, {}^{\beta}\overset{+1}{\mathfrak{M}} \ldots$

Man multiplicire die Coefficienten der einen Reihe folgweise durch die der andern, entweder in der Ordnung,

wie sie hier folgen, den ersten mit dem ersten, den zweyten mit dem zweyten, u. s. w. oder in entgegengesetzter Ordnung, als 1 in der ersten Reihe mit dem mten in der zweyten, den zweyten in jener mit dem (m—1)ten in dieser, u. s. f. die Aufgabe ist, die Summe dieser Producte zu finden.

19. Zuerst die Producte nach der Folge der Glieder.

I. Es ist nach (5)

$${}^{\alpha}\mathfrak{M} = {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{M},$$

$${}^{\beta}\mathfrak{M} = {}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\beta-1}\mathfrak{M}.$$

und nach (8.)

$$m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M} = (\alpha - m + 1).\,{}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}},$$

$$m.\,{}^{\beta}\mathfrak{M} = (\beta - m + 1).\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.$$

II. Hieraus entstehen folgende Werthe der Producte zweyer Binomial-Coefficienten in derselben Stelle:

$$m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M} = (\alpha - m + 1).\,{}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{M}.$$

$$m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M} = (\beta - m + 1).\,{}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + m.\,{}^{\alpha-1}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M}.$$

III. Man setze für m folgweise 1, 2, 3, etc. so ist, nach der ersten Formel,

$$1.\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} = \alpha.1.1 + 1.\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A}$$

$$2.\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta}\mathfrak{B} = (\alpha-1).\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A} + 2.\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{B}$$

$$3.\,{}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta}\mathfrak{C} = (\alpha-2).\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{B} + 3.\,{}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{C}$$

$$4.\,{}^{\alpha}\mathfrak{D}.\,{}^{\beta}\mathfrak{D} = (\alpha-3).\,{}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta-}\mathfrak{C} + 4.\,{}^{\alpha}\mathfrak{D}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{D}$$

. . .

. . .

. . .

. . .

$$(m-1).\,{}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}} = (\alpha-m+2).\,{}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta-1}\overset{-2}{\mathfrak{M}}$$
$$+ (m-1).\,{}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.$$

$$m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M} = (\alpha-m+1).\,{}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}$$
$$+ m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{M}.$$

IV. Die Summe der Theile linker Hand bezeichne man durch S, so ist, wenn rechter Hand der erste Theil jedes Gliedes mit dem zweyten des vorhergehenden zusammen genommen wird,

$$S = \alpha(1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{C}$$
$$\ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}) + m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{M}.$$

V. Aus der zweyten Formel in II. welche aus der ersten durch Vertauschung von α und β entsteht, ist auf dieselbe Art.

$$S = \beta(1.1 + {}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta}\mathfrak{C}$$
$$\ldots\ldots + {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}) + m.\,{}^{\alpha-1}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M}.$$

VI. Man nehme α und β für ganze positive Zahlen, damit die Reihe der Coefficienten irgendwo abbreche, lasse β die größere Zahl bedeuten, und setze $m = \alpha$. Es ist alsdann ${}^{\alpha}\mathfrak{M} = 1$, und ${}^{\alpha-1}\mathfrak{M} = 0$ (II.). Nun geben die beiden gleichen Werthe von S die Gleichung,

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{C}$$
$$\ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{M}$$
$$= \frac{\beta}{\alpha}(1.1 + {}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta}\mathfrak{C}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}).$$

VII. Die Reihe in dem zweyten Theile der Gleichung enthält ein Glied weniger als die Reihe in dem ersten Theile. Nun kann man statt der Reihe in dem zweyten Theile eine Reihe setzen, die noch einen Theil weniger enthält, und so fortfahren, bis daß man auf eine eintheilige

Größe kommt, und dadurch die Summe der Reihe in dem ersten Theile erhält. Es ist nämlich, wenn $\alpha - 1$ statt α, und β statt $\beta - 1$ gesetzt wird.

$$1.1 + {}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A}\ \ldots\ldots + {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}$$

$$= \frac{\beta+1}{\alpha-1}\ (1.1 + {}^{\alpha-2}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta+1}\mathfrak{A}\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + {}^{\alpha-2}\overset{-2}{\mathfrak{M}}.\ {}^{\beta+1}\overset{-2}{\mathfrak{M}});$$

und auf ähnliche Art

$$1.1 + {}^{\alpha-2}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta+1}\mathfrak{A}\ \ldots\ldots + {}^{\alpha-2}\overset{-2}{\mathfrak{M}}.\ {}^{\beta+1}\overset{-2}{\mathfrak{M}})$$

$$= \frac{\beta+2}{\alpha-2}\ (1.1 + {}^{\alpha-3}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta+2}\mathfrak{A}\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + {}^{\alpha-3}\overset{-3}{\mathfrak{M}}.\ {}^{\beta+2}\overset{-3}{\mathfrak{M}}).\ \text{u. s. f.}$$

wobey zu bemerken ist, daß ${}^{\alpha-r}\overset{-r}{\mathfrak{M}} = 1$, und ${}^{\alpha-r}\overset{-r+1}{\mathfrak{M}} = 0$ ist, weil jenes der $(m-r)$te, das ist, nach der Annahme in VI. $(\alpha-r)$te Coefficient in der Potenz mit dem Exponenten $\alpha - r$, folglich $= 1$, und der folgende, der $(m-r+1)$te $= 0$ ist.

VIII. Folglich ist

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta-1}\mathfrak{A}\ \ldots\ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\ {}^{\beta-1}\mathfrak{M}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta+1}{\alpha-1} \cdot \frac{\beta+2}{\alpha-2} \ldots \frac{\beta+r-1}{\alpha-r+1}$$

$$(1.1 + {}^{\alpha-r}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta+r-1}\mathfrak{A}\ \ldots\ldots + {}^{\alpha-r}\overset{-r}{\mathfrak{M}}.\ {}^{\beta+r-1}\overset{-r}{\mathfrak{M}})$$

IX. Wenn $r = \alpha$, so wird der vieltheilige Factor $= 1.1$, da ${}^{0}\mathfrak{A} = 0$ ist, und es ist die Summe der Reihe

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta-1}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta-1}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta-1}\mathfrak{C}\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\ {}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\ {}^{\beta-1}\mathfrak{M}$$

$$= \frac{\beta.\beta+1.\beta+2\ldots\beta+\alpha-1}{\alpha.\alpha-1.\alpha-2\ldots\ldots 1} = {}^{\alpha+\beta-1}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}.$$

Es ist nämlich der Coefficient in der Stelle α der $(\alpha - 1)$te nach dem ersten, A.

X. Setzt man β statt $\beta - 1$, so ist

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.{}^{\beta}\mathfrak{C} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.{}^{\beta}\mathfrak{M} = {}^{\alpha+\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}},$$

dem Coefficienten in der $(\alpha + \beta)$ten Potenz, dessen Stellenzahl α ist.

17. Es sey $\alpha = \beta$, so ist

$$1^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{C})^2 \ldots\ldots 1^2 = {}^{2\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}},$$

das ist dem mittelsten Coefficienten in der Potenz mit dem Exponenten 2α.

18. Aus dem Werthe des mittelsten Coefficienten in $(a+b)^{2\alpha}$, der in (13.) gefunden ist, wird

$$1^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{C})^2 \ldots + 1^2$$

$$= \frac{1.3.5\ldots 2\alpha - 1}{2.4.6\ldots 2\alpha} \times 2^{2\alpha}.$$

20. Exempel. Es sey $\alpha = 6$; $\beta = 10$, so ist

$$1.1 + 6.10 + 15.45 + 20.120 + 15.210 + 6.252$$

$$+ 1.210 = 8008 = \frac{16.15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5.6}.$$

Ist $\alpha = 6$, $\beta = 6$, so ist $1.1 + 6.6 + 15.15 + 20.20 + 15.15 + 6.6 + 1.1 = 924$

$$= \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}.$$

21. Den merkwürdigen Satz (18) von der Summe der Quadrate der Binomial-Coefficienten hat la Grange zufälliger Weise gefunden. Er fand nämlich für eine gewisse Wahrscheinlichkeit zuerst den einen, und für dieselbe Wahrscheinlichkeit auch den andern Ausdruck, woraus er ihre Gleichheit schloß, Mélanges de la Soc. de Turin. T. V.

Euler hat in den Actis Petrop. a. a. 1781. de mirabilibus proprietatibus unciarum binomii einen Beweis gegeben, der von dem meinigen verschieden ist. Doch sagt er wiederholt, daß er keinen directen Weg sähe, den Satz darzuthun. Mich däucht, der hier gegebene Beweis sey ein directer, da er unmittelbar von den Eigenschaften der Binomial-Coefficienten ausgeht. — Man vergleiche noch Buzengeiger von einigen merkwürdigen Eigenschaften der Binomial-Coefficienten Archiv der Mathemat. 2. Bd. S. 161. Auch Arbogast Calcul des dérivations. nr. 434.

22. Zweytens multiplicire man je zwey Coefficienten aus den beiden Reihen (18.), in entgegengesetzter Folge genommen, in einander. Es sey der eine $= {}^{\alpha}\mathfrak{M}$; der andere ${}^{\beta}\mathfrak{N}$, so daß die Summe ihrer Stellenzahlen $= m + n =$ const. sey. Die Stelle von ${}^{\alpha}\mathfrak{A}$ und von ${}^{\beta}\mathfrak{A}$ ist die erste, so daß o die Stellenzahl für 1 in beiden Reihen bezeichnet.

I. Da $m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M} = (\alpha - m + 1).\,{}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}$ und $n.\,{}^{\beta}\mathfrak{N} = (\beta - n + 1).\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}}$ ist (8.), so ist $(m + n).\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{N} = (\alpha - m + 1).\,{}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta}\mathfrak{N} + (\beta - n + 1).\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}}$.

II. Man setze folgweise für m die Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots n-1, n$; und für n folgweise $n, n-1, n-2, n-3 \ldots 1, 0$, so ist

$$n.\ 1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N} = \qquad\qquad + (\beta - n + 1).\ 1.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}}$$

$$n.\ {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = \alpha.\ 1.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + (\beta - n + 2).\ {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}}$$

$$n.\ {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} = (\alpha - 1).\ {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + (\beta - n + 3).\ {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}}$$

$$n.\ {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} = (\alpha - 2).\ {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} + (\beta - n + 4).\ {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\overset{-4}{\mathfrak{N}}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$n.\ {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\overset{-n+1}{\mathfrak{N}} = (\alpha - n + 2).\ {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\overset{-n+1}{\mathfrak{N}} + \beta.\ {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\overset{-n}{\mathfrak{N}}$$

$$n.\ {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\overset{-n}{\mathfrak{N}} = (\alpha - n + 1).\ {}^{\alpha}\overset{-n}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}}$$

III. Da ${}^{\beta}\overset{-n}{\mathfrak{N}}$ das nte Glied vor dem nten ist, so ist dieser Ausdruck $= 1$. Daher ist ${}^{\beta}\overset{-n+1}{\mathfrak{N}} = {}^{\beta}\mathfrak{A}.$ als das $(n-1)$te Glied vor dem nten. Ferner ${}^{\beta}\overset{-n+1}{\mathfrak{N}} = {}^{\beta}\mathfrak{B}.$ u. s. f.

IV. Addirt man nun aus allen Gleichungen in (II.) die Theile linker Hand, und ebenfalls die Theile rechter Hand, so entstehen daraus folgende beide gleichen Reihen:

$$1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ 1 =$$
$$\frac{\alpha + \beta - n + 1}{n}\left(1.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}}\right.$$
$$\left. + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\overset{-4}{\mathfrak{N}} \ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ 1\right)$$

V. Die Reihe in dem zweyten Theile der Gleichung läßt sich in eine Reihe verwandeln, die ein Glied weniger, als jene hat, so wie dieselbe ein Glied weniger enthält, als die Reihe in dem ersten Theile. Es ist nämlich, wenn $n-1$ statt n gesetzt wird,

$$1.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} \ldots + {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ 1$$
$$= \frac{\alpha + \beta - n + 2}{n - 1}\left(1.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} \ldots + {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{N}}.\ 1\right).$$

Ferner, wenn $n-2$ statt n gesetzt wird,

$$1.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} \ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-3}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{N}}.\ 1$$
$$= \frac{\alpha + \beta - n + 3}{n - 2}\left(1.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-4}{\mathfrak{N}} \ldots + {}^{\alpha}\overset{-3}{\mathfrak{N}}.\ 1\right)$$

u. s. f.

VI. Demnach ist

$$1 \cdot {}^{\beta}\mathfrak{N} + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \cdot {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{N} \cdot 1$$

$$= \frac{\alpha+\beta-n+1}{n} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+2}{n-1} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+3}{n-2} \ldots$$

$$\ldots \times \frac{\alpha+\beta-n+r}{n-r+1} \left(1 \cdot {}^{\beta}\overset{-r}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \cdot {}^{\beta}\overset{-r-1}{\mathfrak{N}} \ldots + {}^{\alpha}\overset{-r}{\mathfrak{N}} \cdot 1\right).$$

VII. Es sey $r = n$, so ist ${}^{\beta}\overset{-r}{\mathfrak{N}} = 1$, und ${}^{\beta}\overset{-r-1}{\mathfrak{N}} = 0$, also

$$1 \cdot {}^{\beta}\mathfrak{N} + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \cdot {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{B} \cdot {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{C} \cdot {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}}$$

$$\ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{N} \cdot 1 =$$

$$\frac{\alpha+\beta-n+1}{n} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+2}{n-1} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+3}{n-2} \ldots$$

$$\ldots\ldots \times \frac{\alpha+\beta}{1}.$$

$= {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{N}$, dem nten Coefficienten in $(a+b)^{\alpha+\beta}$.

23. Exempel. Es sey $\alpha = 10$; $\beta = 8$; $n = 6$, so ist $1.28 + 10.56 + 45.70 + 120.56 + 210.28 + 252.8 + 210.1 = 18564$

$$= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}.$$

24. Der Satz ist sehr wichtig, weil darauf der kürzeste und einleuchtendste Beweis des binomischen Lehrsatzes in seiner Allgemeinheit gegründet wird. Es darf hier unter α und β jede Art von Zahl verstanden werden, ganze oder gebrochne, positive oder negative, weil die Formeln, woraus der Satz hergeleitet ist, für alle Arten von Zahlen gelten.

25. Man setze für n folgweise die Zahlen 1, 2, 3, etc so erhält man folgende Gleichungen:

$1.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}$

$1.\,{}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}.$

$1.\,{}^{\beta}\mathfrak{C} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C}$

$1.\,{}^{\beta}\mathfrak{D} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\mathfrak{C} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{D}.\,1$
$= {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{D}$ u. s. f.

Product zweyer Reihen, die aus den Binomialcoefficienten mit Potenzen einer unbestimmten Größe z verbunden, zusammengesetzt sind.

26. Es werden die beiden Reihen:

$$1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha}\mathfrak{C}z^3 + {}^{\alpha}\mathfrak{D}z^4 + \text{etc.} = M$$

und

$$1 + {}^{\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\beta}\mathfrak{C}z^3 + {}^{\beta}\mathfrak{D}z^4 + \text{etc.} = N$$

in einander multiplicirt. Ihr Product werde durch P bezeichnet, und es sey

$$M \times N = P = 1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.}$$

Hier ist zufolge der Formeln (25.)

$$a = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}\,;\; b = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}\,;\; c = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C},$$

u. s. f. so daß

$$M \times N = 1 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C}z^3 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{D}z^4 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C}z^5 + \text{etc.}$$

Das Product der beiden Reihen M, N, hat dieselbe Form, welche die Reihen haben, das ist, die Coëfficienten zu den Potenzen von z werden aus $\alpha + \beta$ auf dieselbe Art zusammen gesetzt, wie die Coefficienten in der Reihe M aus α, und in der Reihe N aus β, die Zahlen α und β mögen ganze oder gebrochne, positive oder negative seyn.

27. Man bezeichne die Reihen,

$1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha}\mathfrak{C}z^3 +$ etc. durch ${}^{\alpha}S$

$1 + {}^{\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\beta}\mathfrak{C}z^3 +$ etc. . . . ${}^{\beta}S$

$1 + {}^{\gamma}\mathfrak{A}z + {}^{\gamma}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\gamma}\mathfrak{C}z^3 +$ etc. . . . ${}^{\gamma}S$

: : : : :

$1 + {}^{\mu}\mathfrak{A}z + {}^{\mu}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\mu}\mathfrak{C}z^3 +$ etc. . . . ${}^{\mu}S$.

so hat das Product aller dieser Reihen dieselbe Form, welche die einzelnen Reihen haben. Ist $\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu = n$, so ist

$${}^{\alpha}S . {}^{\beta}S . {}^{\gamma}S \ldots {}^{\mu}S = {}^{n}S .$$

28. Es sey $\alpha = \beta = \gamma \ldots = \mu$, und $n = m\alpha$, so ist $({}^{\alpha}S)^m = {}^{m\alpha}S$.

29. Daher ist ${}^{\alpha}S = ({}^{n}S)^{\frac{1}{m}}$, wenn $\alpha = \frac{n}{m}$ ist, es mag α eine gebrochne oder ganze Zahl seyn, weil der Satz (26.) auch für gebrochne gilt. Oder es ist

$$({}^{n}S)^{\frac{1}{m}} = 1 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{A}z + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

woraus erhellt, daß ein gebrochner Exponent $\frac{n}{m}$ in den Coefficienten die Ausziehung der mten Wurzel aus der Reihe $1 + {}^{n}\mathfrak{A}z + {}^{n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{n}\mathfrak{C}z^3 +$ etc. anzeigt.

30. Ein negativer Exponent der Reihe ${}^{-n}S$ zeigt die Division von 1 durch ${}^{+n}S$ an. Denn es sey m eine größere Zahl als n, so ist ${}^{m}S = {}^{n}S . {}^{m-n}S$, also $\frac{{}^{m}S}{{}^{n}S} = {}^{m-n}S$. Die Form des Quotienten bleibt dieselbe, wenn m kleiner als n ist, also ist sie für einen negativen Exponenten noch diejenige, welche die Reihen ${}^{m}S$ und ${}^{n}S$ haben, wie in dem Falle da m größer als n ist. Ist $m = 0$, so ist ${}^{0}S = 1$, und $\frac{1}{{}^{n}S} = {}^{-n}S$,

das ist

$$\frac{1}{{}^{n}S} = 1 + {}^{-n}\mathfrak{A}z + {}^{-n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{-n}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten ihre Werthe aus (1.) erhalten, wenn n mit — n vertauscht wird.

31. Den wichtigen Satz (26.) hat zuerst Euler in den Comment. novis Petrop. T. XIX. a. a. 1774. (Demonstratio Theorematis Newtoniani §. 7.) vorgetragen, aber den Beweis nur darauf gegründet, weil der Satz für ganze Zahlen α, β, gilt. Es ist nämlich, bey dieser Voraussetzung,

$$(1+z)^\alpha = 1 + {}^\alpha\mathfrak{A}z + {}^\alpha\mathfrak{B}z^2 + {}^\alpha\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

$$(1+z)^\beta = 1 + {}^\beta\mathfrak{A}z + {}^\beta\mathfrak{B}z^2 + {}^\beta\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

und auch

$$(1+z)^{\alpha+\beta} = 1 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}z^2 + \text{etc.}$$

Da nun $(1+z)^\alpha \times (1+z)^\beta = (1+z)^{\alpha+\beta}$ ist, so hat das Product dieselbe Form, welche die beiden Factoren haben. Da bey der Multiplication die Form des Products von der Größe unabhängig ist, so schließt Euler, daß die Zusammensetzung des Products dieselbe bleibe, von welcher Art auch die Zahlen α und β seyn mögen, und nennt diese Beweisart ein ratiocinium non vulgare.

Bald darauf hat Segner in den Mem. de Berlin a. 1777 den Satz durch wirkliche Multiplication dargethan, aber nur für die Coefficienten der sechs ersten Potenzen von z.

L'Huilier in Genf hat auf demselben Wege aber schärfer den Beweis geführt, die Coefficienten der fünf ersten Potenzen wirklich entwickelt, und darauf gezeigt, daß wenn das bey diesen Coefficienten bemerkte Gesetz für den mten gilt, es auch für den (m + 1)ten gelte, daher allgemein sey. Principiorum calculi different. et integr. expositio. Tubingae 1795. pag. V.

Die beschwerliche Rechnung bey diesem Verfahren hat Rothe durch den Gebrauch der auch hier angewandten Bezeichnungen der Binomial-Coefficienten und der Distanz-Exponenten vermieden. Theorema binomiale, ex simplicissimis Anal. finit. fontibus universaliter demonstratum. Lipsiae 1796. Diesen Beweis habe ich hier mit einigen Veränderungen vorgetragen.

Früher schon hat Busse auf eine elementarische Art mit weniger Rechnung durch eine geschickte Schlußweise den Satz, daß das Product ${}^{m}S.\ {}^{n}S$ gleich und ähnlich ist der Reihe ${}^{m+n}S$, erwiesen in seinen kleinen Beyträgen zur Mathematik und Physik, Dessau 1785. St. 2. Die bequeme Bezeichnung, ${}^{m}S$, scheint von ihm zuerst gebraucht zu seyn.

Einen andern Beweis des Eulerischen Satzes von der Ähnlichkeit des Products mit den Factoren, $1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}z + \text{etc.}$ und $1 + {}^{\beta}\mathfrak{A}z + \text{etc.}$ hat Pfaff in einem Programm: Peculiaris differentialia investigandi ratio ex theoria functionum deducta. Helmstadii 1788. §. XII. angedeutet. Um die Kraft des Beweises völlig zu fassen, muß man die Coefficienten von x^{μ} und $x^{\mu+1}$ ausführlich entwickeln.

Binomischer Lehrsatz (Theorema binomiale) ist die analytische Formel, welche die Zusammensetzung einer Potenz des Binomium oder der zweytheiligen Größe, $a+b$, aus den beiden Theilen, a, b und dem Exponenten der Potenz darstellt.

1. Es sey der Exponens der Potenz $= n$, so ist

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n.\,n-1}{1.\,2}\,a^{n-2}b^2$$

$$+ \frac{n.\,n-1\ n-2.}{1.\,2.\ 3}\,a^{n-3}b^3 + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.}{1.\,2.\ 3.\ 4}\,a^{n-4}b^4$$

$$\ldots\ldots + \frac{n.\,n-1\ldots\ldots n-r+1.}{1.\,2.\ldots\ldots r}\,a^{n-r}b^r + \text{etc.}$$

Das rte unbestimmte Glied zeigt die allgemeine Form der Glieder an. Wenn b subtractiv ist, so ändern die ungeraden Potenzen von b ihr Vorzeichen.

2. Die Formel ist allgemein, es mag der Exponens n eine ganze oder gebrochne, eine positive oder negative Zahl seyn. Sie ist eine der wichtigsten und schönsten in der Analysis, und muß gleich in ihrem ganzen Umfange, für alle Arten von Exponenten, erwiesen werden, da sie in der Allgemeinheit erst ihre wichtigste Anwendung hat. Doch ist es nützlich, den Satz zuerst für ganze Exponenten zu erweisen, da der Beweis aus der Lehre von der Multiplication und von den Combinationen leicht geführt werden kann, und die deutliche Einsicht dieses Falles die Formel in ihrer Allgemeinheit begreiflicher macht.

3. Das Product aus den zweytheiligen verschiedenen Factoren $a + b$; $c + d$; $e + f$; $g + h$; etc. besteht aus den Partialproducten je eines Theils aus jedem Factor. Ist die Anzahl der Factoren $= n$, so besteht jedes Partialproduct aus n eintheiligen verschiedenen Factoren, und ist nur ein einziges mahl vorhanden. Sind aber die Factoren einander gleich, so daß $a = c = e = g =$ etc., und $b = d = f = h =$ etc., so bestehen die Partialproducte entweder aus n gleichen eintheiligen Factoren, a oder b; oder aus einer Anzahl gleicher, a, und einer Anzahl gleicher, b, zusammen aus n Factoren. Die Partialproducte in dem letztern Falle kommen mehrmahls vor, weil sie in die Stelle mehrerer Partialproducte für ungleiche Factoren treten; die beiden Partialproducte a^n, b^n kommen aber jedes nur einmahl vor, da sie aus den einzigen Producten der ersten oder der zweyten Theile, $aceg \ldots$ oder $bdfh \ldots$ entstehen.

4. Die verschiedenen Arten der Partialproducte sind demnach a^n ; $a^{n-1}b$; $a^{n-2}b^2$; $a^{n-3}b^3 \ldots$; $a^{n-r}b^r$, etc. wo auch b mit a vertauscht werden kann.

5. Man unterscheide die a der verschiedenen Factoren durch beygesetzte Ziffern, wie $a1$; $a2$, $a3$, etc. eben so die b durch $b1$, $b2$, $b3$, etc. Die Producte a^n und

b^n kommen jedes nur einmahl vor, wie schon bemerkt ist, und wie es auch die Multiplication unmittelbar zeigt.

6. Das Product $a^{n-1}b$ kommt so oft vor, als oft es möglich ist, $n-1$ Factoren aus den n Factoren $a1$, $a2$, $a3$, ... an, und einen Factor aus $b1$, $b2$, $b3$, ... bn zu nehmen. Zufolge der Lehre von den Combinationen (s. Combination, I.) ist jene Anzahl =

$$\frac{n.n-1\ldots 2}{1.\ 2\ldots n-1} = n. \text{ und diese } = \frac{n}{1}.$$ Beide sind gleich, weil aus n Dingen $n-1$ so oft genommen werden können als eines.

Das Product $a^{n-2}b^2$ kommt so oft vor, als es möglich ist, $n-2$ Factoren aus der Reihe $a1$, $a2$ .. an. und 2 Factoren aus der Reihe $b1$, $b2$ .. bn zu nehmen, das ist $\frac{n.\ n-1.}{1.\ 2}$ mahl.

Das Product $a^{n-3}b^3$ kommt so oft vor, als sich $n-3$ Factoren aus der Reihe $a1$, $a2$ ... an, und 3 Factoren aus $b1$, $b2$ ... bn nehmen lassen, also $\frac{n.\ n-1.\ n-2.}{1\quad 2.\quad 3}$ mahl.

7. Allgemein: das Product $a^{n-r}b^r$ kommt so oft vor, als sich $n-r$ Faktoren aus der Reihe $a1$, $a2$ .. an, und r Factoren aus der Reihe $b1$, $b2$. bn nehmen lassen, das ist $\frac{n.n-1\ldots n-r+1.}{1.\ 2\ldots r}$ mahl.

Folglich ist, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, die Formel für $(a+b)^n$ erwiesen. Die Reihe bricht ab, wenn $r=n$ ist, oder mit dem $(r+1)$ten Gliede, welches ist $= \frac{n.n-1\ldots n-n+1}{1.\ 2\ldots n} a^{n-n}b^n = b^n$.

Eine Tafel der Werthe dieser Coefficienten für $n = 1$ bis 12 ist in dem Artikel: Binomial-Coefficienten (4.) anzutreffen.

8. Daß die für ganze Exponenten der Potenz, $(a + b)^n$, gefundene entwickelte Form auch für gebrochne positive, und für negative, seyn sie ganze oder gebrochne, gelte, mag man ohne Rechnung folgendergestalt erweisen.

I. Der Ausdruck, $(a + b)^{\frac{n}{m}}$, mit einem positiven Exponenten, bedeutet ein in der geometrischen Reihe, $1 : (a + b)^1 ; (a + b)^2 : (a + b)^3 :$ etc. irgendwo eingeschalteres Glied. Es sey $n = mp + q$, wo p eine ganze Zahl oder Null, und q eine ganze Zahl, kleiner als m bedeutet, so daß $\frac{n}{m} = p + \frac{q}{m}$ ist. Alsdann ist $(a + b)^{\frac{n}{m}}$ ein zwischen $(a + b)^p$ und $(a + b)^{p+1}$ eingeschaltetes Glied, und von $m - 1$ Gliedern, die unter sich und mit jenen beiden in geometrischer Fortschreitung stehen, dasjenige, dessen Stelle nach $(a + b)^p$ durch q angegeben wird. Die interpolirte Reihe ist

$$1 : (a + b)^{\frac{1}{m}} : (a + b)^{\frac{2}{m}} : (a + b)^{\frac{3}{m}} : \text{etc.}$$

deren Glieder nach demselben Gesetze, wie die Glieder der ursprünglichen Reihe gebildet werden. In den entwickelten Werthen der ganzen Potenzen schalte man nun ebenfalls zwischen je zwenen solchen Werthen $m - 1$ Glieder ein. Dieses heißt, die eingeschalteten Glieder nach demselben Gesetze wie jene bilden. Das Gesetz betrifft theils die Producte aus den Factoren a und b, theils die Coefficienten derselben. Da $(a + b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, so ist auch $(a + b)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{m}}$,

und die Entwickelung der gebrochenen Potenz enthält eben

so den Factor $a^{\frac{n}{m}}$, wie der von $(a+b)^n$ den Factor a^n. Folglich hat man für den Factor $a^{n-r}b^r$, das ist,

$a^n . \frac{b^r}{a^r}$, nur zu setzen $a^{\frac{n}{m}} . \frac{b^r}{a^r}$, oder $a^{\frac{n}{m}-r} b^r$,

weil der zweyte Factor dieses Products von der Stelle des eingeschalteten Gliedes nicht abhängt. Die Coefficienten werden theils durch ihre Stelle r in der entwickelten Reihe, theils durch die Stelle n des Gliedes $(a+b)^n$ in der geometrischen Reihe bestimmt. Setzt man auch hier für n die Stelle des eingeschalteten Gliedes, so wird die entwikkelte Reihe für das eingeschaltete Glied nach demselben Gesetze wie für ein Glied der ursprünglichen Reihe gebildet, und jene Reihe gilt für jenes Glied, das ist, für $(a+b)^{\frac{n}{m}}$, eben so wie diese Reihe für ein Glied mit einem ganzen Exponenten.

II. Die Potenzen von $(a+b)$ mit negativen ganzen Exponenten, $(a+b)^{-n} \left(= \frac{1}{(a+b)^n}\right)$,

werden in der rückwärts fortgesetzten geometrischen Reihe, nach demselben Gesetze, wie die Potenzen $(a+b)^n$ mit bejahten Exponenten gebildet. Da $(a+b)^{-n}$

$= a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$, so hat man in der entwikkelten Reihe erstlich für $a^{n-r}b^r$ oder $a^n . \frac{b^r}{a^r}$ zu setzen

$a^{-n} . \frac{b^r}{a^r}$ oder $a^{-n-r} . b^r$. Setzt man in dem Coefficienten $-n$ statt n, so entstehen dadurch Größen, die sich auf die durch $-n$ bezeichneten Stellen eben so beziehen, wie jene auf die positiven Stellen. Die Vertauschung von $+n$ mit $-n$ in dem Werthe von $(a+b)^n$ giebt daher eben das Glied, welches durch $(a+b)^{-n}$ bedeutet wird.

III. Der Ausdruck, $(a+b)^{-\frac{n}{m}}$ bedeutet ein in der Reihe $1 : (a+b)^{-1} : (a+b)^{-2}$: etc. eingeschaltetes Glied, dessen Stelle durch $-\frac{n}{m}$ bezeichnet wird, wie die Stelle von $(a+b)^{\frac{n}{m}}$ durch $+\frac{n}{m}$. So wie nun der Werth des letztern erhalten wird dadurch, daß in dem Werthe von $(a+b)^n$ für n gesetzt wird $\frac{n}{m}$, so wird auch der Werth von $(a+b)^{-\frac{n}{m}}$ aus dem von $(a+b)^{-n}$ erhalten, wenn $-n$ mit $-\frac{n}{m}$ vertauscht wird, also aus dem von $(a+b)^n$ durch Vertauschung von n mit $-\frac{n}{m}$.

9. Es ist aber auch der Mühe werth, die Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes durch eine analytische Rechnung darzuthun, um einzusehen, wie er aus der Natur der Binomial-Coefficienten folget. Hiebey wollen wir die Form $(a+b)^n$ mit der $(1+z)^n$ der Bequemlichkeit wegen vertauschen. Es ist

$(a+b)^n = a^n \left(1+\frac{b}{a}\right)^n$. Setzt man $\frac{b}{a} = z$, so ist $(a+b)^n = a^n(1+z)^n$, und es ist nur nöthig in der Entwickelung von $(1+z)$ für z zu setzen $\frac{b}{a}$, und die Reihe mit a^n zu multipliciren, um die Entwickelung von $(a+b)^n$ zu erhalten.

10. Satz. Es ist, wenn n, m ganze positive Zahlen bedeuten, $(1+z)^{\frac{n}{m}} =$

$$1 + \frac{n}{m} z + \frac{n.n-m.}{m.\ 2m} z^2 + \frac{n.n-m.n-2m.}{m.\ 2m.\ 3m} z^3$$
$$+ \frac{n \ldots n-3m}{m \ldots 4m} z^4 \ldots + \frac{n(n-m)\ldots(n-(r-1)m)}{m.\ 2m \ldots rm} z^r$$
$$+ \text{ etc.}$$

Bew. Es seyn $\overset{\frac{n}{m}}{}\mathfrak{A}$, $\overset{\frac{n}{m}}{}\mathfrak{B}$, $\overset{\frac{n}{m}}{}\mathfrak{C}$, etc. Größen von der Form, wie die in dem Artikel: Binomial-Coefficienten, (1.) auf diese Weise bezeichneten, indem anstatt des einfachen Symbols n hier ein zusammengesetztes $\frac{n}{m}$ genommen wird. Auch sey ${}^nS = 1 + {}^n\mathfrak{A}z^2 + {}^n\mathfrak{B}z^2 + {}^n\mathfrak{C}z^3 +$ etc. Es ist a. a. O. (29.) erwiesen, daß

$$({}^nS)^{\frac{1}{m}} = 1 + \overset{\frac{n}{m}}{}\mathfrak{A}z + \overset{\frac{n}{m}}{}\mathfrak{B}z^2 + \overset{\frac{n}{m}}{}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

Nun ist ${}^nS = (1+z)^n$. Folglich ist

$$(1+z)^{\frac{n}{m}} = 1 + \overset{\frac{n}{m}}{}\mathfrak{A}z + \overset{\frac{n}{m}}{}\mathfrak{B}z^2 + \overset{\frac{n}{m}}{}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

Multiplicirt man nun in den Werthen der Coefficienten von z jeden Factor des Zählers und Nenners durch m, so wird die in dem Satze aufgestellte Formel erhalten.

11. Satz. Es ist $(1+z)^{-n}$ oder $\frac{1}{(1+z)^n} =$

$$1 - nz + \frac{n.n+1.}{1.\ 2} z^2 - \frac{n.n+1.n+2.}{1.\ 2.\ 3} z^3$$
$$+ \frac{n \ldots n+3.}{1 \ldots 4} z^4 \ldots \pm \frac{n.n+1 \ldots n+r-1.}{1.\ 2 \ldots r} z^r \mp \text{etc.}$$

Bew. Es sey ${}^nS = 1 + {}^n\mathfrak{A}z + {}^n\mathfrak{B}z^2 + {}^n\mathfrak{C}z^3 +$ etc und ${}^{-n}S = 1 + {}^{-n}\mathfrak{A}z + {}^{-n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{-n}\mathfrak{C}z^3 +$ etc. so ist $\frac{1}{{}^nS} = {}^{-n}S$, wie in dem Artickel, Binomial-Coefficienten, 30. erwiesen ist. Es ist aber ${}^nS = (1+z)^n$, und daher $\frac{1}{(1+z)^n}$ oder $(1+z)^{-n} = {}^{-n}S$. Setzt man nun für die Coefficienten in der

durch $-^nS$ bezeichneten Reihe ihre Werthe, so entsteht daraus die Formel des Satzes.

12. Satz. Es ist $(1+z)^{-\frac{n}{m}} =$

$$1 - \frac{n}{m} z + \frac{n.\,\overline{n+m}.}{m.\ 2m} z^2 - \frac{n.\,\overline{n+m}.\ \overline{n+2m}.}{m.\ 2m.\ 3.m} z^3$$

$$+ \frac{n \ldots \overline{n+3m}.}{m \ldots 4m} z^4 \ldots \pm \frac{n.\overline{n+m} \ldots (n+(r-1)m)}{m.\ 2m \ldots rm} z^r$$

$\mp$ etc.

Der Beweis ist dem in (11.) geführten ganz ähnlich. Denn für die Reihen $+^nS$ und $-^nS$ darf n auch eine gebrochne Zahl seyn, und es bleibt $\frac{1}{^nS} = -^nS$. Es ist aber auch $^nS = (1+z)^n$, wenn n eine gebrochne Zahl ist. Setzt man $\frac{n}{m}$ für n, so ist $(1+z)^{-\frac{n}{m}}$ $= -\frac{n}{m}S = 1 + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{A}z + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{B}z^2 + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{C}z^3$ + etc. woraus der Satz folgt.

13. Exempel I. $(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1.1}{2.4} z^2$

$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6} z^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} z^4 + \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10} z^5 - \text{etc.}$$

II. $(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}z - \frac{1.2}{3.6} z^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9} z^3$

$$- \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12} z^4 + \frac{1.2.5.8.11}{3.6.9.12.15} z^5 - \text{etc.}$$

III. $(1+z)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}z - \frac{2.1}{3.6} z^2 + \frac{2.1.4}{3.6.9} z^3$

$$- \frac{2.1.4.7}{3.6.9.12} z^4 + \frac{2.1.4.7.10}{3.6.9.12.15} z^5 - \text{etc.}$$

$$\text{IV. } (1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4}z^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}z^3$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4 - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}z^5 + \text{etc.}$$

$$\text{V. } (1+z)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \tfrac{1}{3}z + \frac{1.4}{3.6}z^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}z^3$$

$$+ \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}z^4 - \frac{1.4.7.10.13}{3.6.9.12.15}z^5 + \text{etc.}$$

14. Die Logarithmen der zehn ersten Coefficienten für die Exponenten, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$ sind folgende.

		$\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$	$n = -\frac{1}{2}$
log	𝔄	9, 6989700	9, 6989700
l.	𝔅	9, 0969100	9, 5740313
l.	ℭ	8, 7958800	9, 4948500
l.	𝔇	8, 5917601	9, 4368581
l.	𝔈	8, 4368581	9, 3911005
l.	𝔉	8, 3119193	9, 3533120
l.	𝔊	8, 2071840	9, 3211272
l.	ℌ	8, 1170073	9, 2930986
l.	ℑ	8, 0378261	9, 2682751
l.	𝔎	7, 9672450	9, 2459985

	$\frac{n}{m} = \frac{1}{3}$	$\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$
log 𝔄	9, 5228787	9, 5228787
l. 𝔅	9, 0457575	9, 3467875
l. ℭ	8, 7904849	9, 2376431
l. 𝔇	8, 6143936	9, 1584617
l. 𝔈	8, 4796952	9, 0963138
l. 𝔉	8, 3705506	9, 0451616
l. 𝔊	8, 2787804	9, 0016957
l. ℌ	8, 1995990	8, 9639071
l. ℑ	8, 1299632	8, 9304834
l. 𝔎	8, 0678152	8, 9005202

Diese Logarithmen sind nicht aus den Logarithmen der Factoren in den Coefficienten zusammengesetzt, sondern aus ihren numerischen hinlänglich genau berechneten Werthen gefunden.

15. Um aus einer ganzen Zahl N die mte Wurzel zu ziehen, zerlege man sie in zwey ganze Theile, deren ersterer sey $= a^m$, der zweyte $= b$, so daß a^m der Zahl N möglichst nahe komme, und $N = a^m + b$, oder auch $N = a^m - b$ sey. Man setze $\frac{b}{a^m} = z$, so ist $N = a^m (1 + z)$, wenn b additiv ist, und $N^{\frac{1}{m}} = a\,(1 + z)^{\frac{1}{m}}$

$$= a\left(1 + \frac{1}{m}z - \frac{1.m-1.}{m.\ 2m}z^2 + \frac{1.m-1.2m-1.}{m.\ 2m.\ 3m}z^3 - \frac{1.m-1.\ 2m-1.\ 3m-1.}{m.\ 2m.\ 3m.\ 4m}z^4 + \text{etc.}\right),$$

wenn in (10.) der Zähler $n = 1$ gesetzt wird. Um z kleiner zu machen, suche man zu der Zahl N einen Factor f^m, so

daß das Product $f^m . N = A^m + B$ einen kleinern Werth für $\frac{B}{A^m}$ gebe, als $\frac{b}{a^m}$ hat. Die aus diesem Producte gezogene Wurzel $f . N^{\frac{1}{m}}$ mit f dividirt, giebt die gesuchte mte Wurzel aus N.

16. Exempel I. Die Quadratwurzel aus 2 bis auf die zehnte Decimalstelle zu finden.

Weil die Reihe sich dem völligen Werthe sehr langsam nähern würde, wenn man 2 in die Theile $1 + 1$ zerlegte, so multiplicire man 2 mit einem schicklichen Factor, der ein Quadrat ist. Dieser sey 25, so ist $2 \times 25 = 50 = 49 + 1$, und $\sqrt{50} = \sqrt{(49 + 1)} = 7\sqrt{(1 + \frac{1}{49})} = 7 (1 + \frac{1}{49})^{\frac{1}{2}}$. Man multiplicire nun die Potenzen von $\frac{1}{49}$ nach ihrer Folge in die zugehörigen Binomialcoefficienten (13. I.), so wird erhalten

$$
\begin{array}{rrrr}
\sqrt{(1 + \frac{1}{49})} = & 1{,}00000 & 00000 & 0 \\
+ & 0{,}01020 & 40816 & 3 \\
- & 5 & 20616 & 4 \\
+ & & 5312 & 4 \\
- & & 67 & 8 \\
+ & & & 9 \\
\hline
= & 1{,}01015 & 25445 & 4 \\
\sqrt{50} = & 7{,}07106 & 78118 & \\
\sqrt{2} = & 1{,}41421 & 35623 &
\end{array}
$$

Exempel II. Die Quadratwurzel aus 12 zu finden. Sie wird in einer der Formeln zur Rectification des Kreises gebraucht. (Cyklotechnie.). Es ist $4 \times 12 = 48 = 49 - 1$, also $\sqrt{48} = 7 \sqrt{(1 - \frac{1}{49})}$. Die Glieder sind eben dieselben wie vorher, aber alle nach dem ersten folgenden subtractiv.

		$\frac{n}{m} = \frac{1}{3}$	$\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$
log	𝔄	9, 5228787	9, 5228787
l.	𝔅	9, 0457575	9, 3467875
l.	ℭ	8, 7904849	9, 2376431
l.	𝔇	8, 6143936	9, 1584617
l.	𝔈	8, 4796952	9, 0963138
l.	𝔉	8, 3705506	9, 0451616
l.	𝔊	8, 2787804	9, 0016957
l.	ℌ	8, 1995990	8, 9639071
l.	ℑ	8, 1299632	8, 9304834
l.	𝔎	8, 0678152	8, 9005202

Diese Logarithmen sind nicht aus den Logarithmen der Factoren in den Coefficienten zusammengesetzt, sondern aus ihren numerischen hinlänglich genau berechneten Werthen gefunden.

15. Um aus einer ganzen Zahl N die mte Wurzel zu ziehen, zerlege man sie in zwey ganze Theile, deren ersterer sey $= a^m$, der zweyte $= b$, so daß a^m der Zahl N möglichst nahe komme, und $N = a^m + b$, oder auch $N = a^m - b$ sey. Man setze $\frac{b}{a^m} = z$, so ist $N = a^m(1 + z)$, wenn b additiv ist, und $N^{\frac{1}{m}} = a\,(1 + z)^{\frac{1}{m}}$

$$= a\left(1 + \frac{1}{m}z - \frac{1.m-1.}{m.\ 2m}z^2 + \frac{1.m-1.2m-1.}{m.\ 2m.\ 3m}z^3 - \frac{1.m-1.\ 2m-1.\ 3m-1.}{m.\ 2m.\ 3m.\ 4m}z^4 + \text{etc.}\right),$$

wenn in (10.) der Zähler $n = 1$ gesetzt wird. Um z kleiner zu machen, suche man zu der Zahl N einen Factor f^m, so

daß das Product $f^m . N = A^m + B$ einen kleinern Werth für $\frac{B}{A^m}$ gebe, als $\frac{b}{a^m}$ hat. Die aus diesem Producte gezogene Wurzel $f . N^{\frac{1}{m}}$ mit f dividirt, giebt die gesuchte mte Wurzel aus N.

16. Exempel I. Die Quadratwurzel aus 2 bis auf die zehnte Decimalstelle zu finden.

Weil die Reihe sich dem völligen Werthe sehr langsam nähern würde, wenn man 2 in die Theile $1 + 1$ zerlegte, so multiplicire man 2 mit einem schicklichen Factor, der ein Quadrat ist. Dieser sey 25, so ist $2 \times 25 = 50 = 49 + 1$, und $\sqrt{50} = \sqrt{(49 + 1)} = 7 \sqrt{(1 + \frac{1}{49})} = 7 (1 + \frac{1}{49})^{\frac{1}{2}}$. Man multiplicire nun die Potenzen von $\frac{1}{49}$ nach ihrer Folge in die zugehörigen Binomialcoefficienten (13. I.), so wird erhalten

$$\begin{aligned}
\sqrt{(1 + \tfrac{1}{49})} &= 1{,}00000\ \ 00000\ 0 \\
&+ 0{,}01020\ \ 40816\ 3 \\
&- \phantom{0{,}0102}5\ \ 20616\ 4 \\
&+ \phantom{0{,}01020\ \ 4}5312\ 4 \\
&- \phantom{0{,}01020\ \ 408}67\ 8 \\
&+ \phantom{0{,}01020\ \ 40816\ }9 \\
&= 1{,}01015\ \ 25445\ 4 \\
\sqrt{50} &= 7{,}07106\ \ 78118 \\
\sqrt{2} &= 1{,}41421\ \ 35623
\end{aligned}$$

Exempel II. Die Quadratwurzel aus 12 zu finden. Sie wird in einer der Formeln zur Rectification des Kreises gebraucht. (Cyklotechnie.). Es ist $4 \times 12 = 48 = 49 - 1$, also $\sqrt{48} = 7 \sqrt{(1 - \frac{1}{49})}$. Die Glieder sind eben dieselben wie vorher, aber alle nach dem ersten folgenden subtractiv.

Also ist $\sqrt{(1-\frac{1}{49})} = 0,98974331862..$
und $\sqrt{48} = 6,92820323034..$
$\sqrt{12} = 3,4641016151...$

Exempel III. Die Cubikwurzel aus 2 zu finden. Diese wird zu der arithmetischen Verdoppelung eines Würfels gebraucht. Zur mehrern Convergenz der Reihe für die Wurzel multiplicire man 2 mit 16 als dem Cubus von 4, so ist $2 \times 64 = 125 + 3$. Es ist $\sqrt[3]{128}$ $= 5\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{125}\right)}$, wo $\frac{3}{125} = 0,024$ ist.

Die Potenzen dieses Bruchs werden folgweise in die Binomialcoefficienten für den Exponenten $\frac{1}{3}$ (13. II.) multiplicirt. Es ist

$\sqrt[3]{(1+0,024)}$	$=$ 1,00000	00000	00
	+ 0,008		
	— 6	4	
	+	8533	33
	—	136	53
	+	2	40
	—		5
	$=$ 1,00793	68399	15
$\sqrt[3]{128}$	$=$ 5,03968	41995	75
$\sqrt[3]{2}$	$=$ 1,25992	10498	9

17. Satz. Es ist $(a+b)^n = a^n \Big[1 + n.\frac{b}{a+b}$
$+ \frac{n.n+1.}{1.\ 2.}.\frac{b^2}{(a+b)^2} + \frac{n.n+1.n+2.}{1.\ 2.\ 3}.\frac{b^3}{(a+b)^3}$
$+ \frac{n.n+1.n+2.n+3.}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.\frac{b^4}{(a+b)^4} + \text{etc.} \Big]$.

Denn es sey $\frac{b}{a+b} = u$, so ist $b = \frac{au}{1-u}$, und $a+b = \frac{a}{1-u}$, also $(a+b)^n = a^n(1-u)^{-n}$.

Nun ist $(1-u)^{-n} = 1 + nu + \frac{n.n+1.}{1.2} u^2 + \text{etc.}$ aus (11.), wenn daselbst z mit — u vertauscht wird. Für u der Werth $\frac{b}{a+b}$ gesetzt, wird die Formel erhalten.

In dieser Reihe nehmen die Potenzen von $\frac{b}{a+b}$ stärker ab als die von $\frac{b}{a}$, welche in der Reihe (1.) in die Potenz a^n multiplicirt sind. Dagegen sind für ein positives n die Coefficienten größer.

18. Satz. Es ist $(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left[1 - n.\frac{b}{a+b} + \frac{n.n-1.}{1.2}.\frac{b^2}{(a+b)^2} - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}.\frac{b}{(a+b)^3} + \frac{n\ldots n-3}{1\ldots 4}.\frac{b^4}{(a+b)^4} - \text{etc.}\right]$.

Die Reihe bricht ab, wenn n eine ganze Zahl ist. Die ins Unendliche fortlaufende Reihe für $(a+b)^{-n}$ oder $a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$, wenn sie nach den Potenzen von $\frac{b}{a}$ geordnet wird, ist hier in einige summatorische Theile zusammen gezogen. Die Reihe folgt aus der in (17.), wenn n mit — n vertauscht wird.

19. Exempel I. Die Quadratwurzel aus 2 zu finden. Man setze in (17.) den Exponenten $n = \frac{1}{2}$, und suche, wie in (16. I.) die Quadratwurzel aus 50, das ist, aus

$49+1$. Hier ist $a=49$; $b=1$, also $\frac{b}{a+b}=\frac{1}{50}$
$=\frac{2}{100}$, wovon die Potenzen sehr leicht berechnet sind. Es ist nämlich

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{5}\sqrt{50} &= 1{,}000000\ 000000 \\
&+ 0{,}010000\ 000000 \\
&+ \phantom{0{,}0}150\ 000000 \\
&+ \phantom{0{,}00}2\ 500000 \\
&+ \phantom{0{,}000000\ 0}43750 \\
&+ \phantom{0{,}000000\ 000}787 \\
&+ \phantom{0{,}000000\ 0000}14 \\
\hline
&= 1{,}010152\ 544551 \\
\sqrt{50} &= 7{,}071067\ 811857 \\
\sqrt{2} &= 1{,}414213\ 56237
\end{aligned}
$$

Exempel II. Die Quadratwurzel aus 12 findet man mittelst eben dieser Zahlen, nur daß sie abwechselnd additiv und subtractiv sind. Es ist $\sqrt{12}=\frac{1}{2}\sqrt{48}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{(49-1)}$.

Geschichte des binomischen Lehrsatzes.

20. Die Binomial-Coefficienten kommen zuerst in Stifels Arithmetica integra L. I. c. 5. vor, welche 1544 gedruckt ist. Früher als bey Stifel hat Kästner die Binomial-Coefficienten und ihr Gesetz nicht gefunden. (Gesch. d. Mathem. 1. Bd. 49. S.). Stifel nennt sie numeros, qui peculiariter pertinent ad suas species extractionum, und liefert sie bis zur 17ten Potenz nur mit Weglassung der zweyten Hälfte in jeder Potenz, weil diese der erstern rückwärts genommen gleich ist. Er zeigt auch, wie sie nach einander durch Addition je zweyer gefunden werden, erklärt aber nicht den Grund, woher diese Addition in einer Potenz die Coefficienten in der nächstfolgenden giebt. Er weiß auch nicht, wie die Coefficienten in jeder Potenz unabhängig von denen in den niedrigern Potenzen gefunden werden.

21. Briggs war der erste, welcher zeigte, wie die Coefficienten in jeder Potenz eines Binomium unabhängig von einander gefunden werden, nur daß er die Regel noch in Worten ausdruckt, ohne eine analytische Formel für sie zu geben. Er blieb noch bey Potenzen mit ganzen Exponenten stehen. Dieses nach Huttons Anzeige. Joh. Bernoulli schreibt die Erfindung des binomischen Lehrsatzes dem Pascal zu. Von dessen arithmetischen Dreyeck s. diesen Artikel.

22. Newton war es, der entdeckte, daß die Form des binomischen Lehrsatzes, welche man für ganze Exponenten gefunden hatte, für alle Arten von Exponenten gültig ist. Diese Entdeckung ist, als eine der schönsten von diesem großen Manne, auf seinem Grabmahle in der Westmünster Abtey eingegraben. Wie er darauf gekommen ist, erzählt er in einem Schreiben an Oldenburg, welches dieser Leibnitzen mittheilen sollte, vom 24. Oct. 1676. Es steht in dem Commercio epistolico Joh. Collins et aliorum de Analysi promota, Lond. 1712, und daraus in Newtoni Opusc. T. I. p. 328 seqq. Es war auf einem Umwege, daß er die Allgemeinheit des Satzes wahrnahm. Wallis hatte gefunden, daß alle krumme Linien, deren Gleichung ist $y = (1 - xx)^n$, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, sich mittelst eines endlichen Ausdrucks quadriren lassen. Hieraus machte er den Schluß, daß, so wie der Exponent von $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ das arithmetische Mittel zwischen 0 und 1 ist, auch der Werth der Fläche für die krumme Linie mit der Gleichung $y = (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$, das ist, den Kreis, zwischen die Flächenräume an den Linien mit der Gleichung $y = (1 - xx)^0$ (das ist $y = 1$), und mit der Gleichung $y = (1 - xx)^1$ fallen müsse, er konnte aber diesen mittlern Werth nicht finden. Newton entdeckte die Form aller interpolirten Flächenräume, und bemerkte dabey, daß die Potenzen $(1 - xx)^0$; $(1 - xx)^1$; $(1 - xx)^2$; $(1 - xx)^3$, etc. auf dieselbe Art müßten interpolirt werden können. Zur Bestätigung der gefundenen Formen

multiplicirte er den daraus hergeleiteten Werth von $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ mit eben demselben, und fand das Product gleich $1-xx$, wie es seyn muß. Er versuchte nun auch die Ausziehung der Quadratwurzel mit Literalgrößen nach der Art, wie sie bey Zahlen bewerkstelligt wird, und fand den Ausdruck der Wurzel dem auf gebrochne Exponenten erweiterten Lehrsatze gemäß. Nun setzte er die Interpolation der Reihen ganz bey Seite, und wandte die arithmetischen Operationen, als das zuverlässigere Verfahren, allein an. Wie er höhere Wurzeln durch Ausziehung gefunden hat, zeigt er nicht an. Für negative ganze Exponenten war die Rechnung leichter. Newton sagt auch: nec latuit reductio per divisionem, res utique facilior.

Newtons Beweis der erweiterten Binomial-Potenz war in der That nur Induction. Er hat die sehr brauchbare Vorstellung von Interpolation bey dieser Untersuchung zu bald aufgegeben.

23. Colson trägt in einem Commentar über Newtons Fluxionenrechnung im J. 1736 einen Beweis des binomischen Lehrsatzes für alle Arten von Exponenten durch die Differentialrechnung vor. Denselben Beweis giebt Horsley in seiner Ausgabe von Newtons Werken, T. I. p. 286, und führt dabey an, daß Raphson in seiner History of Fluxions diesen Beweis einem Heynes zuschreibt. Schärfer hat Kästner den Beweis in einem Programm 1758 abgefaßt, und hernach in der Analysis unendlicher Größen.

Gegen diese Beweisart ist in Rücksicht der Methode zu erinnern, daß das Binomial-Theorem der Analysis endlicher Größen angehört, und der Lehre von den letzten Verhältnissen der Veränderungen von Größen nicht bedürfen müsse. Übrigens ist das Verfahren sehr kurz und einleuchtend.

24. Äpinus gab einen allgemeinen Beweis des Newtonischen Lehrsatzes von der Potenz eines Binomium

in den Novis Comment. Petrop. T. VIII. a. a. 1760, 1761, woran nur das auszusetzen seyn möchte, daß dabey zu viel auf Induction ankommt.

25. Der Beweis, den Euler in den Novis Comm. Petrop. T. XIX. a. a. 1774. p. 103 geführt hat, ist im Wesentlichen derselbe mit dem in diesem Artikel (10 — 13) vorgetragenen, nur daß die dabey nöthige Rechnung nicht ausgeführt, sondern ihr Resultat aus einer allgemeinen Beschaffenheit des Products zweyer oder mehrerer Factoren geführt wird, s. Binomial-Coefficienten, 37.

26. Die Beweise, welche von Segner, Busse, l'Huilier und Rothe gegeben haben, sind der Eulerische mit der noch nöthigen Ergänzung. Die Schriften, worin sie vorkommen, sind an dem a. O. angezeigt.

27. Euler hat noch im J. 1787 einen neuen Beweis des Lehrsatzes aufgestellt: Nova demonstratio, quod evolutio potestatum binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat. Nova Acta Petrop. T. V. Die Grundlage dazu ist folgende. Erstlich muß seyn $(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots + Mx^m + Nx^{m+1} + \text{etc.}$ und so auch $(1+x)^{n+1} = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 \ldots + M'x^m + N'x^{m+1} + \text{etc.}$ Die Coefficienten sind so beschaffen, daß $A' = A + 1$; $B' = B + A$, $C' = C + B$, und $M + N = N'$. Es kommt also darauf an, wie, nachdem der Werth von M gefunden ist, der Werth des folgenden Buchstabens N zu bestimmen sey, so daß, wenn darin $n+1$ für n gesetzt wird, und der dadurch hervorgehende Werth N' heißt, $N - N' = M$ werde.

28. La Grange trägt in seiner Théorie des fonctions analytiques, nr. 18. einen sehr kurzen Beweis unsers Lehrsatzes vor, der aber wesentlich mit dem aus der Differentialrechnung genommenen übereinstimmt.

29. In den englischen Transactionen sind mehrere Aufsätze über Newtons Theorem enthalten: in dem 42sten

Bande von Castillion; in dem 47sten für 1751. 52. von Th. Simpson; in dem Jahrgange für 1795 von Robertson; in dem für 1796 von Sewell. Der von dem letztern gegebene Beweis ist eine künstliche Verpflanzung der auf die Differentialrechnung gegründeten Methode in die Analysis des Endlichen.

30. In der Übersetzung der Zusätze, die la Grange zu der französischen Ausgabe von Eulers Algebra gemacht hat, ist von dem Übersetzer, Hofrath Kaußler, ein guter aber etwas umständlicher Beweis des binomischen Lehrsatzes für ganze, positive und negative, Exponenten gegeben. Er beruht auf der Summirung der gleichstelligen Coefficienten in der Folge der Potenzen.

Binomium ist eine zweytheilige Größe, wie $a+b$ oder $a+\sqrt{b}$, oder $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, u. d. gl.

Euklides versteht unter Binomium eine zweytheilige Größe von der Form $a+\sqrt{b}$ oder $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, wo a und b rationale Zahlen sind. (Elemente X. 37.). Es unterscheidet sich von einer Apotome nur dadurch, daß der eine Theil zu dem andern addirt wird. Euklides macht sechs Binomien oder Binomialen, so wie er sechs Apotomen unterscheidet. Das erste Binomium ist $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(aa-b)} : a = m : n$, dem Verhältnisse zweyer rationalen Zahlen. Das zweyte ist $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(b-aa)} : \sqrt{b} = m : n$ ist. Das dritte ist $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(a-b)} : \sqrt{a} = m : n$ ist. Das vierte ist $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(aa-b)} : a$ ein irrationales Verhältniß ist. Das fünfte ist $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(b-aa)} : \sqrt{b}$ ein irrationales Verhältniß ist. Das sechste Binomium ist $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(a-b)} : \sqrt{a}$ ein solches Verhältniß ist.

Biquadrat, die vierte Potenz einer Größe, wie 81 von 3. Es wird allgemein bezeichnet durch aaaa oder a^4.

Biquadratisch, was mit einem Biquadrat in Verbindung steht.

Biquadratische Gleichung, worin die höchste Potenz der unbekannten Größe oder der Wurzel die vierte ist. S. Gleichung IV.

Biquadratische Parabel, diejenige, deren Gleichung ist $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. S. Parabel.

Biquadratische Wurzel, einer von den vier gleichen Factoren einer Zahl. S. Wurzel.

Blindrechnung. S. Regula coeci.

Bogen, ist ein Theil einer krummen Linie.

Ein Bogen ist immer größer als seine Chorde oder die gerade Linie zwischen seinen Endpuncten. Dieses pflegt als ein Grundsatz angenommen zu werden. Man setze statt desselben folgenden. Zwey Linien, es seyn beide krumme oder eine derselben aus geraden Linien zusammengesetzt, die zwischen denselben Endpuncten liegen, sind desto weniger an Länge verschieden, je mehr Puncte sie mit einander gemein haben. Es sey nun ADB (Fig. 47. Tab. III.) ein Bogen einer krummen Linie und die gerade AB die Chorde. Man nehme auf dem Bogen irgend eine Anzahl Puncte, wie C, D, E, und ziehe die Chorden zwischen je zwey nächsten, so ist die Summe aller Chorden nothwendig größer als AB, da die Chorde AD größer als AC + CD; AE größer als AD + DE, u. s. f. ist. Je größer die Anzahl der Theile auf dem Bogen ist, desto weniger ist derselbe von der Summe der Chorden seiner Theile verschieden, also ist der Bogen größer als seine Chorde.

Da das Gränzverhältniß zwischen einem Bogen und der Summe der Chorden seiner Theile das Verhältniß der Gleichheit ist, so ist auch das Gränzverhältniß zwischen der Zunahme eines Bogens und der Chorde dieser Zunahme das Verhältniß der Gleichheit.

Bogen sind gleich oder um eine gegebene Größe verschieden, wenn jenes Gränzverhältniß für sie bey jeder Größe derselben dasselbe ist.

Zwey Bogen AB, ab (Fig. 48. a. b.) sind **ähnlich**, wenn die Winkel C, c der an den Endpuncten A, B; a, b, gezogenen Berührungslinien sich gleich, und eben so an den Puncten D, d, für welche das Verhältniß der Bogen AD : ad = AB : ab ist, die Winkel E, e der berührenden DE, de mit AE, ae sich gleich sind. Ihre Ablenkung bey gleichmäßiger Länge ist alsdann dieselbe. Darum nennt man zwey Kreisbogen AB, ab ähnlich, wenn die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte F, f sich gleich sind. Das zur Ähnlichkeit erforderte trifft bey diesen ein.

Die Formen des Differentials eines Bogens s. in dem Artikel, Rectification.

Bomiscus, in der Geometrie der Alten eine vierseitige geradlinichte Figur, welche folgendergestalt bestimmt wird. Es sey ABC (Fig. 49. Tab. III.) ein Dreyeck, in welchem DE parallel mit BC ist. Auf der verlängerten CA nehme man einen Punct F, ziehe BF, und mit dieser die parallele EG bis an die verlängerte BA; verbinde die Puncte F, G und G, C, so ist das Viereck CBFG ein Bomiscus. Die Seite CG ist parallel der Linie DF.

Der Satz steht in den mathematischen Sammlungen des Pappus, B. VII. Satz 134. Der Beweis ist leicht, und beruht auf den Sätzen I. 37. 39. Elem. Eukl.

Das griechische Wort bedeutet einen kleinen Altar.

Brennlinie (Caustica) ist eine Linie, auf welcher die Durchschnittspuncte je zweyer nächsten, nach Art der Lichtstrahlen, von einer gegebenen Linie zurückgeworfenen, oder durch sie gebrochenen Linien liegen, wenn diese, wie die zugehörigen auffallenden Linien in stetiger Folge genommen werden. Oder auch, sie ist die Linie, welche von allen auf die gedachte Art zurückgeworfenen oder gebrochenen Linien berührt wird. Die Veranlassung zu der Untersuchung dieser Linien hat zwar die Optik gegeben; sie gehören aber ganz der Geometrie zu, wenn die Lichtstrahlen

als gerade Linien, und ihre Zurückwerfung oder Brechung als geometrische Constructionen nach einem angenommenen Gesetze, ohne Rücksicht auf sinnliche Erscheinungen, betrachtet werden.

1. Die Brennlinien durch zurückgeworfene Strahlen heißen Catacausticae; die Brennlinien durch gebrochene Strahlen heißen Diacausticae. Die allgemeinen Formeln für die Länge des zurückgeworfenen und gebrochenen Strahls bis zu dem Berührungspuncte an der Brennlinie sind in den Artikeln, Catacaustica und Diacaustica, mit den Beweisen und einigen Beyspielen, zu finden. Hier soll das leicht verständliche mit Hülfe der Elementar-Geometrie vorgetragen, und dadurch die analytische Behandlung in jenen Artikeln vorbereitet werden.

Zuerst von den Brennlinien durch Zurückwerfung.

2. Es sey ACB (Fig. 50. Tab. III.) der Quadrant eines Kreises. Mit AC seyn die Linien PM, in endlichen Abständen von einander, parallel. Die zurückgeworfenen Linien machen mit dem Halbmesser durch den Einfallspunct M denselben Winkel auf der Seite nach A hin, wie PM auf der Seite nach B. Die Durchschnitte je zweyer auf einander folgenden, von AC angefangen, sind a, b, c, d, e. Diese sind nicht Puncte der Brennlinie, weil die zurückgeworfenen Strahlen hier nicht eine stetige Folge ausmachen. Wird die Menge der auffallenden Strahlen vergrößert, so rücken die Durchschnittspuncte einer zurückgeworfenen (wie Med) mit der auf jeder Seite zunächst liegenden (wie Me, Md) immer näher zusammen. Bey einer stetigen Folge von zurückgeworfenen Linien kommen d und e sich näher als um jeden endlichen Zwischenraum, und werden Puncte der Brennlinie. Da sie auch auf der geraden Med liegen, so ist diese die berührende in d oder e. Eine berührende nämlich hat einerley Richtung mit einer krummen Linie in dem Berührungspuncte, und hat daher zwey unendlich nahe liegende Puncte mit der Curve gemein.

3. Die Brennlinie für den Halbkreis BAD bey Parallelstrahlen hat die in Fig. 51. gezeichnete Gestalt BEF•D. Man kann sie als eine glänzende Linie darstellen, wenn man in eine zinnerne polirte Schale mit einer cylindrischen Rand-Einfassung, oder in ein Glas Milch gießt, und diese den Strahlen der Sonne, oder auch einer Kerze aussetzt, nur daß bey dem Lichte der letztern die Gestalt etwas verändert wird, weil die auffallenden Strahlen nicht parallel sind. Man erblickt sie auch in dem Rauche, den man vor einem der Sonne entgegen gehaltenen Brennspiegel aufsteigen läßt. Sie wird folgendergestalt gezeichnet. Mit dem Halbmesser AC ziehe man irgend eine parallele PM, nehme den Bogen MAN = 2 Bog. BM, ziehe MN, und nehme darauf ME = $\frac{1}{4}$MN = $\frac{1}{2}$MP, so ist E der Punct der Brennlinie, wo die zurückgeworfene ME sie berührt.

4. Diese Construction gründet sich auf einige Eigenschaften des Kreises.

I. Es sey (Fig. 52.) AMBmA ein Kreis, dessen Mittelpunct C ist; PM, QN seyn mit ACB parallel. Man nehme den Bogen Mm = MP (nach entgegengesetzten Seiten von M aus), so ist die gerade Mm der zu MP gehörige zurückgeworfene Strahl. Denn CM, welche auf den Kreis in M senkrecht ist, halbirt den Winkel PMm. Ferner sey der Bogen Nn = NQ, so ist die gerade Nn der zurückgeworfene Strahl zu NQ. Nun ist Bog. Mm — Nn (= MP — NQ) = 2MN, daher Bog. Nm — Nn = 3MN, das ist, Bog. nm = 3MN.

II. Man ziehe die Chorden MN, mn, so ist, (wegen der ähnlichen Dreyecke MNR, nmR) ch. MN : ch. mn = MR : Rn. Weil die Chorden der Kreisbogen weniger zunehmen als nach dem Verhältnisse ihrer Bogen, so ist ch. mn < 3 ch. MN. Folglich ist auch Rn < 3MR, oder MR > $\frac{1}{3}$Rn. Je näher die Puncte M, N einander genommen werden, desto näher kömmt das Verhältniß der Chorden MN, mn dem 1 : 3, da-

her auch MR : Rn eben demselben, und zugleich das Verhältniß Rn : Rm dem der Gleichheit. Nun wird das Verhältniß MR : Rm zusammengesetzt aus den Verhältnissen MR : Rn und Rn : Rm. Da die Gränzen dieser Verhältnisse sind 1 : 3 und 1 : 1, so ist die Gränze des daraus zusammengesetzten, oder des MR : Rm = 1 : 3, so daß in einer stetigen Folge von auffallenden und zurückgeworfenen Strahlen MR = $\frac{1}{3}$ Rm, also MR = $\frac{1}{4}$ Mm wird. Es sey MD = $\frac{1}{4}$ Mm, so ist D ein Punct der Brennlinie, und MDm die berührende an diesem Puncte.

V. Darum ist in der Construction (3. Fig. 51.) die berührende an der Brennlinie von dem Kreise bis an den Berührungspunct, ME = $\frac{1}{4}$ MN genommen. Der Bogen, dessen Chorde der auffallende Strahl ist, ist = 2BM, der Bogen MN über dem zurückgeworfenen ist = 2MB, und die Chorde MN = 2MP.

5. Da die Unterschiede des Durchmessers AB, und der mit denselben parallelen Chorden (Fig. 52.) in Vergleichung mit dem Bogen AM wenig zunehmen, und da zugleich die Winkel der zurückgeworfenen Strahlen mit den auffallenden für kleine Bogen AM klein sind, so liegen die Durchschnitte der in der Nähe von A zurückgeworfenen, auf einander folgenden, Strahlen nahe bey dem Puncte F, wenn AF = $\frac{1}{4}$ AB ist, selbst noch, wenn AM ein nicht mehr kleiner Theil des Umfanges ist. Daher haben die sphärischen Brennspiegel ihren Brennpunct in F, und können daselbst eine große Hitze hervorbringen. Dieses zeigen auch die für die Durchschnitte zurückgeworfenen, von einander abstehenden Strahlen (Fig. 50.). Je weiter aber die einfallenden Strahlen von AB liegen, desto mehr liegen die Durchschnitte der zurückgeworfenen aus einander.

6. Die Brennlinie des Kreises für parallele Strahlen (Fig. 51.), welche zuerst untersucht ist, hat einige merkwürdige Eigenschaften.

1). Sie ist eine Epicykloide, die durch die Wälzung eines Kreises, dessen Durchmesser BH = $\frac{1}{2}$ (B ist, über dem Halbkreise HFG mit dem Durchmesser GH = CB von dem Puncte B beschrieben wird.

2). Der Bogen der Brennlinie BE ist gleich der Summe PM + ME, des auffallenden Strahls von P an, und des zurückgeworfenen bis an den Berührungspunct, oder der Bogen BE = $\frac{3}{2}$ PM. Also der Bogen BEF = $\frac{3}{2}$ AC.

3). Man nehme in dem Kreise über dem Durchmesser BH die Chorde BK = ME, dem zurückgeworfenen Strahle bis an die Brennlinie, so ist der Raum zwischen dem Bogen BE der Brennlinie, dem Kreisbogen BM, und dem Strahle ME gleich dem doppelten des Kreisabschnittes BkK, und daher der Raum BFAB so groß als der ganze Kreis über BH.

7. Die Strahlen fallen (Fig. 53.) von einem Puncte E auf die concave Seite eines Kreises AMBA. Zwey derselben seyn EM, EN, deren jene den Kreis in M, P, diese in N, Q schneidet. Man nehme den Bogen Mm = MP, und Nn = NQ, so sind die Chorden Mm, Nn die zurückgeworfenen Strahlen. Es ist Bog. nm = Nm — Nn = MN + MP — NQ = 2MN + PQ.

Die zurückgeworfenen Strahlen schneiden sich in R, so ist MR : Rn = ch. MN : ch. mn. Man ziehe noch die Chorde PQ, so ist (wegen der ähnlichen Dreyecke NME, PQE, da in dem Vierecke MNQP die gegen über stehenden Winkel zwey Rechte ausmachen, s. Kreis) EM : EQ = ch. MN : ch. PQ. Das Gränzverhältniß der Chorden ist das Verhältniß ihrer Bogen. Das Gränzverhältniß von EM : EQ ist EM : EP; das von MR : Rn oder ch. MN : ch. mn sey MD : Dm, so ist

EM : EP = MN : PQ,

MD : Dm = MN : mn.

Aus der erstern Proportion ist

$$EM : 2EM + EP = MN : 2MN + PQ.$$

Da $mn = 2MN + PQ$ ist, so ist

$$EM : 2EM + EP = MD : Dm,$$

und daraus

$$EM : 3EM + EP = MD : Mm.$$

Es werde PM in G halbirt, so ist $EM + EP = 2EG$, also $3EM + EP = 2EM + 2EG$. Wird auch Mm in H halbirt so ist

$$EM : EM + EG = MD : MH$$

oder $EM + EG : EM = MH : MD$,

und D ist der Punct der Brennlinie, wo Mm sie berührt.

8. Wenn der auffallende Strahl EA durch den Mittelpunct des Kreises C geht, so sey der Punct F auf AB die Gränze, welcher sich die Durchschnitte des nach AC selbst zurückgehenden Strahls und eines benachbarten zurückgeworfenen desto mehr nähern, je näher beide Strahlen einander liegen. Für F ist

$$EA + EC : EA = AC : AF.$$

9. Die Strahlen EM, EN (Fig. 54.) fallen von E auf die convexe Seite eines Kreises, und werden nach Mp, Mq zurückgeworfen. Die Verlängerungen der einfallenden treffen den Kreis in P, Q, der zurückgeworfenen ... m, n. Die letzteren schneiden sich in R. Die Gränze von MR sey MD, und, wie vorher, $MG = GP$; $MH = Hm$. Es ist auch für diesen Fall

$$EM + EG : EM = MH : MD.$$

Auf dem durch den Mittelpunct gehenden Strahl sey F die Gränze der Durchschnittspuncte mit den zurückgeworfenen, so ist

$$EA + EC : EA = AC : AF.$$

10. Von der Brennlinie durch Brechung ist es hier völlig genügend, nur einen Fall zu untersuchen.

Die brechende Linie sey ein Kreis (Fig 55. Tab. IV.) über dem Halbmesser AB aus dem Mittelpuncte C beschrieben. Der leuchtende Punct sey E. Zwey auffallende Strahlen sind EM, EN, ihre gebrochenen MD, ND, die sich in D schneiden. Jene verlängert treffen den Kreis in P, Q, diese in m, n. Die Einfallslothe sind MCp, NCq. Die senkrechten auf MP, Mm sind CG; CH. Das Verhältniß derselben ist ein unveränderliches.

Man setze $CMP = \phi$; $CMm = \omega$; $CNQ = \phi + \Delta\phi$; $CNn = \omega + \Delta\omega$. Bezeichnet man die Bogen des Kreises eben so wie die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte, so ist $Pp = 2\phi$, weil der zu Pp gehörige Winkel am Mittelpuncte doppelt so groß ist als der am Umfange PMp. Eben so $Qq = 2(\phi + \Delta\phi)$, daher $Qq - Pp$ oder $QP + qp = 2\Delta\phi$, das ist, $PQ + MN = 2\Delta\phi$. Gleichergestalt ist $mp = 2\omega$; $qn = 2(\omega + \Delta\omega)$, also $pq + mn$ oder $MN + mn = 2\Delta\omega$.

Für verschwindende MN und PQ ist, wie in (7.) $MN : PQ = EM : EP$, und daraus $MN + PQ : MN = EM + EP : EM$. Bey eben dieser Annahme ist $MN : mn = DM : Dm$, also $MN : MN + mn = DM : DM + Dm$. Aus beiden Proportionen ergiebt sich folgende:

$$MN + PQ : MN + mn = (EM + EP)\,DM : EM\,(DM + Dm),$$

oder, weil G und H die Chorden MP, Mm halbiren,

$$MN + PQ : MN + mn = EG \times DM : EM \times DH,$$

und die Gränze von $\Delta\phi : \Delta\omega$ ist $EG \times DM : EM \times DH$,

Da nach dem Gesetze der Brechung das Verhältniß $\sin\phi : \sin\omega$ unveränderlich ist, so ist $\sin(\phi + \Delta\phi) : \sin(\omega + \Delta\omega) = \sin\phi : \sin\omega$, und daher $\sin(\phi + \Delta\phi) - \sin\phi : \sin(\omega + \Delta\omega) - \sin\omega = \sin\phi : \sin\omega$. Es ist $\sin(\phi + \Delta\phi) - \sin\phi = 2 \sin\frac{1}{2}\Delta\phi . \cos\frac{1}{2}(2\phi + \Delta\phi)$, und $\sin(\omega + \Delta\omega) - \sin\omega = 2 \sin\frac{1}{2}\Delta\omega . \cos\frac{1}{2}(2\omega + \Delta\omega)$, nach Goniometrie, 28, wie es sich auch leicht durch eine

geometrische Construction erweisen läßt. Die Gränze des Verhältnisses $2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi.\cos\frac{1}{2}(2\varphi+\Delta\varphi):2\sin\frac{1}{2}\Delta\omega.\cos\frac{1}{2}(2\omega+\Delta\omega)$ ist $\Delta\varphi.\cos\varphi:\Delta\omega.\cos\omega$. Jenes Verhältniß ist auch das unveränderliche $\sin\varphi:\sin\omega$, und daher ist die Gränze von $\Delta\varphi:\Delta\omega = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}:\frac{\sin\omega}{\cos\omega}$.

Dieses Verhältniß tritt für verschwindende Veränderungen $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$ ein; für endliche $\Delta\varphi$ und $\Delta\omega$ gilt ein anderes, das zugleich von den Veränderungen selbst abhängig ist. Da vorher auch eine Gränze für $\Delta\varphi:\Delta\omega$ gefunden ist, so sind die Werthe beider gleich, und es ist

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}:\frac{\sin\omega}{\cos\omega} = EG\times DM:EM\times DH.$$

Es ist $\sin\varphi:\cos\varphi = CG:MG$, und $\sin\omega:\cos\omega = CH:MH$ also

$$\frac{CG}{MG}:\frac{CH}{MH} = EG\times DM:EM\times DH,$$

und daraus

$$\frac{CG\times EM}{MG}:\frac{CH\times EG}{MH} = DM:DH.$$

Aus dem Verhältnisse $DM:DH$ wird auch das $DM-DH:DM$ oder $MH:MD$ gefunden, wodurch der Punct D bestimmt wird. Dieser ist ein Punct der Brennlinie, den sie mit der berührenden gemein hat.

11. Wenn der auffallende Strahl durch den Mittelpunct C geht, so verwandelt sich das Verhältniß $EM:EG$ in $EA:EC$; das $MG:MH$ in $AC:AC$; das $CG:CH$ bleibt das beständige Brechungsverhältniß, welches durch $I:R$ bezeichnet werde. Beide, CG und CH, sind zwar für diese Lage des Strahls Null, aber ihr Verhältniß bleibt auch im Verschwinden das unveränderliche. Ferner verwandelt sich das Verhältniß $DM:DH$ in $FA:FC$, wenn F die Gränze der Durchschnittspuncte der ge-

brochenen Strahlen mit dem einfallenden ungebrochen fortgehenden ist. Demnach ist

$$I \times EA : R \times EC = FA : FC$$

daher

$$I \times EA - R \times EC : I \times EA = AC : AF.$$

12. Wenn die auffallenden Strahlen parallel mit AB sind, so sind EA, EM, EN unendlich groß, und das Verhältniß EM:EG wird 1:1. In diesem Falle ist

$$\frac{CG}{MG} : \frac{CH}{MH} = DM : DH,$$

und $I - R : I = AC : AF$.

13. Die Anwendung der gegebenen Auflösung auf andere Fälle ist leicht. Nur ist noch zu zeigen, wie die Lage des gebrochenen Strahls durch eine Construction gefunden wird,

Es sey BAD (Fig. 56.) der Einfallswinkel, AB das Einfallsloth, AD der einfallende Strahl. Ueber der willkührlichen AB beschreibe man einen Halbkreis, welcher AD in D schneidet, und ziehe BD. Auf der verlängerten AB nehme man AE:AB gleich dem Brechungsverhältnisse, beschreibe über AE einen Kreis, lege in denselben die Chorde EF = BD, und ziehe AF, so ist AF der gebrochne Strahl. Denn der Sinus des Einfallswinkels ist $\frac{BD}{AB}$, des Brechungswinkels $\frac{EF}{AE}$. Beide verhalten sich wie AE : AB, dem Brechungsverhältnisse gemäß.

14. Die Untersuchung über den Durchschnittspunct zweyer unmittelbar nächsten, zurück geworfenen oder gebrochenen Strahlen hat zuerst Barrow angestellt. (Lectiones opticae, VI–XIII.) Sein Zweck war, die Stelle zu suchen, wo das Bild eines Punctes liegt, welchen ein Auge in einer gegebenen Lage durch zurückgeworfene oder gebrochene Strahlen erblickt. Das Bild setzt er

um den Durchschnittspunct zweyer nächsten Strahlen, den Gränzpunct der Durchschnitte sich naher Strahlen, und zwar um den Punct herum, weil die Augenöfnung einen gewissen Durchmesser hat. Seine Beweise sind hier zusammen gezogen. Barrow fiel aber noch nicht darauf, die Linie zu betrachten, welche die Reihe aller Bilder oder Gränzpuncte der Durchschnitte enthält.

15. Huygens ist der erste, der die Entstehung der Brennlinien angegeben hat, doch nur für den Halbkreis, und für auffallende Parallelstrahlen. Er trägt sie in seinem Traité de la Lumiere, Ch. 6. vor. (Opera reliqua. Vol.I.). Diese Schrift ist 1690 herausgekommen, aber schon 1678 verfaßt worden, und in dieser Materie nicht verändert. Von der Brennlinie durch Brechung begnügt sich H. zu bemerken, daß man jeden Punct derselben mittelst eines von Barrow vorgetragenen Lehrsatzes finden könne, und daß sie rectificabel ist. Denn er wendet sie eigentlich zur Erläuterung seiner Theorie vom Lichte, und der Bewegung der Lichtwellen an. Eben so behandelt er die Brennlinie durch Zurückwerfung. Er zeigt nur an, wie jeder ihrer Puncte gefunden wird, bemerkt, daß sie eine Art Cykloide ist, giebt ihre Länge, und den zwischen ihr und dem Halbkreise enthaltenen Flächenraum an, so wie es in (5.) vorgetragen ist.

Ehe diese Lehrsätze bekannt gemacht wurden, versuchte Tschirnhausen die Brennlinie durch Zurückwerfung paralleler Strahlen von einem Halbkreise zu bestimmen. Er legte seine Entdeckung der Pariser Akademie der Wissenschaften vor, ohne die Beweise zu geben. Auch in den Actis Erud. a. 1682 machte er seine Construction bekannt, aber auch ohne Beweis. Sie ist folgende. Der zurückwerfende Halbkreis sey ADB (Fig. 57. Tab. IV.) der Mittelpunct C, ein mit CD parallel auffallender Strahl PN. Ueber CB werde ein Halbkreis COB beschrieben; welcher von PN in O geschnitten wird. Es werde ON in M halbirt, so soll M ein Punct der Brennlinie seyn. Daß diese Construction unrichtig ist, erwies

de la Hire in einem der Pariser Akademie 1686 vorgelegten Aufsatze. (Mémoires de Mathem. et de Physique par de la Hire, p. 79.) Tschirnhausen wollte seinen Irrthum nicht eingestehen, bis daß Joh. Bernoulli den Unterschied der wahren Brennlinie von der vorgegebenen zeigte, (Acta Erud. 1692, p, 30; auch Lection. Hospitalianae XXVII.). Man möchte auf den Argwohn kommen, daß Tschirnhausen die Beschaffenheit der Brennlinie habe errathen wollen, da er den Unterschied ON der Ordinaten an den beiden Kreisen eben so halbirt, wie der Halbmesser CD, der auch ein solcher Unterschied ist, von dem Brennpuncte F halbirt wird, und daß Zeichnungen ihn in der Vermuthung bestärkt haben. Er weigerte sich, den Pariser Akademisten seinen Beweis mitzutheilen. Doch sagte er endlich in den Act. Erud. 1690. p. 71. daß er sich in den weitläuftigen Rechnungen, wozu er die nöthigen Vortheile noch nicht gewußt habe, geirrt hätte. Er fand, daß die Länge der Brennlinie des Quadranten sich zu dem Halbmesser wie 3 : 2 verhalte, welches in der That richtig ist. Er muß dieses durch Schlüsse gefunden haben, welche die bestimmte Beschaffenheit der Brennlinie nicht erforderten.

16. Die Analysten verfolgten die von Tschirnhausen und Huygens angefangene Untersuchung eifrig, und waren bald damit zu Stande. Jakob Bernoulli gab in den Act. Erud. 1692 eine allgemeine Formel, die Länge des zurückgeworfenen Strahls bis an die Brennlinie mittelst des Halbmessers der Krümmung zu bestimmen. Er gab eine Construction, den Punct der Diacaustica auf dem gegebenen Strahle zu finden, a. a. O. 1693 (Opp. T. I. Nr. 49. 56. womit noch T. II. nr. 103. art. 17. zu verbinden ist). Die Benennungen Catacaustica und Diacaustica rühren von ihm her. Sein Bruder, Joh. Bernoulli, gab eine algebraische Gleichung für die Brennlinie durch Zurückwerfung am Kreise (Act. Erud. 1692. Opp. T. I. nr. 6.), und handelte die ganze Materie von beiden Arten Brennlinien ausführlich ab in den

Lect. Hospit. XXVI – XXXII; und LVI – LVIII. In der Analyse des infinemens petits von dem Marquis de l'Hopital ist sie mit vieler Deutlichkeit vorgetragen.

Brennpunct, focus, im geometrischen Verstande, ist derjenige Punct innerhalb einer krummen Linie, in welchem alle an dieselbe von einem bestimmten Puncte aus, oder auch sich parallel gezogene, und nach Art physischer Strahlen zurückgeworfene Linien vereinigt werden, indem die Winkel, welche jedes Paar Linien, eine auffallende und die zurückgeworfene, mit der berührenden machen, gleich groß sind. Der Brennpunct liegt entweder auf derjenigen Seite der die Curve berührenden Linie, nach welcher die zurückgebogenen Linien gerichtet sind, oder auf der entgegengesetzten, so daß ihre Verlängerungen sich in einem Puncte auf dieser Seite treffen. In dem erstern Falle ist es ein Brennpunct im engern Verstande, von der Art wie der physische Brennpunct einer gehörig gekrümmten materiellen Fläche; in dem andern ist es ein bloßer geometrischer Vereinigungs- oder vielmehr ein Zerstreuungs-Punct. Brennpuncte der erstern Art sind in der Ellipse und Parabel. Die Ellipse hat zwey Brennpuncte auf ihrer großen Axe. Die Linien, welche von beiden an einen Punct des Umfanges gezogen werden, machen daselbst mit der berührenden gleich große Winkel auf derselben Seite. In dem Kreise ist der Mittelpunct zugleich Vereinigungspunct für die aus demselben an den Umfang gezogenen, und in sich zurückgehenden Linien. Die Parabel hat nur einen Brennpunct auf ihrer Axe. Die mit der Axe parallelen, gleichsam von einem unendlich entfernten Puncte her auffallenden Linien, und die von dem Brennpuncte an die Parabel gezogenen Linien, machen mit der berührenden gleich große Winkel an derselben Seite. Die Hyperbel hat zwey Brennpuncte von der andern Gattung, Zerstreuungspuncte. Die Linien, welche von diesen beiden, auf der Axe belegenen, Puncten an die Hyperbel gezogen werden, machen mit der berührenden zwar gleich große Winkel, aber auf verschiedenen Seiten

derselben. Die zurückgeworfenen Strahlen sind divergent, aus einander fahrend, und zielen rückwärts nach dem andern Brennpuncte.

G. W. Krafft zeigt in einer Abhandlung, Indagatio focorum in omnibus curvis possibilibus, Comm. novi Petrop. T. II. daß bloß die gewöhnliche Ellipse und Parabel, jene zwey wirkliche Vereinigungs- oder Brennpuncte, diese einen einzigen, haben.

Briggische Logarithmen sind die gewöhnlichen, zur Abkürzung der Rechnung bequemsten, Logarithmen, welche Heinrich Briggs (Professor der Mathematik am Gresham-Collegium in London, und hernach zu Oxford, gest. 1630) zum Theil berechnet, und an die Stelle der von Neper zuerst berechneten natürlichen Logarithmen gesetzt hat.

Brounckersche Reihen sind unendliche Reihen, welche Lord Brouncker für die Quadratur der Hyperbel angegeben hat. Es sind die ersten, durch welche der Inhalt eines hyperbolischen Raumes gefunden ist. Er machte sie in den Philosoph. Transactions T. III. für das J. 1668. nr. 34. bekannt, hatte sie aber schon vor mehrern Jahren entdeckt. Der Aufsatz steht auch in dem ersten Theile der Sammlung von logarithmischen Schriften, die Maseres in drey starken Quartbänden veranstaltet hat. Die Methode ist zwar bloß auf die Hyperbel anwendbar, allein sie ist doch ein sehr gutes Beyspiel zu zeigen, wie man die besondern Eigenschaften einer Curve oder einer Relation von Größen benutzen mag, um Aufgaben dieselbe betreffend aufzulösen.

Es sey AEZ (Fig. 58. Tab. IV.) ein Bogen einer gleichseitigen Hyperbel von dem Scheitel A an genommen; C ihr Mittelpunct; CA die halbe Axe; CX eine der Asymptoten; auf diese seyn die senkrechten AB, ED von den Puncten A, E der Hyperbel gezogen. Da diese parallel mit der andern Asymptote sind, so ist $CD : CB = AB : ED$. Weil AC den Winkel der Asymptoten

halbirt, und dieser ein Rechter ist, so ist AB = CB. Es soll nun der hyperbolische Raum ABDEHA durch das Quadrat von AB oder CB mittelst einer Reihe ausgedruckt werden.

Man ziehe zu dem Ende die parallele EF mit BD, so ist das Parallelogramm BDEF das erste Glied dieser Reihe. Nun halbire man BD in G, und ziehe die Ordinate GH, so ist GH durch die Proportion CG : CB = AB : GH gegeben. Durch H ziehe man HK parallel mit BG, so ist das Pgrm HKFL das zweyte Glied der Reihe. In den beiden hyperbolischen Dreyecken AKH, HLE schneide man auf dieselbe Art wie in dem AFE ein Parallelogramm ab, indem man durch die Mitte von BG und GD Ordinaten zieht, so sind diese beiden Vierecke das dritte und vierte Glied der Reihe. Nun bleiben in dem hyperbolischen Raume ABDEA vier Dreyecke übrig, in deren jedem wieder ein Parallelogramm abzuschneiden ist, wodurch das fünfte bis achte Glied erhalten wird. Auf diese Art wird die Reihe unbestimmt weit fortgesetzt. Man ziehe AM parallel mit BD bis an die verlängerte DE, so kann man auf dieselbe Art für den hyperbolischen Raum AMEHA eine Reihe finden. Auch läßt sich auf eine ähnliche Art das Segment AHEA berechnen. Denn man ziehe die Chorden der Bogen AH, HE, so läßt sich das geradlinichte Dreyeck AHE durch die gegebenen Größen ausdrucken. Von den beiden Segmenten über AH und EH kann man wiederum auf gleiche Art in jedem ein geradlinichtes Dreyeck abschneiden. Fährt man solchergestalt fort, so erhält man eine Reihe, deren Glieder immer kleiner werden.

Brouncker hat seine Methode nur an einem Beyspiele gewiesen. Er nimmt AB : ED = 1 : $\frac{1}{2}$ oder CB : CD = 1 : 2, und findet, wenn AB oder CB = 1 gesetzt wird,

$$ABDEHA = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10} + \text{etc.}$$

$$AMEHA = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10.11} + \text{etc.}$$

$$AEHA = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{8.9.10} + \text{etc.}$$

Montucla hat in seiner Geschichte der Mathem. 2. Th. 355. S. irriger Weise die zweyte Reihe für den hyperbolischen Raum AHEF angesetzt. Seine Nachricht von Brounckers Methode ist zu unvollständig. Man könnte nach derselben glauben, daß sie auf das Verhältniß $1 : \frac{1}{2}$ für AB : ED eingeschränkt sey, wenn er nicht noch hinzufügte, daß Br. nach seiner Methode auch den Logarithmen von 10 berechnet habe.

Zum bessern Verständnisse der Methode füge ich die allgemeinen Formeln für die Rechtecke und Dreyecke bey, welche, jene in den hyperbolischen Trapezien, diese in den Segmenten, nach der Reihe abzuschneiden sind. Brouncker hat dergleichen nicht gegeben.

Es ist CF (Fig. 59.) ein Stück der einen Asymptote einer gleichseitigen Hyperbel, C der Mittelpunct, MNP ein Bogen derselben, CD und DM; CF und FP zwey Paare rechtwinklichter Coordinaten. Man halbire DF in E, und ziehe die Ordinate EN. Durch P und N seyn PHG und NK parallel mit DF. Man setze CD = m, DF = n, so ist $MD = \frac{1}{m}$, $PF = \frac{1}{m+n}$,

$$NE = \frac{2}{2m+n}, \quad NH = \frac{2}{2m+n} - \frac{1}{m+n}$$

$$= \frac{n}{(m+n)(2m+n)}, \text{ also das Pgrm. NHGK}$$

$$= \frac{nn}{2(m+n)(2m+n)}.$$

Man ziehe die Chorde MP, welche von EN in L geschnitten werde. Es ist $HL = \frac{1}{2} MG = \frac{1}{2}(MD - PF)$

$= \frac{n}{2m(m+n)}$. Vorher ist gefunden NH $= \frac{n}{(m+n)(2m+n)}$, also ist NL $= \frac{nn}{2m(m+n)(2m+n)}$. Das Δ NLP ist $= \frac{1}{2}$ NL $\times$ PH, also ist

$$\Delta NLP = \frac{n^3}{8m(m+n)(2m+n)}.$$

Das Dreyeck NLM ist dem NLP gleich, weil die Grundlinien ML, PL gleich sind. Folglich ist

$$\Delta MNP = \frac{n^3}{4m(m+n)(2m+n)}.$$

Man setze $n = \frac{1}{p}$, und $m = \frac{q}{p}$, so ist das Pgrm.

$$NHGK = \frac{1}{(2q+1)(2q+2)},$$ und das Dreyeck

$$MNP = \frac{1}{2q(2q+1)(2q+2)}.$$

Es sey zuerst CD $= 1$, also MD $= 1$, so ist bey der ersten Zweytheilung $q = p$; bey der zweyten kommt $2p$ statt p, und q erhält die Werthe $2p$; $2p+1$. Bey der dritten Zweytheilung kommt $4p$ für $2p$, und q erhält die Werthe $4p$; $4p+1$; $4p+2$; $4p+3$. u. s. f.

Z. B. Es sey DF $= 1$, so ist $p = 1$, und für das erste Pgrm. NHGK, ist $q = 1$; für die zwey folgenden hat q die Werthe 2; 3; für die vier nächsten die Werthe 4; 5; 6; 7, u. s. f. Setzt man diese Werthe in unsere beiden Formeln, so erhält man die Glieder der ersten und dritten Brounckerschen Reihe.

In dem zweyten Exempel, welches Brouncker berechnet, ist MD : PF $= 5 : 4$, und CD $= 1$, also DF $= \frac{1}{4}$, und $p = 4$. Daher ist Δ MNP $= \frac{1}{8.9.10}$.

Für die zwey folgenden Dreyecke in dem Segmente hat q die Werthe, 8 ; 9 ; und die beiden Dreyecke sind $\frac{1}{16.17.18}$; $\frac{1}{18.19.20}$. Für die folgenden vier Dreyecke hat q die Werthe 16, 17, 18, 19, und die vier Dreyecke sind $\frac{1}{32.33.34}$; $\frac{1}{34.35.36}$; $\frac{1}{36.37.38}$; $\frac{1}{38.39.40}$; u. s. f.

Brouncker hat noch aus den berechneten Gliedern der Reihe, welche das hyperbolische Segment ausdruckt, für die übrigen zwey nahe kommende Werthe gefunden, deren einer größer, der andere kleiner als diese noch übrigen ist. Er berechnet daraus den natürlichen Logarithmen von 2 und 10 bis auf die sechste Decimalstelle. Es ist nämlich die hyperbolische Area ABDEHA (Fig. 58.) der natürliche Logarithme von CD, wenn CB zur Einheit der Längen, und das Quadrat von CB zur Einheit der Flächenräume genommen wird. Allein diese Methode Logarithmen zu berechnen ist noch zu mühsam. Mercator gab zu derselben Zeit, als Brouncker seine Quadratur der Hyperbel bekannt machte, seine Logarithmotechnie heraus, worin er eine leichtere Art die Logarithmen und hyperbolischen Flächenräume, wie ABDEHA, zu berechnen, zeigte. Sie erfordert eine Infinitesimalrechnung, die mit der Integration der Formel $x^n dx$ übereinkommt. Brounckers Quadratur ist eigentlich dadurch merkwürdig, daß sie keiner Infinitesimalrechnung bedarf.

Bruch, gebrochne Zahl (Fractio), ist diejenige, deren Einheit ein Theil der Einheit für die ganzen Zahlen (der Grund-Einheit) ist. Ein Bruch enthält demnach zwey Begriffe, erstlich die Bruchseinheit (unité fractionnaire), welche durch die Eintheilung der Einheit für die ganzen Zahlen, sie mögen benannte oder unbenannte seyn, entsteht, und zweytens die Anzahl dieser Bruchsein-

heiten. Z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{4}$, enthalten beide den 4ten Theil der Grund-Einheit einige mahl, jener Bruch 3 mahl, dieser 7 mahl.

Die Zahl, welche die Menge der in der Grund-Einheit angenommenen Theile anzeigt, heißt der **Nenner** (denominator); die Zahl, welche die Menge der Bruchs-Einheiten angiebt, heißt der **Zähler** (numerator). Man schreibt sie über einander, den Zähler über dem absondernden Querstriche, den Nenner darunter, wie $\frac{5}{8}$: $\frac{13}{8}$. Jenes bedeutet 5mal $\frac{1}{8}$, dieses 13mal $\frac{1}{8}$.

Ein Bruch ist ein Quotient, der aus der Division des Zählers durch den Nenner entsteht. Denn es ist einerley, ob man von dem ganzen Dividendus einen gewissen Theil, oder ob man von jeder Einheit desselben den eben so vielten Theil nimmt. Ist der Dividendus kleiner als der Divisor, z. B. wenn 7 durch 12 zu dividiren sind, so kann man den Quotienten nicht anders als durch den Bruch $\frac{7}{12}$ (das ist 7 mahl $\frac{1}{12}$) ausdrucken. Ist der Dividendus größer als der Divisor, so kann man dem Quotienten eine doppelte Form geben. Z. B. der Quotient von 19 durch 5 ist $\frac{19}{5}$ oder $3\frac{4}{5}$. Es ist nämlich $19 = 3 \times 5 + 4$. Soll der Quotient angeben, wie oft man den Divisor von dem Dividendus wegnehmen könne, so ist in dem Beyspiele die Antwort: 3mahl und noch den 5ten Theil des Divisors 4 mahl.

Ein **wahrer** oder **eigentlicher Bruch** (fractio vera) ist kleiner als die Einheit, oder der Zähler desselben ist kleiner als der Nenner, oder als die Menge der in der Einheit enthaltenen Bruchs-Einheiten, z. B. $\frac{3}{4}$.

Ein **uneigentlicher Bruch** (fractio spuria) ist so groß oder größer als die Einheit, oder der Zähler desselben ist so groß oder größer als der Nenner, z. B. $\frac{5}{5}$ oder $\frac{19}{5}$. Durch die wirkliche Division wird ein solcher Bruch in eine ganze Zahl mit dem anhangenden Bruche verwandelt.

Ein **Bruchs-Bruch** ist, wenn anstatt von der Grund-Einheit einen gewissen Theil ein oder mehrmahl zu nehmen, von einem Bruche dieses geschieht. Z. B. $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ Thlr. Dies bedeutet den 3ten Theil von $\frac{3}{4}$ Thlr. 2 mahl, oder $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ Thlr. Ein Bruchs-Bruch wird leicht auf einen gewöhnlichen oder einfachen Bruch gebracht. Das Product der Zähler wird der Zähler, das Product der Nenner wird der Nenner des einfachen Bruches.

Bey benannten Zahlen sind die der Haupt-Einheit nächst kleinern Einheiten Brüche jener, die darauf folgenden kleinern Einheiten sind Bruchs-Brüche, die auf diese folgende sind Bruchs-Bruchs-Brüche. Z. B. 12 Pf. 9 Lth. 3 Qtchn. sind $(12 + \frac{9}{32} + \frac{3}{4} . \frac{1}{32})$ Pfunde. Oder 8 Cent. 23 Pf. 5 Lth. 3 Quent. sind $(8 + \frac{23}{110} + \frac{5}{32} . \frac{1}{110} + \frac{3}{4} . \frac{1}{32} . \frac{1}{110})$ Centner.

Ein **unreiner Bruch** oder **Doppelbruch** ist ein solcher, dessen Zähler und Nenner beide oder einer von ihnen Brüche sind. Z. B. $\frac{7\frac{2}{3}}{18}$; $\frac{8}{4\frac{2}{3}}$; $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{3}}$. Nach dem ersten dieser Brüche ist die Grund-Einheit in 18 gleiche Theile getheilt; die Anzahl, die davon genommen wird, enthält einen Bruchtheil jenes Theils — Nach dem zweyten Bruche ist die Grund-Einheit in zweyerley Theile getheilt, in 4 gleiche und 2 kleinere, deren jeder $\frac{1}{3}$ eines der 4 gleichen ist. Von den 4 gleichen Theilen sollen zufolge des Zählers 8 genommen werden. — Nach dem dritten zum Beyspiele gesetzten Bruche ist die Grund-Einheit in 9 gleiche Theile nebst $\frac{1}{3}$ eines solchen Theils getheilt.

Der Zähler enthält einen der 9 Theile $4\frac{2}{7}$ mahl. — Die Doppelbrüche werden auf einfache gebracht, wenn man mit dem Produkte der Nenner in den Brüchen des Zählers und Nenners diese multiplicirt. So ist der erste Bruch $= \frac{37}{90}$; der zweyte $= \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$; der dritte $= \frac{150}{322} = \frac{75}{161}$. Der Bruch $\frac{7}{\frac{2}{3}}$ ist $= \frac{21}{2}$. Hier ist die Bruchs=Einheit $\frac{2}{3}$ der Grund=Einheit, da $\frac{2}{3}$ derselben die Grund=Einheit ausmachen. — Bey der Anwendung allgemeiner Formeln, die Brüche enthalten, kommt man oft auf Doppelbrüche. Auch bey gemeinen Rechnungen. Z. B. Wenn ein Friedrichsdo'r $4\frac{2}{3}$ Rthlr. hannöverisch Geld ist, und der Ducat $2\frac{3}{4}$ Rthlr., so ist ein Friedrichsdo'r $= \frac{4\frac{2}{3}}{2\frac{3}{4}}$ Ducat. Rechnet man das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tage, den Monath zu $29\frac{1}{2}$ Tage, so ist ein Monath $= \frac{29\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}$ Jahr.

Decimal=Brüche; Sexagesimal-Brüche; Kettenbrüche (continuirliche Brüche) s. an ihren Stellen.

Bruch=Rechnung ist das Verfahren mit Brüchen zu rechnen.

Wenn man den Zähler eines Bruches durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird der Bruch selbst durch diese Zahl multiplicirt oder dividirt z. B. $\frac{3 \cdot 2}{11} = \frac{6}{11} = \frac{3}{11} \cdot 2$.

Wird der Nenner eines Bruches durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird der Bruch durch diese Zahl dividirt oder multiplicirt. Z. B. $\frac{7}{4 \cdot 3} = \frac{7}{12} = \frac{7}{4} : 3$.

Werden Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt der Werth des Bruches unverändert, und die Brüche sind gleichgültige. Z. B. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{24}{32}$.

Hierauf beruht die Reduction der Brüche mit ungleichen Nennern auf Brüche von einerley Nennern oder gleicher Benennung, oder das Einrichten der Brüche, welches bey der Addition und Subtraction solcher Brüche nothwendig ist.

Die allgemeine Regel für das Einrichten der Brüche ist: Man multiplicire Zähler und Nenner jedes Bruchs mit dem Producte der Nenner aller übrigen Brüche. Z. B. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$ sind $\frac{280}{420}$; $\frac{240}{420}$; $\frac{84}{420}$; $\frac{315}{420}$.

Oft kann man zu dem gemeinschaftlichen Nenner mit einer kleinern Zahl ausreichen, als die nach dieser Regel herauskommende ist. Wenn nämlich zwey oder mehrere Nenner einen gemeinschaftlichen Fa tor haben, so behält man diesen nur bey einem Nenner bey, und läßt ihn bey den übrigen weg. Die Nenner seyn 6, 10, 14, so wird der kleinste gemeinschaftliche Nenner $= 2.3.5.7$. Denn es kommt hier nur darauf an, eine Zahl zu finden, worin alle Nenner aufgehen. Mit dem Quotienten dieser Zahl, durch jeden Nenner wird der dazu gehörige Zähler multiplicirt.

Vorausgesetzt, daß man jede Zahl in ihre einfachen Factoren zu zerlegen wisse, zerfälle man jeden Nenner in seine einfachen Factoren, und streiche diejenigen aus, die schon aus andern Nennern vorkommen. Das Product der übrigen ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner. Z. B. die Brüche, welche auf einerley Benennung zu bringen sind,

seyn $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{1}{14}$.. Zerfällt man die Nenner, nach der Ordnung der Brüche, in ihre einfachen Factoren, und streicht die überflüssigen aus, so erhält man das Product

$$2.2.3 \times \cancel{2}.5 \times \cancel{2}.\cancel{2}.2 \times \cancel{3}.\cancel{5} \times \cancel{3}.\cancel{7} \times \cancel{2}.\cancel{7}$$

oder $2.2.3.5.2.7 = 840$ als den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, und die Zähler der eingerichteten Brüche sind 350, 252, 735, 616, 160, 60.

Die **Reduction** eines Bruches auf die kleinsten Zahlen im Zähler und Nenner, oder das **Aufheben eines Bruchs**, geschieht mittelst der Division des Zählers und Nenners durch den größten gemeinschaftlichen Factor, wofern ein solcher vorhanden ist. Wie man diesen findet, zeigt der Artikel: Theiler, gemeinschaftlicher. Z. B. der Bruch $\frac{805}{2829}$ wird durch die Division beider Zahlen durch 23 in den $\frac{35}{123}$ verwandelt. — Wie ein unverkleinerlicher Bruch mit dem möglich kleinsten Fehler in kleinen Zahlen ausgedruckt wird, zeigt der Artikel: **Aufheben der Brüche.**

Addition der Brüche. Man bringe sie auf einerley Nenner, wenn sie nicht schon sie haben, und addire die Zähler. Die Summe wird als Zähler mit jenem Nenner verbunden. Z. B. $\frac{5}{6} + \frac{7}{10} + \frac{11}{14} = \frac{175}{210} + \frac{147}{210} + \frac{165}{210} = \frac{487}{210} = 2\frac{67}{210}$. Weil die Zähler nunmehr einerley Theile des Ganzen bedeuten, so kann man sie als Größen einer Art zusammen nehmen.

Subtraction der Brüche. Man bringe sie, wenn es nöthig ist, auf einerley Benennung, und subtrahire den kleinern Zähler von dem größern. Der Unterschied

wird als Zähler über den gemeinschaftlichen Nenner gesetzt. Z. B. $\frac{5}{6}-\frac{7}{10}=\frac{25}{30}-\frac{21}{30}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$..

Multiplication der Brüche. Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicire man den Zähler mit dieser Zahl, oder dividire den Nenner durch dieselbe. Z. B. $\frac{5}{8}$ durch 7 multiplicirt ist $\frac{35}{8}$, und $\frac{5}{8}$ durch 4 multiplicirt ist $\frac{20}{8}$ oder kürzer $\frac{5}{2}$ (s. Bruch).

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch multiplicirt werden, so multiplicirt man sie durch den Zähler, und dividirt sie durch den Nenner, z. B. $7\times\frac{3}{4}=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$.

Soll ein Bruch durch einen Bruch multiplicirt werden, so multiplicirt man den Zähler jenes durch den Zähler des andern; eben so die Nenner; das erstere Product ist der Zähler, das andere ist der Nenner des Bruchs, welcher dem Produkte der beiden Brüche gleich ist. Z. B. $\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$; und $\frac{5}{8}\times\frac{9}{4}=\frac{45}{32}=1\frac{13}{32}$.

Sind mehrere Brüche in einander zu multipliciren, so giebt das Product aller Zähler den Zähler des Products, das Product aller Nenner den Nenner desselben. Z. B. $\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}\times\frac{9}{7}\times\frac{11}{2}=\frac{1485}{448}=3\frac{141}{448}$.

Da ein Product den Multiplicandus auf dieselbe Art enthält, als der Multiplicator die Einheit, und ein Bruch $\frac{3}{7}$, oder allgemein, $\frac{m}{n}$, den nten Theil der Grund-Ein-

heit m mahl enthält, so muß man, bey der Multiplication durch $\frac{m}{n}$, den nten Theil des Multiplicandus m mahl nehmen, d. i. mit dem Nenner n dividiren, und mit dem Zähler m multipliciren. Die Multiplication mit einem Bruche ist demnach eine gedoppelte Operation, sowohl ein Vervielfältigen als Theilen, so wie ein Bruch zwey Begriffe enthält, den einer Bruchseinheit und den einer gewissen Menge derselben. Man nennt es aber ein Multipliciren wegen der Übereinstimmung mit der Multiplication durch eine ganze Zahl.

Division der Brüche. Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, wird entweder der Nenner durch dieselbe multiplicirt oder der Zähler dadurch dividirt. Z. B. $\frac{5}{8}$ durch 7 dividirt, ist $= \frac{5}{56}$; und $\frac{8}{9}$ durch 4 dividirt ist $= \frac{2}{9}$, (s. Bruch).

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, so wird sie durch den Nenner multiplicirt und durch den Zähler dividirt. Z. B. $9 : \frac{2}{5} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$.

Soll ein Bruch durch einen Bruch dividirt werden, so multiplicirt man den Zähler des Dividendus durch den Nenner des Divisors, und den Nenner jenes durch den Zähler dieses; das erstere Product giebt den Zähler, das andere den Nenner des Quotienten. Z. B. $\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{20}{21}$ und $\frac{4}{7} : \frac{9}{5} = \frac{20}{63}$.

Der Quotient giebt denjenigen Theil des Dividendus an, welcher darin eben so enthalten ist, als die Einheit in dem Divisor. Nun entsteht die Grund=Einheit aus einem Bruche, $\frac{m}{n}$, mittelst der Multiplication durch n und

Division durch m, oder ist $\frac{n}{m}$ dieses Bruches. Also entsteht der Quotient aus dem Dividendus, bey der Division durch den Bruch, $\frac{m}{n}$, auf dieselbe Art, nämlich durch die Multiplication mit den Nenner n, und Division mit dem Zähler m.

Der Quotient ist ein Bruchtheil des Dividendus, nämlich $\frac{n}{m}$, daher mit dem Bruche $\frac{m}{n}$ dividiren so viel ist als mit dem umgekehrten Bruche $\frac{n}{m}$ multipliciren.

Die Division durch einen Bruch ist eine gedoppelte Operation, ein Theilen und Vervielfältigen, die man wegen der Übereinstimmung mit der Division durch eine ganze Zahl Division nennt.

Beym Dividiren und Multipliciren läßt sich die Rechnung abkürzen, wenn man, wo es thunlich ist, anstatt der Multiplication des Zählers oder Nenners eine Division des Nenners und Zählers vornimmt. So ist

$$\frac{9}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{2}\text{; und } \frac{15}{8} : \frac{3}{2} = \frac{5}{4}.$$

Die Multiplication durch einen eigentlichen Bruch verkleinert; die Division durch einen solchen Bruch vergrößert. In dieser Absicht ist die Operation mit einem eigentlichen Bruche der mit ganzen Zahlen entgegengesetzt. Aber in dem Wesentlichen stimmen sie doch überein.

Die Regeln für die Multiplication und Division der Brüche mögen am kürzesten folgendergestalt erwiesen werden.

1. Es ist $\frac{m}{n} \times n = m$, und $\frac{p}{q} \times q = p$, also $\frac{m}{n} \times n \times \frac{p}{q} \times q = mp$, und mittelst der Division durch $n \times q$ ist $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$.

2. Es ist $\frac{m}{n} \times n : \frac{p}{q} \times q = \frac{m}{p}$, und mittelst der Division durch n und Multiplication durch q ist $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}$.

So wie mehrere Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden können, so kann man auch einen Bruch wieder in mehrere Brüche zerlegen, und zwar in so viele, als der Nenner einfache Factoren hat. Z. B. den Bruch $\frac{31}{35}$ zu zerlegen, setze man $\frac{31}{35} = \frac{a}{5} + \frac{b}{7}$, weil der Nenner die einfachen Factoren 5 und 7 hat. Die Summe der beiden Brüche ist $\frac{7a + 5b}{35}$; folglich ist $7a + 5b = 31$, wo a und b ganze Zahlen seyn sollen. Die unbestimmte Analytik lehrt, wie man in diesem Falle und in allen ähnlichen die Werthe von a und b, auch mit Einschluß der negativen, findet, die der Forderung Genüge thun. Hier muß $31 - 7a$ ein Vielfaches von 5, oder $31 - 5b$ ein Vielfaches von 7 seyn. Die kleinsten Werthe von a und b, die dieses leisten, sind 3 und 2, so daß $\frac{31}{35} = \frac{3}{5} + \frac{2}{7}$. Addirt man zu dem einem Bruche eine ganze Zahl und subtrahirt dieselbe von dem andern, so erhält man zwey Brüche, deren Unterschied der gegebene Bruch ist. Z. B. $\frac{8}{5} - \frac{5}{7}$; $\frac{13}{5} - \frac{12}{7}$.

Zweites Beyspiel. Der Bruch $\frac{79}{60}$ soll in drey Brüche mit den Nennern 3, 4, 5 zerlegt werden. Die Brüche seyn $\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}$, so ist $20a + 15b + 12c = 79$.

Da $15b + 12c = 79 - 20a$ ist, so ist der kleinste ganze positive Werth von $a = 2$, damit $79 - 20a$ sich, so wie der Theil linker Hand, durch 3 dividiren lasse, und man erhält $5b + 4c = 13$, woraus $b = +1$ und $c = +2$ folgt, so daß $\frac{79}{60} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ ist. — Man kann einen oder den andern Zähler auch negativ nehmen, und dadurch den zugehörigen Bruch subtractiv machen.

Wenn in dem Nenner die Potenz eines einfachen Factors enthalten ist, so kann man entweder diese Potenz als Nenner eines partiellen Bruchs behalten, oder diesen Bruch in Brüche zerfällen, deren Nenner eine geometrische Progression sind, von dem einfachen Factor an bis zu der Potenz desselben in dem gegebenen Bruche. Z. B. $\frac{31}{40} = \frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Der Bruch $\frac{1}{4}$ ist subtractiv, weil $\frac{1}{2}$ größer als $\frac{3}{8}$ ist.

Zu den Nennern der partiellen Brüche darf man keine nehmen, die gemeinschaftliche Factore haben, wenn die Zähler ganze Zahlen seyn sollen. Denn man nehme im Allgemeinen zwey Brüche $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$, deren Summe $= \frac{a\beta + b\alpha}{\alpha\beta} = \frac{A}{\alpha\beta}$. Ist nun der unverkleinerliche Bruch $\frac{A}{\alpha\beta}$ gegeben so ist $A = a\beta + b\alpha$. Haben α und β einen gemeinschaftlichen Factor, so läßt sich auch A dadurch dividiren, wider die Voraussetzung, daß der gegebene Bruch nicht verkleinerlich sey. Eben so erhellt der Satz für mehrere Brüche.

Bruchzeichen sind in der praktischen Geometrie die Zeichen, wodurch die Ruthen, Fuße, Zolle, Linien (Grane) angedeutet werden, nämlich °) ′) ″) ‴), z. B. 5° 8′ 8″ 3‴. Die kleine Null ist das Zeichen der Einheit (wie $a^0 = 1$ ist); die Striche zeigen die Potenzen

des Bruches $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{12}$, oder eines andern an, womit die dadurch bezeichneten Zahlen zu multipliciren sind. Es muß noch bemerkt werden, ob zehntheiliges oder zwölftheiliges Maaß bey den Längen gebraucht wird. Bey Flächenmaaß muß ein Q, oder Qu, oder □ angehängt werden; bey Körpermaaß ein C oder Cb oder das Zeichen ⬡.

Buchstabenrechnung ist der erste Theil der Analysis, welcher die allgemeine Bezeichnungsart der Größen und ihrer Zusammensetzungen (Formen) lehrt, zugleich auch die gemeinsten und leichtesten Rechnungsarten oder Umwandlungen ihrer Formen enthält. Um allgemeine Sätze und Auflösungen der Aufgaben zu erhalten, ist eine allgemeine Charackteristik nothwendig. Man wird dadurch in Stand gesetzt, sehr verwickelte Verbindungen von Größen auf das deutlichste darzustellen und zu fassen, welches in Worten nicht anders als sehr weitläuftig oder gar nicht geschehen könnte. Die Buchstabenrechnung ist eine Zeichenschrift, welche allen Mathematikern in jedem Volke verständlich ist. Es ist gar nicht schwer sie zu lesen und zu verstehen.

1. Die Größen werden durch Buchstaben, als Symbole, dargestellt, die bekannten durch die ersten Buchstaben des Alphabets, die unbekannten durch die letzten, oder die unveränderlichen (als bestimmt gedachte) durch die erstern, die veränderlichen durch die letztern. Die mittlern Buchstaben, m, n, p, werden schicklich angewandt, ein Vielfaches anderer Größen zu bezeichnen; auch zur Bezeichnung der Exponenten von Potenzen. Man nimmt zu der Bezeichnung benannter Größen oft die Anfangsbuchstaben der Worte, welche die Sprache für sie hat, dieses aber wird nicht selten unbequem, und wird unthunlich, wenn zwey Wörter einerley Anfangsbuchstaben haben. — So wie man bey unbenannten Zahlen die Art der Einheit unbestimmt läßt, so bleibt bey den Bezeichnungen, a, b; m, n; y, z; die Menge der Einheiten und ihrer Theile unbestimmt. Es wird nur ein Grad der Abstraction mehr erfordert, um sich darunter Größen vorzustellen,

als bey unbenannten Zahlen. — Die Buchstaben können jede Art von Größe bedeuten, bloße Zahlengrößen, geometrische Größen, Kräfte, Zeiten, Geschwindigkeiten. Die Analysis gebraucht eigentlich nur die unbenannten Größen, in Beziehung auf eine unbestimmte Einheit; die Anwendung hat es mit benannten Größen zu thun, wobey aber immer eine gewisse Einheit angegeben werden muß, wenn die Untersuchung sich der Rechnung bedient.

2. Die Zeichen, wodurch die Zusammensetzungsart der Größen dargestellt wird, sind erstlich die Zeichen der vier gemeinsten Rechnungsarten, der Addition (+), der Subtraction (—); der Multiplication (. oder ×, oder unmittelbare Zusammenstellung), der Division ein Strich zwischen Dividendus und Divisor, oder (:); der Vereinigung zu einem Ganzen, durch zwey Klammern (); der Potenzierung (durch den Exponenten oben an der Wurzelgröße); der Wurzelausziehung (√); die Zeichen der Gleichheit, (=) und der Ungleichheit (> oder <). Diese sind die, welche am häufigsten gebraucht werden. S. Zeichen.

3. Ein einfaches Symbol, wie a, vertritt oft die Stelle einer aus mehreren Größen zusammengesetzten Größe der Abkürzung im Rechnen wegen. Für sich allein zeigt es eine formlose Größe an, die mit andern verbunden werden soll.

I. Addition.

4. Wenn die Theile, woraus ein Ganzes zusammengesetzt wird, keine Form haben, oder eintheilig sind, so werden sie bloß durch das Zeichen + verbunden.

$$a + b + c + d = S$$

bedeutet ein Ganzes S, welches aus den verschiedenen unbestimmten, formlosen Theilen oder eintheiligen Größen, a, b, c, d, zusammengesetzt wird.

5. Wenn die Theile des ganzen S wieder aus Theilen zusammengesetzt sind, so werden die gleichnamigen Theile

zusammengenommen, und die Anzahl derselben wird durch eine vorgesetzte Zahl, bestimmte oder unbestimmte, bemerkt. Z. E.

$$\begin{array}{l}
3a + 5b + 2c = A \\
7a + 3b + 8c + 6d = B \\
2a + 4b + 3c + 2d + e = C \\
\hline
12a + 12b + 13c + 8d + e = A + B + C = S.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
ma + nb + pc = A \\
2na + 3nb + qc = B \\
\hline
(m + 2n)a + 4nb + (p + q)c = A + B = S.
\end{array}$$

II. Subtraction.

6. Die Subtraction stellt einen Theil des Ganzen durch das Ganze und den andern Theil dar, also bey formlosen und eintheiligen Größen folgendergestalt:

$$a - b = U,$$

wo a das Ganze, b der eine Theil, (Subtrahendus) und der andere Theil (der Unterschied) U ist.

7. Wenn die abzuziehende Größe aus einigen Theilen besteht, so wird jeder Theil abgezogen.

$$a - (b + c) = a - b - c = U.$$

Denn es ist das Ganze, $a = U + (b + c) = U + b + c$, also $a - b - c = U$.

8. Ist die abzuziehende Größe ein Unterschied zweyer, nämlich $b - c$, so ist

$$a - (b - c) = a - b + c = U.$$

Denn es ist das Ganze, $a = U + (b - c) = U + b - c$, also $a - b + c = U$.

9. Wenn sowohl das Ganze (Minuendus) als der Subtrahendus aus mehreren Theilen bestehen, so werden

die Theile des Subtrahendus mit entgegengesetzten Vorzeichen zu den ihnen gleichartigen des Minuendus gesetzt: und bey verschiedenen Vorzeichen derselben in dem Aggregate wird dem Unterschiede das Vorzeichen des größern gegeben. Z. B.

$$\begin{array}{r} 3a + 2b - 7c - 3d + 4e - f = A \\ a + 5b - 2c - 4d - 3e + 3f = B \\ \hline 2a - 3b - 5c + d + 7e - 4f = A - B. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ma + nb + pc = A \\ 2na - 3nb - qc = B \\ \hline (m - 2n)a + 4nb + (p + q)c = A - B. \end{array}$$

In dem Falle daß hier $2n > m$ ist, wird $-(2n - m)a$ statt $+(m - 2n)a$ gesetzt. Der erste Terminus bekommt das Zeichen + nicht vorgesetzt; und ist alsdann additiv; soll er aber subtractiv seyn, so muß dieses durch das Vorzeichen — angezeigt werden.

Aggregation.

10. Wenn Größen, die aus additiven und subtractiven Theilen zusammengesetzt sind, addirt werden, so nenne man dieses Zusammennehmen, Aggregation. Z. B.

$$\begin{array}{r} 3a + 2b + 7c - 4d = A \\ 5a - 8b - 4c - 3d = B \\ \hline 8a - 6b + 3c - 7d = A + B. \end{array}$$

11. Ein Aggregat ist nämlich eine Zusammensetzung von mehreren Theilen, sie mögen einerley oder verschiedene Vorzeichen haben, und begreift also sowohl Summe als Unterschied. In der allgemeinen Rechnung werden die Zusammensetzungen von Größen, welche sich nur durch die Vorzeichen einer oder mehrerer dieser Größen unterscheiden, bloß für Abänderungen einer und derselben Form gehalten, so daß der Beweis oder die Auflösung für einen

Fall, mutatis mutandis, auch für jeden der andern gilt. Da also eine Zusammensetzung einer Größe aus mehreren Theilen alle durch die Vorzeichen verschiedene Fälle begreift, so kann man sie weder eine Summe (im eigentlichen Verstande) noch einen Unterschied nennen, sondern muß ihr einen allgemeinern Namen, Aggregat, geben.

III. Multiplication.

12. Die Multiplication zweyer eintheiligen Größen, a, b, wird durch ihre bloße Zusammenstellung angezeigt, als $ab = P$. So vielmahl die Einheit in einer der beiden, a, enthalten ist, so vielmahl ist die andere, b, in dem Producte, P, enthalten.

13. Es ist $(a+b)c = ac + bc$, und

$$(a-b)c = ac - bc.$$

wo die Klammern die Vereinigung zu einem Factor anzeigen. Der Beweis ist leicht.

14. Ferner ist

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$$
$$= ac + ad + bc + bd.$$

$$(a-b)(c+d) = a(c+d) - b(c+d)$$
$$= ac + ad - bc - bd.$$

$$(a-b)(c-d) = a(c-d) - b(c-d)$$
$$= ac - ad - bc + bd.$$

Hier sieht man deutlich den Grund, warum verschiedene Vorzeichen der Factoren in dem Producte das Vorzeichen —; gleiche Zeichen aber + geben.

15. Wenn die Factoren aus mehr als zwey Theilen bestehen, so bezeichne man alle mit + begleiteten in dem einem Factor durch A, in dem andern durch C; alle mit — verbundenen in jenem durch —B, die in diesem durch

— D. Nun ist (A — B) (C — D) = A C — A D — B C + B D. So erhellt, daß das Totalproduct aus den Partialproducten jedes Theils des einen Factors in jeden Theil des andern zusammengesetzt wird, und daß die Vorzeichen die gleich vorher gegebene Regel befolgen.

16. Wenn drey oder mehr Factoren vorhanden sind, so enthält das Product derselben alle Partialproducte aus jedem Theile jedes Factors in einen Theil jedes der andern Factoren. Es seyn drey Factoren, A — B; C — D; E — F, wo A, C, E, die mit + begleiteten Theile, B, E, F die mit — begleiteten bedeuten. Es ist (A — B) (C — D) (E — F) = (AC — AD — BC + BD) (E — F) = (ACE — ACF — ADE + ADF — BCE + BCF + BDE — BDF. Wo hier einer oder drey mit dem Vorzeichen — behaftete Factoren in einem Partialproducte vorkommen, erhält dieses das Vorzeichen (—); wo zwey solche Factoren zusammen kommen, erhält das Product das Vorzeichen (+). Überhaupt giebt eine ungerade Anzahl Partial-Factoren, die mit dem Vorzeichen (—) begleitet sind, dem Partialproducte das Vorzeichen (—), eine gerade Anzahl das Vorzeichen (+).

17. Mehrtheilige Größen pflegt man nach den Potenzen einer gewissen Größe, die man alsdann durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets zur Unterscheidung bezeichnen mag, zu ordnen; ihr Product gleichfalls. Diese Größe wird hier so gebraucht, wie die Zehn in unserm Zahlensystem.

Multiplic.	$5xx$	$+ 4ax$	$- 7bb$		
Multiplic.	$3xx$	$- 9ax$	$+ 2bb$		
1. P. P.	$15x^4$	$+ 12ax^3$	$- 21b^2x^2$		
2. - -		$- 45ax^3$	$- 36a^2x^2$	$+ 63ab^2x$	
3. - -			$+ 10b^2x^2$	$+ 8ab^2x$	$- 14b^4$
Totalpr.	$15x^4$	$- 33ax^3$	$- 36a^2x^2$	$+ 71ab^2x$	$- 14b^4$
			$- 11b^2x^2$		

Von der allgemeinen Multiplication zweyer und mehrerer solcher Reihen s. die Artikel Multiplication der Reihen, und combinatorische Analysis.

18. Einige merkwürdige Producte:

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

IV. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

V. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

VI. $(a+b)^2(a-b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

VII. $(a-b)^2(a+b) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

VIII. $(a^2 + ab + b^2)(a-b) = a^3 + b^3$

IX. $(a^2 - ab + b^2)(a+b) = a^3 + b^3$

X. $(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$(a-b) = a^n - b^n$

XI. $(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots \pm ab^{n-2} \mp b^{n-1})$
$(a+b) = a^n \mp b^n$, das obere Vorzeichen für ein gerades n; das untere für ein ungerades n.

Die Formeln I. und II; IV. und V.; VI. und VII.; VIII. und IX.; X. und XI. zeigen, daß wenn in den Factoren ein Theil sein Vorzeichen durchgängig ändert, dieses auch in dem Producte geschieht, wo der Theil vorkommt. Es behält aber das Quadrat sein Vorzeichen, weil darin zwey Factoren ihr Vorzeichen ändern. Die Formel III. unterscheidet sich von I. und II. dadurch, daß b nur in dem einen Factor das Vorzeichen ändert; daher hat auch das Product eine ganz andere Form. Eben so verhält es sich mit VI. und VII. in Absicht auf V. und VI.

Product binomischer Factoren in unbestimmter Anzahl.

19. Das Product aus einer unbestimmten Anzahl binomischer Factoren,

$(1 + ax)(1 + bx)(1 + cx)(1 + dx)(1 + ex)$. etc. sey =

$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 +$ etc. so ist A die Summe aller Factoren a, b, c, d, e, etc.; B die Summe der Producte je zweyer wie ab, ac, bc, etc.; C die Summe der Producte je dreyer, wie abc, abd, acd, etc.; D die Summe der Producte je vierer, wie abcd: E die Summe der Producte je fünfer, wie abcde; u. s. f. Jedes Partialproduct enthält nämlich aus jedem binomischen Factor einen Theil als Factor. Nimmt man aus jedem den Theil 1, so entsteht daraus der erste Theil, 1, des Totalproducts. Die Anzahl der binomischen Factoren sey = m. Man nehme aus je m — 1 derselben den Theil 1, so kommt dazu aus dem rückständigen ten ein Theil, wie ax oder bx, u. dgl. Die Summe aller solcher einzelnen Partialproducte ist das collective Partialproduct Ax. Nun nehme man aus je m — 2 binomischen Factoren den Theil 1, so kommt dazu aus den zwey übrigen ein Factor wie ax; bx oder abx^2, Daraus entsteht das collective Partialproduct Bx^2. Darauf nehme man aus je m — 3 binomischen Factoren den Theil 1, so kommt dazu aus den drey übrigen ein Factor wie ax. bx. cx oder $abcx^3$. Die Summe dieser Partialproducte ist Cx^3. So geht es fort für jede folgende Gattung von Partialproducten. Zuletzt kommt das einzelne Partialproduct aus dem zweyten Theile jedes binomischen Factors. Dieses ist das Product aus allen Factoren a, b, c, etc. in x^m.

Anwendungen dieses Satzes in der combinatorischen Analysis (47), und in der Lehre von den Gleichungen. (s. Gleichung VI. 1.).

Unterschiede der Quadrate und Cuborum, deren Wurzeln in arithmetischer Progression sind.

20. Es seyn die Wurzeln a; $a + d$; $a + 2d$, so sind die Quadrate I. a^2. II. $a^2 + 2ad + d^2$. III. $a^2 + 4ad + 4d^2$. Die Unterschiede der Quadrate sind I. $2ad + d^2$. II. $2ad + 3d^2$. De zweyte Unterschied ist $= 2d^2$, unveränderlich, was auch a für einen Werth hat.

21. Die Wurzeln seyn a; $a + d$; $a + 2d$; $a + 3d$, so sind die Cubi I. a^3. II. $a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3$. III. $a^3 + 6a^2d + 12ad^2 + 8d^3$. IV. $a^3 + 9a^2d + 27ad^2 + 27d^3$. Die ersten Unterschiede sind I. $3a^2d + 3ad^2 + d^3$. II. $3a^2d + 9ad^2 + 7d^3$. III. $3a^2d + 15ad^2 + 19d^3$. Die zweyten Unterschiede sind I, $6ad^2 + 6d^3$. II. $6ad^2 + 12d^3$. Der dritte Unterschied ist $6d^3$, unveränderlich, was auch a für einen Werth hat.

IV. Division.

22. Die Division eintheiliger Grössen kann nur angedeutet werden, als $\frac{a}{b} = Q$, wo a der Dividendus, b der Divisor, Q der Quotient ist. Wenn beide einen gemeinschaftlichen Factor haben, so läßt man diesen weg, als $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = Q$. Auch den Quotienten mehrtheiliger Grössen kann man vollständig nicht anders als auf die erste Art ausdrucken, wenn sie keinen gemeinschaftlichen Factor haben, oder der Divisor nicht selbst ein Factor des Dividendus ist. Also ist $\frac{a + b}{c - d}$ der einzige vollständige Ausdruck des Quotienten von $a + b$ durch $c - d$ dividirt.

23. Um zu erfahren, ob der Divisor ein Factor des Dividendus sey, oder auch, um den Quotienten als ein Aggregat behandeln, und mit andern Größen verbinden zu

können, stellt man die Division auf dieselbe Art, wie für Zahlen, an. Man ordne Dividendus und Divisor nach den Potenzen einer Größe, und dividire den ersten Theil des Dividendus D durch den ersten Theil des Divisors d, so erhält man den ersten Theil q des Quotienten Q. Das Product q in den ganzen Divisor d wird von D abgezogen. Finden sich in jenem Theile, die nicht in diesem vorhanden sind, so setze man sie zu D mit beiden entgegengesetzten Vorzeichen, als wodurch D nicht geändert wird. Nun kommt der abzuziehende Theil mit entgegengesetzten Vorzeichen in den Rest. Der erste Theil des Restes durch den ersten Theil des Divisors dividirt, giebt den zweyten Theil q^1 des Quotienten Q. So fährt man fort, bis entweder o zum Reste kommt, oder bis man es schicklich findet abzubrechen, und den Rest mit dem Divisor dividirt, zuzufügen, vielleicht auch unter gewissen Bedingungen wegzulassen. Es ist zu merken, daß der Quotient auch subtrahirte Theile enthalten kann. Hat der erste Theil eines Restes das Vorzeichen —, so bekommt es der zugehörige Theil von Q auch. Es zeigt an, daß der Quotient, so weit er gefunden worden, zu groß ist. Das Product aus dem Divisor in jeden Theil des Quotienten muß sich in dem Dividendus finden, es sey nun, daß es ursprünglich da war, oder auf die vorher gewiesene Art hineingebracht ist. In dem letztern Falle heben sich bey der Multiplication des Divisors in den Quotienten, einige Theile, die daher in dem Dividendus nicht erscheinen, bey der Division aber hineingebracht werden. Als Beyspiel nehme man selbst das obige Product in (17.), und dividire es durch einen der Factoren, so wird der Quotient der andere Factor.

24. Es wird durch die Division gefunden:

$$\text{I. } \frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b} \cdot \frac{x}{b} + \frac{a-b}{b} \cdot \frac{x^2}{b^2} - \frac{a-b}{b} \cdot \frac{x^3}{b^3} + \frac{a-b}{b} \cdot \frac{x^4}{b^4} - \text{etc.}$$

Die erste Reihe dient, wenn $\frac{x}{b}$ ein ächter Bruch ist, die andere, wenn $-\frac{b}{x}$ ein solcher Bruch ist. Denn in dem ersten Falle würde die zweite Reihe nicht convergiren, in dem zweiten nicht die erste.

25. Wenn in dem Dividendus und Divisor eine oder mehrere der Theile negativ werden (ihr Vorzeichen ändern), so geschieht dies auch in dem Quotienten. So ist

$$\frac{a-x}{b-x} = \frac{a}{b} + \frac{a-b}{b} \cdot \frac{x}{b} + \frac{a-b}{b} \cdot \frac{x^2}{b^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{x+a}{x-b} = 1 + \frac{a+b}{x} + \frac{b(a+b)}{x^2} + \text{etc.}$$

26. Es ist

I. $$\frac{a}{1+x} = a - ax + ax^2 - ax^3 + ax^4 - \text{etc.}$$

II. $$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \text{etc.}$$

III. $$\frac{a}{x-1} = a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \text{etc.}\right)$$

IV. $$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots + b^{n-1}$$

V. $$\frac{a^n \pm b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots \pm b^{n-1}$$

Die vierte dieser Formeln kann zur Erläuterung der Differentialrechnung gebraucht werden. Je näher a und b sich kommen, desto näher kommt $\frac{a^n - b^n}{a-b}$ dem Werthe na^{n-1}. Die Glieder aller dieser Reihen, absolut genommen, machen eine geometrische Reihe aus.

$$\text{II. } \frac{x+a}{x+b} = 1 + \frac{a-b}{x} - \frac{b(a-b)}{x^2} + \frac{b^2(a-b)}{x^3} - \frac{b^3(a-b)}{x^4} + \text{etc.}$$

V. Leichtere und allgemeinere Art der Division.

27. Da der Quotient nach den Potenzen derselben Grössen fortschreitet, nach welchen Dividendus und Divisor geordnet sind, so nehme man für den Quotienten die Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. an, wenn jene diese Form haben, und bestimme die Coefficienten A, B, C, D, etc. mittelst der Gleichheit des Dividendus und des Products aus Divisor und Quotienten. Es sey allgemein

$$\begin{aligned} \text{Dividendus} &= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.} \\ \text{Divisor} &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.} \\ \text{Quotient} &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Nun ist $(\alpha + \beta x + \text{etc.})(A + Bx + \text{etc.}) = a + bx +$ etc. Entwickelt man jenes Product, so entsteht eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe, die mit der Reihe $a + bx + cx^2 +$ etc. identisch seyn muß, damit die Gleichheit nicht von x abhangen, als welches jeden Werth muß erhalten können, (s. auch Methode der unbestimmten Coefficienten). Die Coefficienten derselben Potenzen sind daher in beiden Reihen gleich. Dies giebt nun die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= \alpha A \\ b &= \alpha B + \beta A \\ c &= \alpha C + \beta B + \gamma A \\ d &= \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A \\ e &= \alpha E + \beta D + \gamma C + \delta B + \varepsilon A \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man nun aus der ersten Gleichung den Werth von A, aus der zweyten den Werth von B, u. s. f. in die folgenden Gleichungen, so wird

$\alpha A = a$

$\alpha^2 B = \alpha b - \beta a$

$\alpha^3 C = \alpha^2 c - \alpha (\beta b + \gamma a) + \beta^2 a$

$\alpha^4 D = \alpha^3 d - \alpha^2 (\beta c + \gamma b + \delta a)$

$\qquad + \alpha (\beta^2 b + 2 \beta \gamma a) - \beta^3 a.$

$\alpha^5 E = \alpha^4 e - \alpha^3 (\beta d + \gamma c + \delta b + \varepsilon a)$

$\qquad + \alpha^2 (\beta^2 c + 2 \beta \gamma b + (2 \beta \delta + \gamma^2) a)$

$\qquad - \alpha (\beta^3 b + 3 \beta^2 \gamma a) + \beta^4 a.$

etc.

Das Gesetz der Formation ist faßlich und sehr harmonisch. Wenn die Coefficienten durch ihre Stellen bezeichnet werden,

	1,	2,	3,	4,	5,	etc.
I.	a,	b,	c,	d,	e,	etc.
II.	α,	β,	γ,	δ,	ε,	etc.
III.	A,	B,	C,	D	E,	etc.

so enthält das Product das mten Coefficienten aus der Reihe III. im α^m alle diejenigen Combinationen von je einem Coefficienten aus I. in m — 1 Coefficienten aus II. verschiedene oder nicht verschiedene, in welchen die Summe der Stellenzahlen dieselbe, und = 2m —, ist. Die gleichen Combinationen sind so oft vorhanden, als sich die Coefficienten aus II. mit Ausschließung des ersten α darin versetzen lassen. Die Glieder, wenn sie nach den mit ihnen verbundenen Potenzen von α geordnet werden, haben abwechselnde Vorzeichen. So enthält z. B. α^5 E die Combinationen von 5 Größen, deren eine aus I. die andern 4 aus II. genommen sind. Die Summe der Stellenzahlen ist = 9. Da $\beta\gamma$ sich zweymahl versetzen läßt so hat die Combination $\alpha^2 \beta \gamma b$ den numerischen Factor 2. Die Combination, $3 \alpha \beta^2 \gamma a$ hat den Factor 3, weil $\beta^2 \gamma$ sich dreymahl versetzen läßt.

28. Zum Beyspiele dient der Quotient eines Sinus dividirt durch den Cosinus, wenn beide durch den zugehöri-

gen Winkel ausgedruckt werden, der Quotient ist die Tangente desselben Winkels durch diesen ausgedruckt; s. Cyklometrie, und Bernoullische Zahlen.

Die hier gewiesene Methode gehört zu der Anwendung der Lehre von den Combinationen. S. combinatorische Analysis.

VI. Bruchrechnung.

29. Es ist I. $a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$

II. $a-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$

III. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

IV. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

V. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

VI. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

Die Beweise sind in dem Artikel: Bruchrechnung, anzutreffen.

Aus dem Satze von der Zusammensetzung zweyer Verhältnisse werden die Formeln V. VI. sehr gut hergeleitet. Es ist $1:\frac{a}{b}=b:a$, weil $1=\frac{b}{b}$ ist. Gleichfalls ist $1:\frac{c}{d}=d:c$. Folglich ist $1:\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=bd:ac$ oder $1:\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=1:\frac{ac}{db}$. Da die vorhergehenden Glieder der beiden Verhältnisse gleich sind, so sind es die nachfolgenden auch.

Ferner ist zuerst $\frac{a}{b} : = a : b$, und $1 : \frac{c}{d} = d : c$;

also $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$; oder $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} : 1$

das ist, der Quotient von $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ ist $= \frac{ad}{bc}$.

C.

Canon ist erstlich eine allgemeine Regel zur Auflösung einer geometrischen oder algebraischen Aufgabe in allen ähnlichen und verwandten Fällen. In dieser Bedeutung kommt das Wort meistens nur bey ältern Schriftstellern vor. Die Neuern gebrauchen die Ausdrücke: Regel, Vorschrift, Formel, Methode.

Zweytens ist Canon eine Tafel berechneter Größen in einer bestimmten Fortschreitung, als eine Sammlung von einzelnen Vorschriften. Z. B. Canon naturalis triangulorum, d. i. die Tafel der trigonometrischen Linien; Canon artificialis triangulorum, die Tafel ihrer Logarithmen; Canon sexagenarius s. hexacontadon, eine zur Multiplication sechszigtheiliger Brüche eingerichtete Tafel; Canon Logarithmorum. Auch von astronomischen Tafeln wird in ältern Zeiten die Benennung Canon gebraucht, als in den Prutenicis tabulis coelestium motuum auct. Er. Reinholdo, Vitemb. 1585, worin die Tafeln die Überschrift Canon haben, als Canon ascensionum rectarum; canones aequalium motuum et prostaphaereseon, etc.

Was Canon in der theoretischen Musik, und Canon paschalis in der Chronologie bedeuten, wird in der zweyten Abtheilung dieses Werks vorkommen.

Canonion, einerley mit Canon, nur etwa von geringerm Umfange. In den gleich vorher angeführten Prutenischen Tafeln kommen ein paar Täfelchen vor, die

die Ueberschrift, Canonion führen. In einem seltenen trigonometrischen Werke von Vieta (varia opera mathematica, Paris. 1579 u. 1609. Fol.) kommt eine ausführliche Tafel für rechtwinklichte Dreyecke mit rationalen Seiten vor, welche mit Canonion überschrieben ist, da die Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten in demselben Werke die Benennung, Canon, hat.

Canonisch ist, was zur Regel gebraucht wird. Harriot nennt aequatio canonica diejenige, worin die Formation der Coefficienten aus den Wurzeln der Gleichung sichtbar ist, weil sie zur Vergleichung mit einer gegebenen Gleichung dient. Die Analogien zur Berechnung eines rechtwinklichten Dreyecks, geradlinichten oder sphärischen, nennt Vieta in dem gleich vorher angeführten Werke analogias canonicas.

Capacität ist der Inhalt eines Körpers, insbesondere eines Gefäßes, verglichen mit einem gewissen Maaße, als der Einheit für die Räume.

Capax (fassend, franz. capable) wird von einem Kreisabschnitte gesagt, so fern dieser einen gewissen Winkel faßt, dessen Scheitel nämlich in den Bogen fällt, und dessen Schenkel durch die Endpuncte des Kreisbogens gehen. Alle solche Winkel in demselben Abschnitte sind sich gleich. Abschnitte verschiedener Kreise, die einerley Winkel fassen, sind ähnlich.

Capitulum ist in der alten Algebra eine algebraische Gleichung mit gewissen Bestimmungen der Form und Zeichen. Z. B. Capitulum cubi aequalis rebus et numero ist, was wir jetzt durch die Gleichung, $x^3 = ax + b$, ausdrucken. Jeder besondere Fall gab ein Capitulum.

Cardans Regel ist eine algebraische Formel für die Wurzel einer cubischen Gleichung, wenn diese nur eine einzige mögliche Wurzel hat. Sie ist in dem Artikel Gleichung, III. 14, 15. vorgetragen. Sie sollte eigent-

lich die Regel des Tartalea heißen, s. Geschichte der Algebra in dem Artikel, Algebra.

Hier ist zu zeigen, wie diese Formel auch zur Auflösung der Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln angewandt werden kann, ungeachtet sie für diesen Fall unmögliche Größen enthält.

1. Die cubische Gleichung sey, nach weggeschafftem zweiten Gliede, wenn es vorhanden war, $x^3 - bx - c = 0$, so ist, wenn $\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{27}b^3 = A^2$ gesetzt wird.

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + A)} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - A)}$$
$$= \sqrt[3]{(A + \tfrac{1}{2}c)} - \sqrt[3]{(A - \tfrac{1}{2}c)}.$$

In dem Falle, da $\frac{1}{27}b^3 > \frac{1}{4}c^2$ ist, ist A eine unmögliche Größe; die Gleichung aber hat alsdann drey mögliche Wurzeln.

2. Um das Unmögliche in beyden Cubikwurzeln sich heben zu lassen, muß jede derselben, nach dem binomischen Lehrsatze, in eine Reihe verwandelt werden. Diesem zufolge ist (binom. Lehrs. 13.)

$$\sqrt[3]{(1 \pm z)} = 1 \pm \tfrac{1}{3} z - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} z^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} z^3$$
$$- \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} z^4 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15} z^5 - \text{etc.}$$

3. Man bezeichne die numerischen Werthe der Coefficienten, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, durch 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, etc.; so daß $\sqrt[3]{(1 \pm z)} = 1 \pm \mathfrak{A} z^1 - \mathfrak{B} z^2 \pm \mathfrak{C} z^3 - \mathfrak{D} z^4 \pm \mathfrak{E} z^5 - \text{etc.}$

Die Coefficienten mit ihren Logarithmen sind, jene bis auf die zehnte Decimalstelle.

Coefficienten		Logarithmen
𝔄 = 0, 333333	3333	9, 5208787
𝔅 = 0, 111111	1111	9, 0457575
ℭ = 0, 061728	3951	8, 7904850
𝔇 = 0, 041152	2634	8, 6143937
𝔈 = 0, 030178	3265	8, 4796952
𝔉 = 0, 023472	0317	8, 3705507
𝔊 = 0, 019001	1685	8, 2787804
ℌ = 0, 015834	3071	8, 1995990
ℑ = 0, 013488	4838	8, 1299632
𝔎 = 0, 011690	0193	8, 0678152

4. Es sey A^2 negativ, weswegen man setze $A = Q\sqrt{-1}$. Um convergirende Reihen zu erhalten, hat man die beiden Fälle, da $\frac{1}{2}c$ größer, und da es kleiner als Q ist, zu unterscheiden. Es sey zuerst $\frac{1}{2}c$ größer als Q. Man setze $\frac{2Q}{c} = B$, so wird aus der Formel,

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + Q\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - Q\sqrt{-1})}, \text{ diese,}$$

$$= \left(\sqrt[3]{(1 + B\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(1 - B\sqrt{-1})}\right)\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c}.$$

Bey der Entwickelung der Wurzelgrößen heben sich die unmöglichen Theile; die einfach geraden Potenzen von $B\sqrt{-1}$, welche für sich das Vorzeichen — haben, erhalten in der Reihe das Vorzeichen +; dagegen die doppelt geraden in derselben das Vorzeichen — bekommen, demnach ist

$$x = 2(1 + \mathfrak{B}B - \mathfrak{D}B^4 + \mathfrak{F}B^6 - \mathfrak{H}B^8 + \text{etc.})\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c}.$$

5. Zweytens sey $\frac{1}{2}$ c kleiner als Q. Nun setze man $\frac{c}{2Q} = C$, so wird aus der Formel

$$x = \sqrt[3]{(Q\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}c)} - \sqrt[3]{(Q\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}c)}$$ diese,

$$x = \left(\sqrt[3]{(1 + \frac{C}{\sqrt{-1}})} - \sqrt[3]{(1 - \frac{C}{\sqrt{-1}})}\right)\sqrt[3]{Q\sqrt{-1}}.$$

Es ist $\sqrt[3]{Q\sqrt{-1}} = -\sqrt[3]{Q}.\sqrt{-1}$, da der zwente Theil dieser Gleichung cubirt $= Q\sqrt{-1}$ ist. Bey der Entwickelung der Wurzelgrößen bleiben bloß die Glieder, welche durch $\sqrt{-1}$ dividirt sind. Hier hebt sich die Division durch $\sqrt{-1}$ gegen die Multiplication mit $\sqrt{-1}$ in dem gemeinschaftlichen Factor auf. Demnach ist

$$x = -2(\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}C^3 + \mathfrak{E}C^5 - \mathfrak{G}C^7 + \mathfrak{J}C^9 - \text{etc.})\sqrt[3]{Q}.$$

6. Die gefundene Wurzel heiße p. Die beyden übrigen seyn q, r. Da das zweyte Glied der Gleichung fehlt, so ist $p + q + r = 0$, oder $q + r = -p$; auch ist $pq + pr + qr = -b$ (Gleichung III. 5.). Hieraus ist $qr = p^2 - b$. Demnach sind q und r die Wurzeln der quadratischen Gleichung,

$$u^2 + pu + p^2 - b = 0,$$

und $u = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(b - \frac{3}{4}p^2)}$.

7. Man setze abgekürzt $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}c + A} = m$; und $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}c - A)} = n$. so ist $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}c^2 - A^2)} = mn$, das ist $\frac{1}{3}b = mn$ (aus 1.). Auch ist $p = m + n$; folglich $b - \frac{3}{4}p^2 = 3mn - \frac{3}{4}(m + n)^2 = -\frac{3}{4}(m - n)^2$. Daher ist

$$u = -\tfrac{1}{2}(m + n) \pm \tfrac{1}{2}(m - n\sqrt{-3}.$$

Hier hebt sich in dem ersten Gliede das unmögliche durch gegenseitige Subtraction auf; in dem zweyten Gliede durch die Multiplication mit dem Factor $\sqrt{-3}$ oder $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$.

8. Es sey zuerst $\frac{1}{2}c$ größer als Q, und $\frac{2Q}{c} = B$, so ist

$$u = -(1 + \mathfrak{B}B^2 - \mathfrak{D}B^4 + \mathfrak{F}B^6 - \mathfrak{H}B^8 + \text{etc.}) \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c}$$
$$\mp(\mathfrak{A}B - \mathfrak{C}B^3 + \mathfrak{E}B^5 - \mathfrak{G}B^7 + \mathfrak{J}B^9 - \text{etc.}) \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c}$$

9. Ist $\frac{1}{2}c$ kleiner als Q, und $\frac{c}{2Q} = C$, so ist

$$u = +(\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}C^3 + \mathfrak{E}C^5 - \mathfrak{G}C^7 + \mathfrak{J}C^9 - \text{etc.}) \sqrt{Q}$$
$$\pm(1 + \mathfrak{B}C^2 - \mathfrak{D}C^4 + \mathfrak{F}C^6 - \mathfrak{H}C^8 + \text{etc.}) \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{Q}$$

10. Exempel. Es sey $x^3 - 2100x + 24000 = 0$. Hier ist $b = 2100$, und $c = -24000$; also $A^2 = -199000\,000$; $Q^2 = +199000\,000$. Da $\frac{1}{2}c$ kleiner als Q ist, so werden für x die Formeln genommen, welche den Quotienten C enthalten. Es ist $C = -\frac{24000}{2Q}$. Die Rechnung mit Hülfe der Logarithmen ist folgende.

lQ² = 8,2988531
lQ = 4,1494265
l½c = 4,0791812
lC = 9,9297547 − 10

lA = 9,52288
lC = 9,92975
= 9,45263

l𝔅 = 9,04576
lC² = 9,85951
= 8,90527

lℭ = 8,79048
lℭ³ = 9,78926
8,57974

l𝔇 = 8,61439
lC⁴ = 9,71902
8,33341

l𝔈 = 8,47969
lC⁵ = 9,64877
8,12846

l𝔉 = 8,37055
lC⁶ = 9,57853
7,94908

l𝔊 = 8,27878
lC⁷ = 9,50828
7,78706

lℌ = 8,19960
lC⁸ = 9,43804
7,63764

lℑ = 8,12996
lC⁹ = 9,36779
7,49775

AC = − 0,28355	+ 1 = + 1,000000
− ℭC³ = + 0,03799	+ 𝔅C² = + 0,080403
+ 𝔈C⁵ = − 0,01344	− 𝔇C⁴ = − 0,021548
− 𝔊C⁷ = + 0,00612	+ 𝔉C⁶ = + 0,008893
+ ℑC⁹ = − 0,00314	− ℌC⁸ = − 0,004341
Aggregat = − 0,25602 = F	Aggregat + 1,08829 = G
lF = 9,40827	lG = 0,02670
⅓ lQ = 1,38314	l√3 = 0,23856
l2 = 0,30103	⅓ lQ = 1,38314
lp = 1,09244	lH = 1,64840
p = + 12,372	H = 44,504

Die eine Wurzel der Gleichung ist $p = + 12,372$; die beiden andern sind $- 6,186 \pm 44,504$, oder $q = + 38,318$, und $r = - 50,690$. Die Summe der drey Wurzeln ist $= 0$, wie es seyn muß, aber ihr Product ist $= 24030,6$ statt 24000. Denn der gefundene Werth von p ist etwas zu groß, weil in dem Factor F das nächstfolgende subtractive Glied weggelassen ist. Dieser nähert sich in dem Exempel dem völligen Werthe nur langsam.

Die Rechnung ist in dem vorgelegten Falle mühsam, und liefert die Wurzeln nur zwischen den Zehn- und Hundertheilen. Die Methode sie aus einer Reihe von Werthen der Gleichung zu finden, würde noch mühsamer seyn. Bey Gleichungen mit großen Coefficienten ist die Cardanische Regel brauchbarer. Inzwischen ist die Berechnung durch die trigonometrische Dreytheilung eines Winkels am leichtesten, s. die Auflösung dieser Gleichung in dem Artikel: Anwendung der Geometrie auf die Algebra. S. 154.

11. Die Cubikwurzel aus einer möglichen Größe, a^3, hat einen möglichen und zwey unmögliche Werthe, welche zusammen die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 - a^3 = 0$ sind. Sie sind I. a; II. $-\frac{1}{2} a (1 + \sqrt{-3})$; III. $-\frac{1}{2} a (1 - \sqrt{-3})$, s. Cubikwurzel. Ist a^3 selbst eine unmögliche Größe, so sind alle drey Cubikwurzeln aus derselben unmöglich, und eine so gut wie die andere als Cubikwurzel der unmöglichen Größe anzusehen. Die unmögliche Größe sey $A + B\sqrt{-1}$, so haben ihre Cubikwurzeln ebenfalls die Form $P + Q\sqrt{-1}$, damit bey der Cubirung ein möglicher und ein unmöglicher Theil entstehe. Man bezeichne eine der Wurzeln durch $P + Q\sqrt{-1}$, so sind die andern $= -\frac{1}{2} (P + Q\sqrt{-1}) (1 + \sqrt{-3})$. Der Cubus jeder der drey Wurzeln ist $P^3 + 3P^2 Q\sqrt{-1} - 3PQ^2 - Q^3\sqrt{-1}$, so daß $P^3 - 3PQ^2 = A$, und $3P^2 Q - Q^3 = B$ ist. Daher sind die Cubikwurzeln aus $A - B\sqrt{-1}$ die drey: $P - Q\sqrt{-1}$, und $-\frac{1}{2} (P - Q\sqrt{-1}) (1 \pm \sqrt{-3})$.

Folglich hat die Summe der beiden Cubikwurzeln, $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}$ neuen Werthe, weil je eine der drey Wurzeln des ersten Theils mit je einer der drey Wurzeln des zweyten verbunden werden kann. Von diesen neun Combinationen sind drey mögliche Grössen, nämlich

$$P+Q\sqrt{-1} \text{ mit } P-Q\sqrt{-1}$$

$$-\tfrac{1}{2}(P+Q\sqrt{-1})(1+\sqrt{-3}) \text{ mit } -\tfrac{1}{2}(P-Q\sqrt{-1})(1-\sqrt{-3})$$

$$-\tfrac{1}{2}(P+Q\sqrt{-1})(1-\sqrt{-3}) \text{ mit } -\tfrac{1}{2}(P-Q\sqrt{-1})(1+\sqrt{-3}),$$

welche zur Summe geben: I. $2P$; II. $-P+Q\sqrt{3}$; III. $-P-Q\sqrt{3}$.

Hier ist $2P$ die vorher gefundene durch p bezeichnete Wurzel, und Q der zweyte Theil von u durch $\sqrt{3}$ dividirt.

12. Leibnitz hat zwar schon bemerkt, daß bey der Ausziehung der Cubikwurzel aus den beiden Theilen der Cardanischen Formel, vermittelst einer unendlichen Reihe, das Unmögliche sich aufheben müsse, (in einem Briefe an Wallis, 1698, Opp. III, p. 126.); aber Nicole wird der erste seyn, der die Rechnung ausgeführt hat, in den Mem. de l' Acad. des Sc. 1738, 1741 und 1743. Sein Vortrag ist nicht faßlich. Er bemerkt nicht, daß die Wurzelreihen auf zweyerley Art dargestellt werden müssen, um in dem einen oder dem andern Falle eine annähernde Reihe zu erhalten. Die praktischen Hülfsmittel, welche in diesem Artikel gegeben sind, fehlen bey ihm. In den Mémoires 1744 ist noch eine Abhandlung von Nicole enthalten, worin er den cubischen Gleichungen zwey Formen giebt, die zu einer schnellen Näherung dienen. Sie erfordern aber auch mehrere Versuche.

13. Diese Formen sind

$$x^3 - px + n\sqrt{(p+n)} = 0$$

$$x^3 - \frac{rx}{\sqrt[3]{(q+r)}} + q = 0.$$

Die Wurzeln der ersten Gleichung sind: I. $-\sqrt{(p+n)}$; II. $+\frac{1}{2}\sqrt{(p+n)} + \frac{1}{2}\sqrt{(-3n)}$; III. $+\frac{1}{2}\sqrt{(p+n)} - \frac{1}{2}\sqrt{(p-3n)}$. Die Wurzeln der zweyten Gleichung sind, I. $-\sqrt[3]{(q+r)}$;

II. $+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(q+r)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-3q}{\sqrt[3]{(q+r)}}}$;

III. $+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(q+r)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-3q}{\sqrt[3]{(q+r)}}}$.

Diese Formen sind hier angeführt, um eine Übung in der Formation der Coefficienten aus den Wurzeln zu veranlassen. Das erste Verfahren von Nicole durch Auflösung der Formel in zwey Reihen findet man in Clairauts Algebra, V. Th. Bey dem zweyten Verfahren wird nach der ersten Form eine Zahl n durch eine positio falsi gesucht, daß das gegebene Glied der Gleichung die Form $n\sqrt{(p+n)}$ völlig genau oder nahe genug bekomme. Nach der andern Form ist eine Zahl r zu finden, so daß der Coefficient von x die Form $\frac{r}{\sqrt[3]{(q+r)}}$ erhalte.

14. In Kästners Analysis endl. Größen §. 699. ff. ist umständlich gezeigt, wie die Cardanische Formel drey mögliche Wurzeln liefern könne. Die daselbst §. 718

getadelte Bemerkung Newtons möchte doch gerechtfertigt werden können. Ein möglicher algebraischer Ausdruck der Wurzel einer Gleichung durch die Coefficienten derselben kann nicht mehrere mögliche Werthe haben, wenn nicht etwa Wurzeln mit einem geraden Exponenten darin vorkommen; und doch sollte er, wenn mehrere mögliche Wurzeln vorhanden sind, eine so gut als die andere angeben. Darum erhält der Ausdruck eine unmögliche Form, als bey welcher eine Vieldeutigkeit Statt hat. Die Gleichung selbst ist auch ein Ausdruck für die Wurzeln, aber eine functio implicita.

15. In den neuern Zeiten noch hat man sich, in der That unnöthiger Weise, viel mit der Cardanischen Regel in dem Falle dreyer möglichen Wurzeln beschäftigt.

A method of extending Cardan's Rule for resolving one case of a cubick equation ... to the other case, called the irreducible. By Fr. Maseres. Phil. Transf. 1778.

Sul quesito analitico proposito dall' Academia di Padova ... differt. di Pietro Cossali. Verona. 1782.

Della possibilità della reale Solutione analytica del case irreducibile, riflessioni dell' Arciprete Nicolai. Padova. 1783.

Mem. sur la regle de Cardan, par de Castillon. Mem. de Berlin. 1783.

Osservazione del Signor Sebast. Canterzani sul Valor Cardanico - - in occasione d'essere uscito un foglio anonimo, che propone una maniera di redurre il caso irreducibile. In Bologna 1787.

Cardioide eine Linie der vierten Ordnung, von einer herzförmigen Gestalt. Ihre Entstehungsart ist folgende. Über der Linie AB (Fig. 60. Tab. IV.) sey ein Kreis beschrieben. In diesem ziehe man irgend eine Chorde AN, und verlängere sie nach beiden Seiten, nehme darauf NM = AB, und Nm = AB, so sind M, m Puncte der Cardioide.

Die Gleichung für die krumme Linie ist leicht gefunden. Es sey MP senkrecht auf die Absissenlinie AD. Von dem Endpuncte B des Durchmessers des Kreises auf der Absissenlinie ziehe man BN nach dem Puncte N, so so ist das Dreyeck ANB dem APM ähnlich, und es ist AB : AN = AM : AP. Es sey AB = a; AP = x; PM = y; AM = z, so ist a : z — a = z : x, also $z - az = ax$, oder $z^2 - ax = az$. Beide Theile quadrirt geben die Gleichung $z^4 - 2axz^2 + a^2x^b = a^2z^2$. Da $z^2 = z^2 + a^2x^2$, so entsteht aus jener Gleichung diese:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2ax^3 - 2axy^2 - a^2y^2 = 0.$$

oder

$$y^4 - (a^2 + 2ax - 2x^2)y^2 - 2ax^3 + x^4 = 0.$$

Für den Punct m auf der andern Seite von A wird in dieser Gleichung x negativ. Setzt man die Abscisse Ap = u, so ist a : a — z = z : u, und daher durch eine ähnliche Rechnung

$$u^4 + 2u^2y^2 + y^4 2au^3 + 2au^2 - a^2y^2 = 0,$$

welche Gleichung aus der obigen entsteht, wenn a = — x gesetzt wird.

Man ziehe durch den Mittelpunct C des Kreises ANBA die Parallele CE mit AM, nehmen CF = AB = NM, und ziehe CN, FM, so ist FM parallel mit CN, und ihr gleich, und der Punct M der Cardioide liegt auf dem Umfange des aus F als Mittelpunct beschriebenen, dem Kreise ANBA gleichen Kreises GnMG. Dieser berührt jenen in dem Puncte G, welcher CF halbirt. Der W. EFM ist gleich dem W. GCN = CNA. Da der W. BCN = 2 CNA, so ist W. BCG = GCN, also W. BCG = EFM, und W. ACG = GFM, daher der Bogen ANG = MnG. Die Cardioide ist also eine Epicykloide, welche durch die Wälzung eines Kreises auf einem ihm gleichen von einem Puncte auf dem Umfange jenes beschrieben wird. — Man kann sie auch als eine Verwandte der Conchoide ansehen, da eine gegebene gerade Linie auf einem Kreise, so wie bey der Conchoide auf einer geraden Linie fortgeführt wird, indem zugleich ihre Verlängerung durch einen gegebenen Punct geht.

Es sey L der Punct auf dem Bogen AH, dessen Abstand von der auf AB senkrechten Chorde AH am größten ist, und l ein solcher Punct auf dem Bogen Ah. Die zugehörige Abscisse sey AK. In den Puncten L, l werden zwey Ordinaten einander gleich, die für kleinere AK ungleich sind. Daher hat die Ordinate y hier zwey gleiche positive Werthe, und eben so zwey gleiche, eben so große, negative Werthe, also hat y^2 einen einfachen Werth. Dieser sey $= A$, so daß $q^2 - A = 0$, also $q^4 - 2 A q^2 + A^2 = 0$ ist. Die Vergleichung mit der Gleichung für y giebt $A = \frac{1}{2} (a^2 + 2 ax - 2 xx$, und $A^2 = x^4 - 2 ax$; also $\frac{1}{4} (a^2 + 2 ax - 2 xx)^2 = x^4 - 2 ax^3$. Daraus wird $x = - \frac{1}{4} a$. Dieser Werth in die Gleichung zwischen x und y gesetzt, verwandelt sie in diese, $y^4 - \frac{3}{8} a^2 y^2 + \frac{9}{256} a^4 = 0$, woraus folgt $y^2 \frac{3}{16} = a^2$, und $y = \pm \frac{1}{4} a \sqrt{3}$.

Die krumme Linie hat in A eine Spitze oder einen Rückkehrpunct, da die beiden Bögen HLA, hlA in A zusammen kommen, ohne weiter fortgesetzt zu werden, sondern in einander übergehen. Sie müssen hier eine gemeinschaftliche berührende haben, die, weil die Abscissenlinie die Curve in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, die Abscissenlinie selbst ist. Die Rechnung zeigt dieses folgendergestalt.

Die Tangente des Winkels einer krummen Linie oder ihrer berührenden mit der Ordinate ist $=\frac{dx}{dy}$. (berührende Linie, 14.). Aus der Gleichung für unsere Curve folgt

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{2x^2y+2y^3-2axy-a^2y}{2x^3+2xy^2-3ax^2-ay^2}.$$

Nimmt man $x=0$, so ist sowohl $y=a$, als $y=0$. Für $y=a$ ist $\frac{dx}{dy}=1$. Die Curve macht in H, h, wo HAh senkrecht auf AB ist, einen halben rechten Winkel mit der Ordinate. Für $y=0$ ist $\frac{dx}{dy}=\frac{0}{0}$, welches an sich unbestimmt ist. Man setze in dem Werthe von $\frac{dx}{dy}$ den Zähler $=Q$, den Nenner $=P$, so daß $\frac{dx}{dy}=-\frac{Q}{P}$ sey. In dem angeführten Artikel, (24.) ist gezeigt, daß wenn für ein Paar Coordinaten $P=0$ und $Q=0$ wird, der Quotient $\frac{Q}{P}$ den Werth $\frac{dQ}{dP}$ erhält, in welchem nun für die Coordinaten diejenigen Werthe zu

setzen sind, wodurch P und Q Null werden. Diese sind hier $x = o$, und $y = o$. Dividirt man Zähler und Nenner durch dy, um statt der Differentiale ihre Quotienten einzuführen, und setzt $\frac{dx}{dy} = p$, so ist $p = -\frac{o \times p - aa}{o \times p}$. Daher kann p keinen endlichen Werth haben, auch nicht o seyn, sondern ist unendlich groß. Die krumme Linie macht also in A mit der auf AB senkrechten einen rechten Winkel, und wird also von AB berührt.

Carre' hat über diese Linie einen Aufsatz in den Mem. de l'Acad. des Sc. 1705 geliefert. Er hat sie aber auf den Bogen AH allein eingeschränkt. Vor ihm hatte schon, wie er anführt, ein Mathematiker, Könersma, sich mit ihr beschäftigt. Den Namen Cardioide hat Castilliani der krummen Linie gegeben. Philos. Trans. 1741. Cramer hat in der Analyse des lignes courbes § 173. exemple 3. diese Linie als Beyspiel gebraucht, construirt sie aber als eine Epicykloide, und erwähnt nicht, daß seine Linie dieselbe mit der von Carre' betrachteten ist. Eben diese Linie ist die Brennlinie durch Zurückstrahlung von einem Kreise, dessen Durchmesser = 3 AB ist, wenn die Strahlen von dem Endpuncte eines Durchmessers auf denselben fallen (siehe Catacaustica, 19.). Dieses und die doppelte Construction macht sie merkwürdig.

Cassinoide, oder vielmehr Cassinische Curve, ist eine Linie vom vierten Grade, durch welche Dominicus Cassini die Bewegung der Erde um die Sonne genauer darzustellen glaubte, als es ihm durch die Keplerische Hypothese von einer Ellipse möglich schien. Die Eigenschaft dieser Linie ist, daß das Produkt oder Rechteck von zwey Linien, die aus zwey gegebenen Puncten an einen Punct der Curve gezogen werden, unveränderlich ist, statt daß in der Ellipse ihre Summe eine gegebene Größe hat.

Diese krumme Linie kann sehr verschiedene Gestalten haben, erstlich eine längliche, nach Art einer Ellipse, zweytens eine längliche mit einer gegen die Axen convexen Einbeugung oberhalb und unterhalb des Mittelpunctes; drittens eine wie die Ziffer 8 geschlungene Figur; viertens kann sie aus zwey abgesonderten Ovalen bestehen; ja sie kann sich in zwey einzelne Puncte zusammen ziehen. Diese Mannigfaltigkeit der Gestalt macht diese Linie schon untauglich, um durch eine regelmäßige Kraft beschrieben werden zu können. Sie ist auch von den Astronomen gar nicht beachtet worden. Cassini war nur darauf gefallen, weil er Keplers Hypothese nicht recht gefaßt hatte. Die krumme Linie ist von einigen sehr ungriechisch Cassinoide genannt. Dies bedeutet eine Linie, die dem Cassini ähnlich ist. — Elémens d'Aſtronomie par Caſſini: p. 149. Montucla hiſtoire des Mathématiques. T. II. p. 563. nouv. edit.

Caſus irreducibilis tertii gradus, oder schlecht hin caſus irreducibilis ist der Fall, da eine cubische Gleichung drey mögliche Wurzeln hat, weil die Formel, welche eine einzige mögliche Wurzel zwar in irrationalen Ausdrücken, aber doch vollständig angiebt, in jenem Falle mit unmöglichen Größen vermengt ist. S. Cardans Regel.

Catacauſtica ist die Brennlinie durch Zurückstrahlung. In dem Artikel, Brennlinie, ist die Beschaffenheit dieser Gattung von Linien erklärt, auch ist die Construction der Catacauſtica für den Kreis gewiesen. Hier ist die Absicht, eine allgemeine Methode und Formel zu ihrer Erfindung anzugeben.

I. Brennlinie für parallele Strahlen.

1. Es ist LMNO (Fig. 61. Tab. IV.) ein Bogen einer krummen Linie, AX die Absscissenlinie, auf welche die Ordinaten MP, NQ senkrecht sind. Die Normalen MR, NR schneiden sich in R; die zurückgeworfenen MS, NS in S. Die Ordinate NQ wird von MR in m, von MS in n geschnitten. Es ist $MRN = MmN - mNR = PMR - QNR$, und $MSN = MnN - nNS = PMS - QNS$. Da $PMS = 2\,PMR$, und $QNS = 2\,QNR$, so ist $MSN = 2\,MRN$.

2. Aufgabe. Die allgemeine Gleichung für die Catacaustica der Parallelstrahlen zu finden.

I. Es sey (Fig. 61. Tab. IV.) $Ap = x$, $PM = y$, die Normale schneide die Absscissenlinie in H, so ist die Subnormale $PH = \frac{ydy}{dx}$ (berührende Linie 42.). Man setze $\frac{dy}{dx} = p$, so daß $PH = py$, und $\tang PMH = p$ ist. Der zurückgeworfene Strahl schneide die Absscissenlinie in V; so ist $PMV = 2\,PMH$, also $\tang PMV = \frac{2p}{1-pp}$ (Goniom. 46.). Folglich ist $PV = \frac{2py}{1-pp}$.

II. Es sey ST senkrecht auf die Absscissenlinie, und $AT = t$; $TS = u$. Nun ist $PM : PV = TS : TV$ und daher $PM : PV = PM - TS : PV - TV$, das ist $1 - pp : 2p = y - u : t - x$, also $(1 - pp)(t - x) = 2p\,(y - u)$.

III. Wenn S ein Durchschnitt irgend zweyer Strahlen MS, NS ist, so darf man für x und p irgend zwey zusammengehörige $x + \Delta x$ und $p + \Delta x$ setzen, ohne t und u zu verändern. Soll aber S ein Punct der Brennlinie seyn, so müssen die Veränderungen von x und p kleiner als jede angebbare Größe gedacht werden, das ist, die Gleichung muß differentiirt werden, so aber, daß t und u ungeändert bleiben. Nach diesem Verfahren ist

$$-2p(t-x)dp-(1-pp)dx = 2(y-u)dp + 2pdy.$$

IV. Für dy setze man pdx, und für $y - u$ seinen Werth aus der Gleichung in (II.), so wird erhalten

$$t-x = -\frac{pdx}{dp}, \text{ so daß}$$

$$t = x - \frac{pdx}{dp},$$

wo dp für den Fall der Figur negativ ist, das ist, die zweyten Unterschiede der y abnehmen, und die Curve gegen die Abscissenlinie concav ist.

V. Ferner ist, wenn für $t - x$ sein Werth aus (II,) gesetzt wird,

$$y-u = -\frac{(1-pp)dx}{2dp}, \text{ so daß}$$

$$u = y + \frac{(1-pp)dx}{2dp}.$$

VI. Aus der Gleichung zwischen x und y wird der Werth von p, und daraus der von $\frac{dp}{dx}$ erhalten. Aus den beyden Gleichungen für t und u, und der Gleichung zwischen x und y werden die beyden Größen x und y heraus-

geschafft, wodurch die Gleichung zwischen t und u hervorgeht. Dieses Verfahren aber ist mühsam. Bequemer werden die Werthe von t und u durch die zugehörigen x und y bestimmt.

3. Die berührende an der Brennlinie KSk in S ist der zurückgeworfene Strahl MSV.

Denn der Winkel der berührenden mit der Ordinate nach der Seite, auf welcher der Anfang der Abscissen liegt, hat zur Tangente den Quotienten $\frac{dt}{du}$ (berührende Linie, 14.). Nun ist aus (2. IV. und V.), wenn dx constant ist, $dt = \frac{pdxd^2p}{dp^2}$, und $du = -\frac{(1-pp)dxd^2p}{2dp^2}$; also $\frac{dt}{du} = -\frac{2p}{1-pp}$. Das Verneinungszeichen zeigt an, daß der Winkel der berührenden mit TS nach A hin stumpf ist, wenn nämlich $p < 1$ ist, wie in dem Falle für unsere Rechnung, worin PMV spitz ist. Also ist die Tangente dieses Winkels nach TX hin $= + \frac{2p}{1-pp}$.

Nun ist tang TSV $= \frac{TV}{TS} = \frac{PV-PT}{TS}$, und PV − PT $= \frac{2py}{1-pp} - (t-x) = \frac{2p}{1-pp}\left(u - \frac{(1-pp)dx}{2dp}\right.$ $\left. + \frac{pdx}{dp}\right) = \frac{2pu}{1-pp}$. Demnach ist tang TSV $= \frac{2p}{1-pp}$. Folglich ist TSV der Winkel der berührenden mit TS, und MSV die berührende an der Brennlinie in S.

Es ist $MS = -\frac{(1+pp)\,dx}{2\,dp}$. Denn MS^2

$= (t-x)^2 + (y-u)^2 = \frac{p^2\,dx^2}{dp^2} + \frac{(1-pp)^2\,dx^2}{4\,dp^2}$

$= \frac{(1+pp)^2\,dx^2}{4\,dp^2}$. Die Wurzel MS bekommt das Vorzeichen $-$, weil $\frac{dx}{dp}$ negativ ist, da die zurückwerfende Linie gegen die Absciſſenlinie hohl seyn soll. Dadurch wird MS, wie der Halbmesser der Krümmung MR, positiv.

5. Es sey s der Bogen der Brennlinie von irgend einem Puncte K angenommen bis zu S, so ist

$$ds = \frac{(1+pp)\,dx^2\,dp}{2\,dp^2}.$$

Denn es ist $ds = \frac{dt}{\sin TSV}$, und $\sin TSV$

$= \frac{\tang TSV}{\sec TSV}$. Nun ist $\tang TSV = \frac{2p}{1-pp}$,

und $\sec TSV^2 = \frac{4pp}{(u-pp)^2} + 1 = \frac{(1+pp)^2}{(1-pp)^2}$,

also $\sin TSV = \frac{2p}{1+pp}$, und $ds = \frac{1+pp}{2p}\,dt$.

Da $dt = \frac{p\,dx\,d^2p}{dp^2}$, so ist $ds = \frac{(+pp)\,dx\,dp^2}{2\,dp^2}$.

6. Es ist der Bogen der Brennlinie $s = MS + PM - Const$, wo die beständige Größe die Summe der Ordinate an der zurückwerfenden Linie, und des zurückgeworfenen Strahls für denjenigen Punct der Brennlinie ist,

von welchem an der Bogen derselben genommen wird.

Denn es ist $d.\mathrm{MS} = -\mathrm{p}dx + \frac{(1+\mathrm{pp})\,dx\,d^2\mathrm{p}}{2\,d\mathrm{p}^2} =$

$-dy + ds$, oder $ds = d.\mathrm{Ms} + dy$, und daher $s = \mathrm{Ms} + \mathrm{PM} - \mathrm{Const.}$, wo die Const. so bestimmt werden muß, daß in dem Anfangspuncte der Brennlinie der Werth von $s = 0$ sey.

7. Ist die Gleichung zwischen x und y eine algebraische, so ist der Bogen der Brennlinie rectificabel.

8. Der Halbmesser der Krümmung in M sey $= r$.

Es ist $r = -(1+\mathrm{pp})^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{d\mathrm{p}}$ (Krümmungskreis 2.).

Demnach ist $\mathrm{MS} = \frac{r}{2\sqrt{(+\mathrm{pp})}}$, und

$$s = \frac{r}{2\sqrt{(1+\mathrm{pp})}} + y - \mathrm{Const.}$$

9. Es sey R der Mittelpunct der Krümmung für den Punct M, und RG senkrecht auf MSV, so ist MS $= \frac{1}{2}$ MG, oder MS $= \frac{1}{2} r \cos \mathrm{RMG}$. Denn es ist

$\tan \mathrm{PMH} = \frac{dy}{dx} = \mathrm{p}$, also auch $\tan \mathrm{RMG} = \mathrm{p}$.

Daher $\cos \mathrm{RMG} = \frac{1}{\sqrt{(1+\mathrm{pp})}}$ (Goniometrie, 14.);

folglich $\mathrm{MG} = \mathrm{MR} \cos \mathrm{RMG} = \frac{r}{\sqrt{(1+\mathrm{pp})}} = 2\,\mathrm{MS}$.

10. Exempel I. Die zurückwerfende Linie sey ein Kreisquadrant BMD, dessen Halbmesser AB ist. Fig. 62.). Die Strahlen fallen parallel mit AD auf. Die Linien in der Figur behalten ihre Bedeutungen und Benennungen,

wie in der allgemeinen Figur und Rechnung. Der Halbmesser des Kreises sey $= a$. Die Gleichung für denselben ist $aa = xx + yy$. Die Differentialgleichung ist

$o = x dx + y dy$, also $p = -\frac{x}{y}$. Die Negation zeigt an, daß die positiven Ordinaten abnehmen, wenn die positiven x wachsen. Hieraus ist $dp = \frac{-y dx + x dy}{y^2}$

$= \frac{xy dy - p^2 dx}{y^3} = -\frac{aa dx}{y^3}$. Folglich $t = x$

$- \frac{xyy}{aa} = \frac{x^3}{a^2}$. Ferner ist $1 - pp = \frac{yy - xx}{yy}$, also

$u = y - \frac{yy - xx}{2yy} \cdot \frac{y^3}{aa} = \frac{(3aa - 2yy)y}{2aa}$.

II. Für gleiche aber entgegengesetzte x hat t gleiche und entgegengesetzte Werthe. Ebenfalls hat für gleiche und entgegengesetzte y die Ordinate u zwey gleiche und entgegengesetzte Werthe. Die vollständige Brennlinie besteht aus vier solchen, sich gleichen Bogen wie BSF, einem in jedem Quadranten des Kreises. Zwey gehören als Brennlinien zu den von der convexen Seite des Kreises zurückgeworfenen Strahlen.

III. Für $x = o$, und $y = a$, ist $t = o$, und $y = \frac{1}{2} a = AF$.

IV. Für kleine x ist t viel kleiner als x, da $t : x = xx : aa$ ist. Auch verändert u sich wenig für solche x, da y sich wenig verändert, und in dem Producte $(3aa - 2yy) y$ der eine Factor zunimmt, wenn der andere abnimmt. Daher sind die Durchschnitte der zurückgeworfenen Strahlen bey P herum am dichtesten beyeinander.

V. Der größte Werth von u ist $a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dieser ist nämlich derjenige, für welchen der zurückgeworfene Strahl der Abscissenlinie parallel, oder mit dem auffallenden Strahl einen rechten Winkel macht. Alsdann ist $p = 1$, und $1 - pp = 0$, daher $y = x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

VI. Es ist $1 + pp = \frac{a^2}{y^2}$, der Halbmesser der Krümmung $= a$ und $MS = \frac{a}{2\sqrt{(1+pp)}} = \frac{1}{2}y$, oder $MS = \frac{1}{2}PM$.

VII. Der Bogen $BS = \frac{1}{2}y + y -$ Const. Da in dem Anfange B des Bogens $y = 0$ ist, so ist Const $= 0$, und $BS = \frac{3}{2}y$.

VIII. Man ziehe die senkrechte AG auf den zurückgeworfenen Strahl, so ist $MS = \frac{1}{2}MG$. Man halbire AM in E, und ziehe ES, so ist ES parallel mit AG, also senkrecht auf MG, und der Punct S ist auf dem Umfange des über EM beschriebenen Halbkreises. Man ziehe durch S den Durchmesser SCH, so ist der W. ECS $= 2\,CMS = 2\,AMP = 2\,DAM$, also $ECS = 2\,DAM$. Mit AE beschreibe man den Quadranten FEK, so ist dieser so groß als der Halbkreis SEH, und der Bogen ES so groß als der Bogen FE. Denn wenn sich die Winkel an den Mittelpuncten zweyer Kreise umgekehrt wie die Halbmesser verhalten, sind die zugehörigen Bogen gleich groß. Folglich wird die Brennlinie FSB durch den Punct S des Halbkreises SEH, bey der Wälzung desselben auf dem Quadranten FEK beschrieben, so daß H auf K liegt, wenn S in B fällt, und die Brennlinie ist eine Epicykloide.

Die eine Wurzel der Gleichung ist $p = + 12,372$; die beiden andern sind $- 6,186 \pm 44,504$, oder $q = + 38,318$, und $r = - 50,690$. Die Summe der drey Wurzeln ist $= 0$, wie es seyn muß, aber ihr Product ist $= 24020,6$ statt 24000. Denn der gefundene Werth von p ist etwas zu groß, weil in dem Factor F das nächstfolgende subtractive Glied weggelassen ist. Dieser nähert sich in dem Exempel dem völligen Werthe nur langsam.

Die Rechnung ist in dem vorgelegten Falle mühsam, und liefert die Wurzeln nur zwischen den Zehn- und Hundertheilen. Die Methode sie aus einer Reihe von Werthen der Gleichung zu finden, würde noch mühsamer seyn. Bey Gleichungen mit großen Coefficienten ist die Cardanische Regel brauchbarer. Inzwischen ist die Berechnung durch die trigonometrische Dreytheilung eines Winkels am leichtesten, s. die Auflösung dieser Gleichung in dem Artikel: Anwendung der Geometrie auf die Algebra. S. 154.

11. Die Cubikwurzel aus einer möglichen Größe, a^3, hat einen möglichen und zwey unmögliche Werthe, welche zusammen die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 - a^3 = 0$ sind. Sie sind I. a; II. $- \frac{1}{2} a (1 + \sqrt{-3})$; III. $- \frac{1}{2} a (1 - \sqrt{-3})$, s. Cubikwurzel. Ist a^3 selbst eine unmögliche Größe, so sind alle drey Cubikwurzeln aus derselben unmöglich, und eine so gut wie die andere als Cubikwurzel der unmöglichen Größe anzusehen. Die unmögliche Größe sey $A + B \sqrt{-1}$, so haben ihre Cubikwurzeln ebenfalls die Form $P + Q \sqrt{-1}$, damit bey der Cubirung ein möglicher und ein unmöglicher Theil entstehe. Man bezeichne eine der Wurzeln durch $P + Q \sqrt{-1}$, so sind die andern $= - \frac{1}{2} (P + Q \sqrt{-1}) (1 \pm \sqrt{-3})$. Der Cubus jeder der drey Wurzeln ist $P^3 + 3 P^2 Q \sqrt{-1} - 3 P Q^2 - Q^3 \sqrt{-1}$, so daß $P^3 - 3 P Q^2 = A$, und $3 P^2 Q - Q^3 = B$ ist. Daher sind die Cubikwurzeln aus $A - B \sqrt{-1}$ die drey: $P - Q \sqrt{-1}$, und $- \frac{1}{2} (P - Q \sqrt{-1}) (1 \pm \sqrt{-3})$.

Folglich hat die Summe der beiden Cubikwurzeln, $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}$ neuen Werthe, weil je eine der drey Wurzeln des ersten Theils mit je einer der drey Wurzeln des zweyten verbunden werden kann. Von diesen neun Combinationen sind drey mögliche Größen, nämlich

$$P+Q\sqrt{-1} \text{ mit } P-Q\sqrt{-1}$$

$$-\tfrac{1}{2}(P+Q\sqrt{-1})(1+\sqrt{-3}) \text{ mit } -\tfrac{1}{2}(P-Q\sqrt{-1})(1-\sqrt{-3})$$

$$-\tfrac{1}{2}(P+Q\sqrt{-1})(1-\sqrt{-3}) \text{ mit } -\tfrac{1}{2}(P-Q\sqrt{-1})(1+\sqrt{-3}),$$

welche zur Summe geben: I. $2P$; II. $-P+Q\sqrt{3}$; III. $-P-Q\sqrt{3}$.

Hier ist $2P$ die vorher gefundene durch p bezeichnete Wurzel, und Q der zweyte Theil von u durch $\sqrt{3}$ dividirt.

12. Leibnitz hat zwar schon bemerkt, daß bey der Ausziehung der Cubikwurzel aus den beiden Theilen der Cardanischen Formel, vermittelst einer unendlichen Reihe, das Unmögliche sich aufheben müsse, (in einem Briefe an Wallis, 1698, Opp. III, p. 126.); aber Nicole wird der erste seyn, der die Rechnung ausgeführt hat, in den Mem. de l' Acad. des Sc. 1738, 1741 und 1743. Sein Vortrag ist nicht faßlich. Er bemerkt nicht, daß die Wurzelreihen auf zweyerley Art dargestellt werden müssen, um in dem einen oder dem andern Falle eine annähernde Reihe zu erhalten. Die praktischen Hülfsmittel, welche in diesem Artikel gegeben sind, fehlen bey ihm. In den Mémoires 1744 ist noch eine Abhandlung von Nicole enthalten, worin er den cubischen Gleichungen zwey Formen giebt, die zu einer schnellen Näherung dienen. Sie erfordern aber auch mehrere Versuche.

13. Diese Formen sind

$$x^3 - px + n\sqrt{(p+n)} = 0$$

$$x^3 - \frac{rx}{\sqrt[3]{(q+r)}} + q = 0.$$

Die Wurzeln der ersten Gleichung sind: I. $-\sqrt{(p+n)}$;
II. $+\frac{1}{2}\sqrt{(p+n)} + \frac{1}{2}\sqrt{(-3n)}$;
III. $+\frac{1}{2}\sqrt{(p+n)} - \frac{1}{2}\sqrt{(p-3n)}$. Die Wurzeln der zweyten Gleichung sind, I. $-\sqrt[3]{(q+r)}$;
II. $+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(q+r)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-3q}{\sqrt[3]{(q+r)}}}$;
III. $+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(q+r)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-3q}{\sqrt[3]{(q+r)}}}$.

Diese Formen sind hier angeführt, um eine Übung in der Formation der Coefficienten aus den Wurzeln zu veranlassen. Das erste Verfahren von Nicole durch Auflösung der Formel in zwey Reihen findet man in Clairauts Algebra, V. Th. Bey dem zweyten Verfahren wird nach der ersten Form eine Zahl n durch eine positio falsi gesucht, daß das gegebene Glied der Gleichung die Form $n\sqrt{(p+n)}$ völlig genau oder nahe genug bekomme. Nach der andern Form ist eine Zahl r zu finden, so daß der Coefficient von x die Form $\frac{r}{\sqrt[3]{(q+r)}}$ erhalte.

14. In Kästners Analysis endl. Größen §. 699. ff. ist umständlich gezeigt, wie die Cardanische Formel drey mögliche Wurzeln liefern könne. Die daselbst §. 718

getadelte Bemerkung Newtons möchte doch gerechtfertigt werden können. Ein möglicher algebraischer Ausdruck der Wurzel einer Gleichung durch die Coefficienten derselben kann nicht mehrere mögliche Werthe haben, wenn nicht etwa Wurzeln mit einem geraden Exponenten darin vorkommen; und doch sollte er, wenn mehrere mögliche Wurzeln vorhanden sind, eine so gut als die andere angeben. Darum erhält der Ausdruck eine unmögliche Form, als bey welcher eine Vieldeutigkeit Statt hat. Die Gleichung selbst ist auch ein Ausdruck für die Wurzeln, aber eine functio implicita.

15. In den neuern Zeiten noch hat man sich, in der That unnöthiger Weise, viel mit der Cardanischen Regel in dem Falle dreyer möglichen Wurzeln beschäftigt.

A method of extending Cardan's Rule for resolving one case of a cubick equation ... to the other case, called the irreducible. By Fr. Maseres, Phil. Trans. 1778.

Sul quesito analitico proposito dall' Academia di Padova ... dissert. di Pietro Cossali. Verona. 1782.

Della possibilità della reale Solutione analytica del case irreducibile, riflessioni dell' Arciprete Nicolai. Padova. 1783.

Mem. sur la regle de Cardan, par de Castillon. Mem. de Berlin. 1783.

Osservazione del Signor Sebast. Canterzani sul Valor Cardanico -- in occasione d'essere uscito un foglio anonimo, che propone una maniera di redurre il caso irreducibile. In Bologna 1787.

Cardioide eine Linie der vierten Ordnung, von einer herzförmigen Gestalt. Ihre Entstehungsart ist folgende. Über der Linie AB (Fig. 60. Tab. IV.) sey ein Kreis beschrieben. In diesem ziehe man irgend eine Chorde AN, und verlängere sie nach beiden Seiten, nehme darauf NM = AB, und Nm = AB, so sind M, m Puncte der Cardioide.

Die Gleichung für die krumme Linie ist leicht gefunden. Es sey MP senkrecht auf die Abscissenlinie AD. Von dem Endpuncte B des Durchmessers des Kreises auf der Abscissenlinie ziehe man BN nach dem Puncte N, so so ist das Dreyeck ANB dem APM ähnlich, und es ist AB : AN = AM : AP. Es sey AB = a; AP = x; PM = y; AM = z, so ist $a : z - a = z : x$, also $z - az = ax$, oder $z^2 - ax = az$. Beide Theile quadrirt geben die Gleichung $z^4 - 2axz^2 + a^2x^b = a^2z^2$. Da $z = z^2 + a^2x^2$, so entsteht aus jener Gleichung diese:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2ax^3 - 2axy^2 - a^2y^2 = 0.$$

oder

$$y^4 - (a^2 + 2ax - 2x^2)y^2 - 2ax^3 + x^4 = 0.$$

Für den Punct m auf der andern Seite von A wird in dieser Gleichung x negativ. Setzt man die Abscisse Ap = u, so ist $a : a - z = z : u$, und daher durch eine ähnliche Rechnung

$$u^4 + 2u^2y^2 + y^4 2au^3 + 2au^2 - a^2y^2 = 0,]$$

welche Gleichung aus der obigen entsteht, wenn $a = -x$ gesetzt wird.

Man ziehe durch den Mittelpunct C des Kreises ANBA die Parallele CE mit AM, nehmen CF = AB = NM, und ziehe CN, FM, so ist FM parallel mit CN, und ihr gleich, und der Punct M der Cardioide liegt auf dem Umfange des aus F als Mittelpunct beschriebenen, dem Kreise ANBA gleichen Kreises GnMG. Dieser berührt jenen in dem Puncte G, welcher CF halbirt. Der W. EFM ist gleich dem W. GCN = CNA. Da der W. BCN = 2CNA, so ist W. BCG = GCN, also W. BCG = EFM, und W. ACG = GFM, daher der Bogen ANG = MnG. Die Cardioide ist also eine Epicykloide, welche durch die Wälzung eines Kreises auf einem ihm gleichen von einem Puncte auf dem Umfange jenes beschrieben wird. — Man kann sie auch als eine Verwandte der Conchoide ansehen, da eine gegebene gerade Linie auf einem Kreise, so wie bey der Conchoide auf einer geraden Linie fortgeführt wird, indem zugleich ihre Verlängerung durch einen gegebenen Punct geht.

Es sey L der Punct auf dem Bogen AH, dessen Abstand von der auf AB senkrechten Chorde AH am größten ist, und l ein solcher Punct auf dem Bogen Ah. Die zugehörige Abscisse sey AK. Zu den Puncten L, l werden zwey Ordinaten einander gleich, die für kleinere AK ungleich sind. Daher hat die Ordinate y hier zwey gleiche positive Werthe, und eben so zwey gleiche, eben so große, negative Werthe, also hat y^2 einen einfachen Werth. Dieser sey $= A$, so daß $q^2 - A = 0$, also $q^4 - 2Aq^2 + A^2 = 0$ ist. Die Vergleichung mit der Gleichung für y giebt $A = \frac{1}{2}(a^2 + 2ax - 2xx$, und $A^2 = x^4 - 2ax^3$; also $\frac{1}{4}(a^2 + 2ax - 2xx)^2 = x^4 - 2ax^3$. Daraus wird $x = -\frac{1}{4}a$. Dieser Werth in die Gleichung zwischen x und y gesetzt, verwandelt sie in diese, $y^4 - \frac{3}{8}a^2y^2 + \frac{9}{256}a^4 = 0$, woraus folgt $y^2 \frac{3}{16} = a^2$, und $y = \pm\frac{1}{4}a\sqrt{3}$.

Die krumme Linie hat in A eine Spitze oder einen Rückkehrpunct, da die beiden Bogen HLA, hlA in A zusammen kommen, ohne weiter fortgesetzt zu werden, sondern in einander übergehen. Sie müssen hier eine gemeinschaftliche berührende haben, die, weil die Absciſſenlinie die Curve in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, die Absciſſenlinie selbst ist. Die Rechnung zeigt dieses folgendergestalt.

Die Tangente des Winkels einer krummen Linie oder ihrer berührenden mit der Ordinate ist $= \frac{dx}{dy}$, (berührende Linie, 14.). Aus der Gleichung für unsere Curve folgt

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{2x^2y + 2y^3 - 2axy - a^2y}{2x^3 + 2xy^2 - 3ax^2 - ay^2}.$$

Nimmt man $x = 0$, so ist sowohl $y = a$, als $y = 0$. Für $y = a$ ist $\frac{dx}{dy} = 1$. Die Curve macht in H, h, wo HAh senkrecht auf AB ist, einen halben rechten Winkel mit der Ordinate. Für $y = 0$ ist $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, welches an sich unbestimmt ist. Man setze in dem Werthe von $\frac{dx}{dy}$ den Zähler $= Q$, den Nenner $= P$, so daß $\frac{dx}{dy} = - \frac{Q}{P}$ sey. In dem angeführten Artikel, (24.) ist gezeigt, daß wenn für ein Paar Coordinaten $P = 0$ und $Q = 0$ wird, der Quotient $\frac{Q}{P}$ den Werth $\frac{dQ}{dP}$ erhält, in welchem nun für die Coordinaten diejenigen Werthe zu

setzen sind, wodurch P und Q Null werden. Diese sind hier $x = o$, und $y = o$. Dividirt man Zähler und Nenner durch dy, um statt der Differentiale ihre Quotienten einzuführen, und setzt $\frac{dx}{dy} = p$, so ist $p = -\frac{o \times p - aa}{o \times p}$. Daher kann p keinen endlichen Werth haben, auch nicht o seyn, sondern ist unendlich groß. Die krumme Linie macht also in A mit der auf AB senkrechten einen rechten Winkel, und wird also von AB berührt.

Carré hat über diese Linie einen Aufsatz in den Mem. de l'Acad. des Sc. 1705 geliefert. Er hat sie aber auf den Bogen AH allein eingeschränkt. Vor ihm hatte schon, wie er anführt, ein Mathematiker, Könersma, sich mit ihr beschäftigt. Den Namen Cardioide hat Castilliani der krummen Linie gegeben. Philos. Trans. 1741. Cramer hat in der Analyse des lignes courbes § 173. exemple 3. diese Linie als Beyspiel gebraucht, construirt sie aber als eine Epicykloide, und erwähnt nicht, daß seine Linie dieselbe mit der von Carré betrachteten ist. Eben diese Linie ist die Brennlinie durch Zurückstrahlung von einem Kreise, dessen Durchmesser = 3 AB ist, wenn die Strahlen von dem Endpuncte eines Durchmessers auf denselben fallen (siehe Catacaustica, 19.). Dieses und die doppelte Construction macht sie merkwürdig.

Cassinoide, oder vielmehr Cassinische Curve, ist eine Linie vom vierten Grade, durch welche Dominicus Cassini die Bewegung der Erde um die Sonne genauer darzustellen glaubte, als es ihm durch die Keplerische Hypothese von einer Ellipse möglich schien. Die Eigenschaft dieser Linie ist, daß das Produkt oder Rechteck von zwey Linien, die aus zwey gegebenen Puncten an einen Punct der Curve gezogen werden, unveränderlich ist, statt daß in der Ellipse ihre Summe eine gegebene Größe hat.

Dieſe krumme Linie kann ſehr verſchiedene Geſtalten haben, erſtlich eine längliche, nach Art einer Ellipſe, zweytens eine längliche mit einer gegen die Axen convexen Einbeugung oberhalb und unterhalb des Mittelpunctes; drittens eine wie die Ziffer 8 geſchlungene Figur; viertens kann ſie aus zwey abgeſonderten Ovalen beſtehen; ja ſie kann ſich in zwey einzelne Puncte zuſammen ziehen. Dieſe Mannigfaltigkeit der Geſtalt macht dieſe Linie ſchon untauglich, um durch eine regelmäßige Kraft beſchrieben werden zu können. Sie iſt auch von den Aſtronomen gar nicht beachtet worden. Caſſini war nur darauf gefallen, weil er Keplers Hypotheſe nicht recht gefaßt hatte. Die krumme Linie iſt von einigen ſehr ungriechiſch Caſſinoide genannt. Dies bedeutet eine Linie, die dem Caſſini ähnlich iſt. — Elémens d'Aſtronomie par Caſſini: p. 149. Montucla hiſtoire des Mathématiques. T. II. p. 563. nouv. edit.

Caſus irreducibilis tertii gradus, oder ſchlecht hin caſus irreducibilis iſt der Fall, da eine cubiſche Gleichung drey mögliche Wurzeln hat, weil die Formel, welche eine einzige mögliche Wurzel zwar in irrationalen Ausdrücken, aber doch vollſtändig angiebt, in jenem Falle mit unmöglichen Größen vermengt iſt. S. Cardans Regel.

Catacauſtica iſt die Brennlinie durch Zurückſtrahlung. In dem Artikel, Brennlinie, iſt die Beſchaffenheit dieſer Gattung von Linien erklärt, auch iſt die Conſtruction der Catacauſtica für den Kreis gewieſen. Hier iſt die Abſicht, eine allgemeine Methode und Formel zu ihrer Erfindung anzugeben.

I. Brennlinie für parallele Strahlen.

1. Es ist LMNO (Fig. 61. Tab. IV.) ein Bogen einer krummen Linie, AX die Abscissenlinie, auf welche die Ordinaten MP, NQ senkrecht sind. Die Normalen MR, NR schneiden sich in R; die zurückgeworfenen MS, NS in S. Die Ordinate NQ wird von MR in m, von MS in n geschnitten. Es ist MRN = MmN — mNR = PMR — QNR, und MSN = MnN — nNS = PMS — QNS. Da PMS = 2 PMR, und QNS = 2 QNR, so ist MSN = 2 MRN.

2. Aufgabe. Die allgemeine Gleichung für die Catacaustica der Parallelstrahlen zu finden.

I. Es sey (Fig. 61. Tab. IV.) Ap = x, PM = y, die Normale schneide die Abscissenlinie in H, so ist die Subnormale PH $= \frac{ydy}{dx}$ (berührende Linie 42.). Man setze $\frac{dy}{dx} = p$, so daß PH = py, und tang PMH = p ist. Der zurückgeworfene Strahl schneide die Abscissenlinie in V; so ist PMV = 2 PMH, also tang PMV $= \frac{2p}{1 - pp}$ (Goniom. 46.). Folglich ist PV $= \frac{2py}{1 - pp}$.

II. Es sey ST senkrecht auf die Abscissenlinie, und AT = t; TS = u. Nun ist PM : PV = TS : TV und daher PM -: PV = PM — TS : PV — TV, das ist $1 - pp : 2p = y - u : t - x$, also $(1 - pp)(t - x) = 2p(y - u)$.

III. Wenn S ein Durchschnitt irgend zweyer Strahlen MS, NS ist, so darf man für x und p irgend zwey zusammengehörige $x + \Delta x$ und $p + \Delta x$ setzen, ohne t und u zu verändern. Soll aber S ein Punct der Brennlinie seyn, so müssen die Veränderungen von x und p kleiner als jede angebbare Größe gedacht werden, das ist, die Gleichung muß differentiirt werden, so aber, daß t und u ungeändert bleiben. Nach diesem Verfahren ist

$$-2p(t-x)dp-(1-pp)dx = 2(y-u)dp + 2pdy.$$

IV. Für dy setze man pdx, und für y — u seinen Werth aus der Gleichung in (II.), so wird erhalten

$$t-x = -\frac{pdx}{dp}, \text{ so daß}$$

$$t = x - \frac{pdx}{dp},$$

wo dp für den Fall der Figur negativ ist, das ist, die zweyten Unterschiede der y abnehmen, und die Curve gegen die Abscissenlinie concav ist.

V. Ferner ist, wenn für t — x sein Werth aus (II,) gesetzt wird,

$$y-u = -\frac{(1-pp)dx}{2dp}, \text{ so daß}$$

$$u = y + \frac{(1-pp)dx}{2dp}.$$

VI. Aus der Gleichung zwischen x und y wird der Werth von p, und daraus der von $\frac{dp}{dx}$ erhalten. Aus den beyden Gleichungen für t und u, und der Gleichung zwischen x und y werden die beyden Größen x und y heraus=

geschafft, wodurch die Gleichung zwischen t und u hervorgeht. Dieses Verfahren aber ist mühsam. Bequemer werden die Werthe von t und u durch die zugehörigen x und y bestimmt.

3. Die berührende an der Brennlinie KSk in S ist der zurückgeworfene Strahl MSV.

Denn der Winkel der berührenden mit der Ordinate nach der Seite, auf welcher der Anfang der Abscissen liegt, hat zur Tangente den Quotienten $\frac{dt}{du}$ (berührende Linie, 14.). Nun ist aus (2. IV. und V.), wenn dx constant ist, $dt = \frac{p dx d^2p}{dp^2}$, und $du = -\frac{(1-pp) dx d^2p}{2 dp^2}$; also $\frac{dt}{du} = -\frac{2p}{1-pp}$. Das Verneinungszeichen zeigt an, daß der Winkel der berührenden mit TS nach A hin stumpf ist, wenn nämlich $p < 1$ ist, wie in dem Falle für unsere Rechnung, worin PMV spitz ist. Also ist die Tangente dieses Winkels nach TX hin $= + \frac{2p}{1-pp}$.

Nun ist tang TSV $= \frac{TV}{TS} = \frac{PV - PT}{TS}$, und PV — PT $= \frac{2py}{1-pp} - (t-x) = \frac{2p}{1-pp}\left(u - \frac{(1-pp)dx}{2dp} + \frac{pdx}{dp}\right) = \frac{2pu}{1-pp}$. Demnach ist tang TSV $= \frac{2p}{1-pp}$. Folglich ist TSV der Winkel der berührenden mit TS, und MSV die berührende an der Brennlinie in S.

Es ist $MS = -\frac{(1+pp)dx}{2dp}$. Denn MS^2

$= (t-x)^2 + (y-u)^2 = \frac{p^2 dx^2}{dp^2} + \frac{(1-pp)^2 dx^2}{4dp^2}$

$= \frac{(1+pp)^2 dx^2}{4dp^2}$. Die Wurzel MS bekommt das Vorzeichen $-$, weil $\frac{dx}{dp}$ negativ ist, da die zurückwerfende Linie gegen die Abscissenlinie hohl seyn soll. Dadurch wird MS, wie der Halbmesser der Krümmung MR, positiv.

5. Es sey s der Bogen der Brennlinie von irgend einem Puncte K angenommen bis zu S, so ist

$$ds = \frac{(1+pp)\,dx^2\,dp}{2\,dp^2}.$$

Denn es ist $ds = \frac{dt}{\sin TSV}$, und $\sin TSV$

$= \frac{\text{tang } TSV}{\sec TSV}$. Nun ist $\text{tang } TSV = \frac{2p}{1-pp}$,

und $\sec TSV^2 = \frac{4pp}{(u-pp)^2} + 1 = \frac{(1+pp)^2}{(1-pp)^2}$,

also $\sin TSV = \frac{2p}{1+pp}$, und $ds = \frac{1+pp}{2p}\,dt$.

Da $dt = \frac{p\,dx\,d^2p}{dp^2}$, so ist $ds = \frac{(+pp)\,dx\,dp^2}{2\,dp^2}$.

6. Es ist der Bogen der Brennlinie $s = MS + PM -$ Const, wo die beständige Grösse die Summe der Ordinate an der zurückwerfenden Linie, und des zurückgeworfenen Strahls für denjenigen Punct der Brennlinie ist,

von welchem an der Bogen derselben genommen wird.

Denn es ist $d . MS = -pdx + \frac{(1 + pp) dx d^2p}{2 dp^2} =$

$-dy + ds$, oder $ds = d . Ms + dy$, und daher $s = Ms + PM - Const.$, wo die Const. so bestimmt werden muß, daß in dem Anfangspuncte der Brennlinie der Werth von $s = 0$ sey.

7. Ist die Gleichung zwischen x und y eine algebraische, so ist der Bogen der Brennlinie rectificabel.

8. Der Halbmesser der Krümmung in M sey = r.

Es ist $r = -(1 + pp)^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{dp}$ (Krümmungskreis 2.).

Demnach ist $MS = \frac{r}{2\sqrt{(+pp)}}$, und

$$s = \frac{r}{2\sqrt{(1+pp)}} + y - Const.$$

9. Es sey R der Mittelpunct der Krümmung für den Punct M, und RG senkrecht auf MSV, so ist MS $= \frac{1}{2}$ MG, oder $MS = \frac{1}{2} r \cos RMG$. Denn es ist

$\tang PMH = \frac{dy}{dx} = p$, also auch $\tang RMG = p$.

Daher $\cos RMG = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$ (Goniometrie, 14.);

folglich $MG = MR \cos RMG = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}} = 2 MS$.

10. Exempel I. Die zurückwerfende Linie sey ein Kreisquadrant BMD, dessen Halbmesser AB ist. Fig. 62.). Die Strahlen fallen parallel mit AD auf. Die Linien in der Figur behalten ihre Bedeutungen und Benennungen,

wie in der allgemeinen Figur und Rechnung. Der Halbmesser des Kreises sey $= a$. Die Gleichung für denselben ist $aa = xx + yy$. Die Differentialgleichung ist $o = xdx + ydy$, also $p = -\frac{x}{y}$. Die Negation zeigt an, daß die positiven Ordinaten abnehmen, wenn die positiven x wachsen. Hieraus ist $dp = \frac{-ydx + xdy}{y^2}$ $= \frac{xydy - p^2dx}{y^3} = -\frac{aadx}{y^3}$. Folglich $t = x - \frac{xyy}{aa} = \frac{x^3}{a^2}$. Ferner ist $1 - pp = \frac{yy - xx}{yy}$, also $u = y - \frac{yy - xx}{2yy} \cdot \frac{y^3}{aa} = \frac{(3aa - 2yy)y}{2aa}$.

II. Für gleiche aber entgegengesetzte x hat t gleiche und entgegengesetzte Werthe. Ebenfalls hat für gleiche und entgegengesetzte y die Ordinate u zwey gleiche und entgegengesetzte Werthe. Die vollständige Brennlinie besteht aus vier solchen, sich gleichen Bogen wie BSF, einem in jedem Quadranten des Kreises. Zwey gehören als Brennlinien zu den von der convexen Seite des Kreises zurückgeworfenen Strahlen.

III. Für $x = o$, und $y = a$, ist $t = o$, und $y = \frac{1}{2} a = AF$.

IV. Für kleine x ist t viel kleiner als x, da $t : x = xx : aa$ ist. Auch verändert u sich wenig für solche x, da y sich wenig verändert, und in dem Producte $(3aa - 2yy) y$ der eine Factor zunimmt, wenn der andere abnimmt. Daher sind die Durchschnitte der zurückgeworfenen Strahlen bey P herum am dichtesten bey einander.

V. Der größte Werth von u ist $a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dieser ist nämlich derjenige, für welchen der zurückgeworfene Strahl der Abscissenlinie parallel, oder mit dem auffallenden Strahl einen rechten Winkel macht. Alsdann ist $p = 1$, und $1 - pp = 0$, daher $y = x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

VI. Es ist $1 + pp = \frac{a^2}{y^2}$, der Halbmesser der Krümmung $= a$ und $MS = \frac{a}{2\sqrt{(1+pp)}} = \frac{1}{2}y$, oder $MS = \frac{1}{2}PM$.

VII. Der Bogen $BS = \frac{1}{2}y + y$ — Const. Da in dem Anfange B des Bogens $y = 0$ ist, so ist Const $= 0$, und $BS = \frac{3}{2}y$.

VIII. Man ziehe die senkrechte AG auf den zurückgeworfenen Strahl, so ist $MS = \frac{1}{2}MG$. Man halbire AM in E, und ziehe ES, so ist ES parallel mit AG, also senkrecht auf MG, und der Punct S ist auf dem Umfange des über EM beschriebenen Halbkreises. Man ziehe durch S den Durchmesser SCH, so ist der W. ECS $= 2\,CMS = 2\,AMP = 2\,DAM$, also $ECS = 2\,DAM$. Mit AE beschreibe man den Quadranten FEK, so ist dieser so groß als der Halbkreis SEH, und der Bogen ES so groß als der Bogen FE. Denn wenn sich die Winkel an den Mittelpuncten zweyer Kreise umgekehrt wie die Halbmesser verhalten, sind die zugehörigen Bogen gleich groß. Folglich wird die Brennlinie FSB durch den Punct S des Halbkreises SEH, bey der Wälzung desselben auf dem Quadranten FEK beschrieben, so daß H auf K liegt, wenn S in B fällt, und die Brennlinie ist eine Epicykloide.

11. Exempel II. Die zurückwerfende Linie sey eine Parabel CBD, (Fig. 63.) deren Axe AB, Scheitel B ist. Mit der Axe parallel fallen die Strahlen wie PM auf. Der Parameter sey $= a$, die gegebene $AB = b$, die Absciße $AP = x$; $PM = y$, so ist $xx = a(b - y)$.

Daraus $2 x dx = - a dy$, und $p = - \frac{2x}{a}$; $dp =$

$- \frac{2 dx}{a}$. Also ist $t = x - x = 0$. Da $1 - pp$

$= \frac{aa - 4xx}{aa}$, so ist $u = y - \frac{aa - 4xx}{4a} = y - \frac{1}{4}a$

$+ b - y = b - \frac{1}{4}a$. Der Vereinigungspunct aller zurückgeworfenen Strahlen, die auffallenden parallel mit der Axe gesetzt, ist ein einziger Punct S, dessen Abstand vom Scheitel $= \frac{1}{4}a$ oder $\frac{1}{4}$ des Parameters ist. Dieser heißt daher der Brennpunct der Parabel. Es laßt sich dieses auch unmittelbar aus der Natur der Parabel herleiten.

12. Exempel III. Die zurückwerfende Linie sey eine Cykloide, deren Hälfte DMB in Fig. 64. gezeichnet ist. Die Axe ist AD, als der Durchmesser des beschriebenen Kreises; die halbe Basis ist AB, gleich dem halben Umfange desselben. Die Normale in einem Puncte M geht durch denjenigen Punct der Basis H, wo der sich wälzende Kreis sie berührt, indem der beschreibende Punct desselben in M ist. Man ziehe CH senkrecht auf AB in H, und nehme $CH = \frac{1}{2}AD$, so ist C der Mittelpunct des sich wälzenden Kreises, und $CMH = CHM = HMP$. Also geht die zurückgeworfene Linie durch diesen Mittelpunct. Der Halbmesser der Krümmung an der Cykloide in einem Puncte $M = 2 MH$. Zieht man durch H, die senkrechte

HS an die verlängerte MC, so ist daher S ein Punct der Brennlinie, wie es aus (9) leicht folgt. Wegen des rechten Winkels CSH ist S auf dem Umfange des über CH beschriebenen Kreises. Der Mittelpunct desselben sey in E, so ist der W. SEH = 2 SCE. Es sey N der andere Endpunct des Durchmessers MCN in dem erzeugenden Kreise für die Cykloide, so ist der Bogen NH = Bog. SH, da die zugehörigen Winkel an den Mittelpuncten sich umgekehrt wie die Halbmesser verhalten. Der Bogen HM ist dem Theile HB der Basis gleich, also die Ergänzung zum Halbkreise, nämlich der Bogen NH = AH. Daher ist auch Bog. SH = AH, und der Punct S liegt auf der Cykloide ASB, die durch die Walzung des über dem Durchmesser CH beschriebenen Kreises erzeugt wird. Die Brennlinie der Cykloide für Strahlen, die mit der Axe AD parallel auffallen, ist wieder eine Cykloide mit einer halb so großen Basis.

II. Brennlinie für Strahlen, die von einem gegebenen Puncte ausfahren.

13. I. Es ist LMNO (Fig. 65.) eine krumme Linie, an welche von dem gegebenen Puncte A Strahlen wie AM, AN fallen, und nach MS, NS zurückgeworfen werden. Die Normalen in M, N sind MR, NR, die sich in R schneiden, und jene den Winkel AMS, diese den ANS, halbiren.

II. Die Linie MR schneide AN in P, und NR schneide SM in Q, so ist, weil der W. MPN der Summe der beiden innern Winkel in jedem der beiden Dreyecken PRN, PAM, und eben so MQN der Summe der beiden innern Winkel in jedem der Dreyecke QRM, QSN gleich ist.

$$MRN + ANR = MAN + AMR,$$
$$MRN + SMR = NSM + SNR.$$

die Addition dieser beiden Gleichungen giebt (wegen AMR = SMR und ANR = SNR)

$$2\,MRN = MAN + NSM,$$

so daß der Winkel R das arithmetische Mittel zwischen den beiden A und S ist.

III, Man beschreibe aus A mit dem Halbmesser AM innerhalb des W. MAN den Kreisbogen Mm, und aus S mit MS innerhalb des W. MSN den Kreisbogen Mn, so ist der Winkel NMm der krummen Linie mit dem Bogen Mm (d. i. der Winkel ihrer berührenden in M) gleich AMR oder RMS, weil AMm, RMN beydes Rechte sind, und RMm ihnen gemein ist. Eben so ist der W. NMn = RMS, also W. NMm = NMn.

IV. Wenn S ein Punct der Brennlinie seyn soll, so muß der Bogen MN kleiner als jede angebbare Größe seyn. Alsdann ist Nm = MN . sin NMm, und Nn = Mn. sin NMn, also Nm = Nn.

Alsdann ist auch Mm = MN . cos NMm = MN . cos AMR, und Mn = MN. cos NMn = MN . cos RMS. Auch ist MR oder NR der Halbmesser der Krümmung in M, und R der Mittelpunct des Krümmungskreises.

V. Es sey AM = z; SM = u; RM = r, wo SM, RM die Gränzen der sich schneidenden MR, NR, und MS, NS sind. Ferner sey AMR = ω, und der Bogen LM von irgend einem Puncte L an genommen = s. Erstlich ist $dz = -du$.

Zweytens ist $MRN = \frac{ds}{r}$ $MAN = \frac{\cos\omega . ds}{z}$;

$MSN = \frac{\cos\omega . ds}{u}$. Die Winkel sind hier Kreisbogen mit einem der Einheit gleichen Halbmesser.

Nun ist aus (II.)

$$\frac{2\,ds}{r} = \frac{\cos\omega.\ ds}{z} + \frac{\cos\omega.\ ds}{u}.$$

Daraus ist

$$u = \frac{r\,z\cos\omega}{2z - r\cos\omega}.$$

VI. Für die krumme Linie muß eine Gleichung zwischen dem Radius AM und dem Winkel BAM, den AM mit einer der Lage nach gegebenen AB macht, oder einer Function dieses Winkels, gefunden oder gegeben seyn. Aus dieser wird für irgend ein z der Werth von r und von $\cos\omega$ hergeleitet. Der daraus zufolge der Formel für u gefundene Werth von MS wird auf den zurückgeworfenen Strahl getragen, um den zugehörigen Punct der Brennlinie zu erhalten.

VII. Man ziehe RG senkrecht auf MA, so ist $MG = \cos\omega$, und $MS = \frac{MA \times MG}{2MA - MG}$. Man halbire MG in H, so ist $MS = \frac{MA \times MG}{2AH}$, weil $MA - AH = HM = \frac{1}{2}MG$ ist, es mag G jenseits oder diesseits A liegen.

14. Wenn die auffallenden Strahlen sich parallel sind, so ist z unendlich groß, und $u = \frac{1}{2}\cos\omega$, wie in (G.) gefunden ist.

15. Daß die zurückgeworfenen Strahlen die Brennlinie berühren, ist in (3) für parallel einfallende Strahlen analytisch erwiesen. Dasselbe gilt auch für divergirend auffallende. Denn nicht auf den Winkel, welchen die auffallenden Strahlen mit den Normalen und unter sich machen, kommt es hier an, sondern darauf, daß die zurückgeworfenen mit den Normalen dieselben Winkel wie die auffallenden machen.

16. Wenn die zurückgeworfenen Strahlen selbst sich schneiden, so kann man A und S als die Brennpuncte einer die krumme Linie in dem Bogen MN osculirenden Ellipse betrachten; das ist, einer solchen, die zwey unendlich nahe Puncte und die daselbst berührenden mit der Curve gemein hat. Es ist also, zufolge der Natur der Ellipse, AM + MS = AN + NS, und AN — AM = SM — SN. Schneiden aber die rückwärts genommenen Verlängerungen der zurückgeworfenen Strahlen sich einander, so sind A und S die Brennpuncte einer die krumme Linie osculirenden Hyperbel, und es ist, AM — MS = AN — NS, also nun AN — AM = SN — SM.

17. Man betrachte in dem ersten Falle die zurückwerfende Linie als eine Reihe von elliptischen Bogen, die einen gemeinschaftlichen Brennpunkt A haben. Der andere Brennpunct rückt auf der Brennlinie fort, so wie der Einfallspunct auf der zurückwerfenden Linie fortrückt. Jedes Element der Brennlinie liegt in der Richtung eines zurückgeworfenen Strahls zwischen den Durchschnitten mit zwey andern auf beiden Seiten unendlich nahen, und ist die Verlängerung desselben in Rücksicht auf den unmittelbar folgenden. Es sey die stetige Folge der auffallenden Strahlen, a, b, c, d . . . . z, deren jeder von dem vorhergehenden unendlich wenig verschieden ist. Die dazu gehörigen zurückgeworfenen seyn α, β, γ, δ . . . ω. Der Anfang der Brennlinie sey in dem Durchschnitte der beiden ersten α, β, die Reihe der Elemente auf der Brennlinie sey ds, ds', ds'', etc. Ihre Summe sey = S. Es ist

$$a + \alpha = b + \beta$$
$$b + \beta + ds = c + \gamma$$
$$c + \gamma + ds' = d + \delta$$
$$d + \delta + ds'' = e + \varepsilon$$
etc. etc.

Bey der Addition aller dieser Gleichungen heben sich alle Paare, $b+\beta$; $c+\gamma$, etc. gegen einander auf, bis auf das erstere $a+\alpha$, und das letzte $z+\omega$, und es ist $+\alpha+S=z+\omega$, also

$$S=z-a-(\alpha-\omega).$$

Die Brennlinie ist also rectificabel, wenn die zurückwerfende eine algebraische ist.

17. Wenn die zurückgeworfenen Strahlen divergiren, so ist,

$$a-\alpha=b-\beta$$

$$b-\beta-ds'=c-\gamma$$

etc. etc.

und $a-\alpha-S=z-\omega$

also $S=a-z-(\alpha-\omega)$.

18. Wenn die zurückwerfende Linie ein Kreis ist, so ist es sehr leicht, Puncte der Brennlinie zu finden, da der Halbmesser der Krümmung und der Mittelpunct derselben unveränderlich sind. — Die Aufgabe ist schon in dem Artikel Brennlinie (>— 9) aufgelöset. Da für parallele Strahlen die Brennlinie eine Epicykloide ist, so wollen wir suchen, ob eine solche auch für divergirende Strahlen Statt habe.

Es sey R (Fig. 66.) der Mittelpunct des zurückwerfenden Kreises BM. Um denselben sey ein Kreis FDE beschrieben, auf dessen Umfange ein anderer Kreis DSM sich wälze, und mit dem Puncte S des Umfanges eine Epicykloide beschreibe. Der Mittelpunct dieses Kreises sey C. An einem zurückwerfenden Puncte M sey das Einfallsloth RM gezogen, und MS der zurückgeworfene Strahl, MA der einfallende von einem Puncte A auf der Linie BRA durch R und den Anfang der Wälzung F. Man sucht das Verhältniß MS : MA. Es sey RM $=r$; RA$=a$; CM$=b$; MS$=u$; MA$=z$; W. CMS$=\omega$.

Erstlich ist $u = 2b \cos\omega$. Zweytens folgt aus der Formel in (13. V.) $z = \frac{ru\cos\omega}{2u - r\cos\omega}$. Setzt man für $\cos\omega$ seinen Werth, so ist $z = \frac{ru}{4b - r}$. Also ist das Verhältniß $z:u$ ein unveränderliches, nämlich $r:4b - r$. Drittens muß der Abstand RA des Punctes A von R unveränderlich seyn. Nun ist in dem Dreyecke ARM für die drey Seiten nebst dem Winkel ω die Gleichung, $aa = rr + zz - 2rz\cos\omega$, und es ist, wenn in der Formel für z der Werth von u gesetzt wird,

$z = \frac{2br\cos\omega}{4b - r}$, oder abgekürzt, $z = mr\cos\omega$. Dieser Werth in jene Gleichung gesetzt, giebt $aa = rr + m^2r^2\cos\omega^2 - 2mr^2\cos\omega^2$. Damit a eine endliche unveränderliche Größe sey, muß der Factor der veränderlichen, $\cos\omega^2$, Null seyn. Dieses giebt $m = 2$, und $a = r$, so daß der strahlende Punct auf dem Umfange des zurückwerfenden Kreises liegt. Ferner ist $2b = 2(4b - r)$, daher $3b = r$. Nimmt man also $RF = \frac{1}{3}RB$, und läßt den Kreis mit dem Durchmesser $DM = \frac{2}{3}RB$ sich auf jenem wälzen, so ist die von einem Puncte S auf dem Umfange des letztern beschriebene Epicykloide die Brennlinie für die von A auffallenden Strahlen, wenn nämlich bey der Berührung in F der Punct S in F fällt. Sie geht durch den Punct A.

Nimmt man den strahlenden Punct A auf dem Endpuncte des Durchmessers eines zurückwerfenden Kreises, so läßt sich leicht zeigen, daß MS ($= u$) zu MA ($= z$) ein gegebenes Verhältniß hat, da $z = 2r\cos\omega$ ist, also $u = \frac{1}{3}z$ ist. Hieraus ergiebt sich sogleich, daß die

Brennlinie eine Epicykloide ist, deren Construction die vorher gefundene ist.

Wird m unendlich groß genommen, so ist $4b - r = 0$, daher a unendlich, so wie z. Die Strahlen fallen parallel auf, und der Halbmesser des sich wälzenden Kreises ist $= \frac{1}{4} r$, des unbewegten $= \frac{1}{2} r$, wie es in (10. VIII.) gefunden ist.

Die Epicykloide oder Brennlinie für die von A auf dem Umfange des Kreises auffallenden Strahlen ist diejenige, welche wegen ihrer Gestalt auch die **Cardioide** genannt wird, s. Cardioide.

19. Die zurückwerfende Linie LMNO (Fig. 65.) sey eine Ellipse, auf welche die Strahlen von dem einen der Brennpuncte A fallen. Die halbe große Axe sey $= a$; die halbe kleine Axe $= b$. Für die Ellipse ist der Halbmesser der Krümmung $r = \frac{bb}{a \cos\omega^3}$ (s. Ellipse), folglich die Länge des zurückgeworfenen Strahls $u = \frac{bbz}{2az\cos\omega^2 - bb}$. Daraus ist $2auz\cos\omega^2 = b^2(u + z)$. An der Ellipse ist die Summe der beiden Linien, die aus den Brennpuncten an einem Punct ihres Umfanges gezogen werden, $= 2a$, und ihr Product $= \frac{b^2}{\cos\omega^2}$, aus welchen beiden Gleichungen dieselbe wie die zwischen u und z gefundene entsteht. Die auf die Ellipse aus dem einen Brennpuncte auffallenden Strahlen werden also alle nach dem andern Brennpuncte hin zurückgeworfen.

Cavaleri's Methode des Untheilbaren (Methodus Indivisibilium) ist ein Verfahren, Flächen und Körper zu messen, wobey Linien als untheilbare Ele-

mente oder Bestandtheile von Flächen, und Flächen als solche Bestandtheile von Körpern angesehen werden. Bonaventura Cavaleri, ein Geometer in der ersten Hälfte des 17ten Jahrhunderts, aus dem Orden der Jesuaten, war Professor der Mathematik zu Bologna. Er hat seine Methode in einem Werke vorgetragen, welches den Titel führt: Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Autore F. Bonaventura Cavalerio. Bononiae 1635. 696. pag. 4. Zweyte Ausgabe 1653. Er erläuterte sie nachher noch in den Exercitatonibus geometricis, Bonon. 1647. 4, und vertheidigte sie gegen die Einwürfe des Guldin. Vor Cavaleri hat Kepler die Ausmessung mancherley Körper durch Zerlegung in Elemente, aber körperliche, gezeigt, in dem Supplemento Stereometriae Archimedeae, die der Stereometria doliorum vinariorum, Lincii 1615 Fol. beygefügt ist. Cavaleri führt auch Keplers Untersuchungen in der Vorrede zu seinem ersten Werke an, mit der Bemerkung, daß es ihm angenehm gewesen, seine neue und bequeme Methode auf die von Kepler aufgestellten neuen Gattungen von Körpern anzuwenden. Guldin nahm von dieser Anzeige einen Grund her, daß Cavaleri durch Kepler auf seine Methode geleitet wäre. Diesem widerspricht C. in seinem zweyten Werke, und fügt hinzu, Kepler setze aus höchst kleinen (minutissimis) Körperchen ohne Zwischenräumchen größere zusammen, er aber sage, daß ebene Figuren sich wie die Aggregate gleich weiter Parallelen, Körper, sich wie die Aggregate gleich weiter parallelen Ebenen, verhalten. Seine Methode sey die von den Alten schon gebrauchte, nur einfacher gemacht. In der That ist die Erhaustions-Methode der Alten im Wesentlichen dieselbe mit der Cavalerischen, nur daß jene ihrer Beweisart die befriedigendste Evidenz gaben, dagegen Cavaleri's Methode durch die Unbestimmtheit des Begriffs, untheilbare Größe, und durch das Unendliche eine Dunkelheit läßt, die der Urheber selbst in der Vorrede zu dem siebenten Buche seines Werks befürchtet, daher er eben dieses Buch dazu wid-

met, andere Beweise für die vorher erwiesenen Sätze, ohne den Begriff des Unendlichen zu geben. Die Alten fanden zwey Summen endlicher Größen, zwischen welchen die Größe liegt, deren Werth bestimmt werden soll; die gemeinschaftliche Gränze beider Summen ist dieser Werth. Sie zeigten, daß derselbe weder größer noch kleiner seyn könne als jene Gränze. Cavaleri erspart sich die Mühe, die beiden einschließenden Summen zu bestimmen, und den eben gedachten Beweis zu führen. Er sucht gleich die Gränze der Summe einer unbestimmten Menge unendlich kleiner Größen, setzt aber für die letztern endliche ihnen proportionale einer andern Art, und druckt die unendlich große Summe durch eine proportionale endliche Größe aus, welches möglich ist, weil hier nicht die absolute Menge, sondern nur eine proportionale gesucht wird, indem immer zwey Größen auf eine gleichförmige Art in unendlich viele Theile getheilt werden. Cavaleri erklärt sich nirgends deutlich über seine Indivisibilia. In einem Scholium im 2ten Buche, p. 17. wo er eine Bedenklichkeit wegen seiner Beweisart heben will, läßt er es unentschieden, ob die stetigen Größen ganz und allein aus den Untheilbaren zusammengesetzt seyn, oder ob zwischen den Untheilbaren noch etwas enthalten sey. Die Untheilbaren sind bey ihm parallele Linien und Ebenen, jene als gleichsam untheilbare Abschnitte von Flächen, diese als solche von Körpern. Nun kann man aber durchaus nicht Flächen aus Linien, noch Körper aus Flächen zusammensetzen. Der Ausdruck, Indivisibilia, verursacht hier eine sehr nachtheilige Dunkelheit und Schwierigkeit. Nimmt man Linien und Flachen für das, was sie wirklich sind, so kann man keine Flachen und Körper daraus zusammensetzen. Nimmt man sie für höchst schmale Flächenstreifen und körperliche Abschnitte, so leidet entweder die Genauigkeit, wenn man sich diese als endliche Größen gedenkt, oder die Deutlichkeit, wenn man sie als unendlich klein oder verschwindend betrachtet.

In dem Corollarium des 3. S. im 2. Buche giebt Cavaleri selbst an, was die Grundlage seiner neuen Geo-

metrie sey. Er sagt, um das Verhältniß zweyer ebenen, oder körperlichen Figuren zu finden, brauche man nur das Verhältniß zu suchen, welches in den ebenen Figuren alle ihre nach irgend einer Regel genommenen Linien, und in den körperlichen Figuren alle ihre gleichergestalt genommenen Ebenen (d. i. Durchschnitte) haben. Die Regel ist bey ebenen Figuren irgend eine in ihrer Ebene gezogene gerade Linie, mit welcher innerhalb der Figur unendlich viele parallele gedacht werden; bey Körpern ist sie eine Ebene, mit welcher innerhalb des Körpers unendlich viele parallele Durchschnitte gelegt werden.

Es sey die gerade Linie RR (Fig. 67. Tab. IV.) eine solche Regel. Mit dieser werde SS parallel gezogen. Innerhalb dieser Parallelen sind die Linien AB und DC, gerade oder krumme, wie auch ab und dc, gezogen, mit dem Gesetze, daß die in einerley Abstande von der Regel innerhalb der Figuren ABCD, abcd, mit jenen parallelen MN, mn ein gegebenes Verhältniß haben. Sind AD, ad, die Durchschnitte der Figur mit RR; und BC, bc die Durchschnitte mit SS, so ist AD : ad = BC : bc = MN : mn. Dieses gesetzt, verhalten sich die Flächenräume der Figuren ABCD, abcd, wie AD : ad, oder wie zwey einander zugehörige, MN : mn. Cavaleri, L. II. prop. 4.

Durch die Linie RR lege man eine Ebene als Regel, mit welcher durch die parallele SS eine Ebene parallel gelegt werde. Zwischen beiden Ebenen seyn zwey Körper enthalten, deren Durchschnitte mit einer dritten Ebene die Figuren ABCD sind. Die Durchschnitte dieser Körper mit den der Regel parallelen Ebenen in einerley Abstande von derselben seyn in einem gegebenen Verhältnisse p : q, so sind die Körper selbst in eben demselben Verhältnisse p : q. Cavaleri l. c.

Zum Beyspiel nehme man einen Kreis und eine Ellipse, deren große Axe dem Durchmesser jenes gleich ist. Die Ordinaten, die auf einen Durchmesser und die große Axe

senkrecht sind, verhalten sich in beiden Figuren, für dieselbe Abscisse, wie der Durchmesser und die kleine Axe, daher die Flächenräume eben so. — Läßt man den Kreis sich um einen Durchmesser, die Ellipse sich um die große Axe, drehen, so verhalten sich die Flächenschnitte, die senkrecht auf jene Linien sind, wie die Quadrate der großen und der kleinen Axe, und eben so die Kugel und das oblonge Sphäroid. —

Sind in den beiden ebenen Figuren die Durchschnittslinien, welche der Regel RR parallel sind, in demselben Abstande von dieser gleich, so sind die Figuren dem Flächenraume nach gleich, sie mögen dabey sich ähnlich seyn, oder nicht.

Desgleichen, wenn in den Körpern, die zwischen zwey parallelen Ebenen enthalten sind, die Durchschnitte mit derselben, jenen parallelen, Ebene gleich groß sind, so sind die Körper dem Raume nach gleich, wie auch übrigens ihre Gestalt verschieden seyn mag.

Segner gebraucht diese beiden Sätze, von der Gleichheit der Figuren und Körper, als Grundlage für die Vergleichung ebener Figuren und der Körper, Elem. Geometriae §. 194. 258. Die Flächen, erinnert er, werden zwar nicht aus Linien, noch die Körper aus Flächen zusammengesetzt, allein die geraden Linien dienen, ihm zufolge, bloß zur Angabe der Ausdehnung nach einer gewissen Richtung, und eben so zeige die Gleichheit der Durchschnitte in den Körpern eine gleiche Ausdehnung an.

Cavaleri erweiset nun, nach seiner Methode, allgemein (L. II. Prop. 15.), daß alle ähnliche Figuren in dem zweyfachen Verhältnisse der gleichnamigen Seiten, oder der auf ähnliche Art in ihnen gezogenen Linien, stehen. Der Beweis ist etwas lang, weil er, wenn die Figuren von den parallelen Durchschnittslinien, in mehr als zwey Puncten geschnitten werden, sie in andere gleich große, durch die Addition der Theile auf den Durchschnittslinien, und Übertragung längs einer geraden Linie, verwandelt.

Dann erweiset er (Prop. XVII.), daß alle ähnliche Körper in dem dreyfachen Verhältnisse ihrer gleichnamigen Seiten oder der auf ähnliche Art in ihnen gezogenen Linien stehen. Der Beweis nimmt funfzehn Quartseiten ein, zum Theil wegen der Verwandlung der Schnitte in einfachere. Er ist nicht lesbar, wie Cavaleri selbst befürchtet, läßt sich aber, so wie der vorhergehende Beweis, kurz und leicht genug machen, und zwar nach der Cavalerischen Methode. Cavaleri glaubt sehr viel geleistet zu haben, daß er einen Satz allgemein erweiset, den die Alten nur von einzelnen Körpern erwiesen hatten. (Schol. Prop. 16. L. II.).

Ein Hauptsatz für die Vergleichungen der Flächen und Körper ist der 24ste im zweyten Buche. Expofito parallelogrammo quocunque, in eoque ducta diametro; omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cujusvis triangulorum per dictam diametrum conftitutorum erunt in ratione tripla, uno laterum parallelogrammi communi regula exiftente. Das heißt: wenn in dem Parallelogramm und dem Dreyecke Parallelen mit der einen Seite des erstern gezogen werden, so ist das Gränzverhältniß der Summen der Quadrate von diesen Linien das von 3 : 1. Der Ausdruck, ratio tripla, kommt auch in 17ten Satze von dem Verhältnisse ähnlicher Körper vor, und bedeutet daselbst, was man jetzt ratio triplicata nennt.

Mit Hülfe dieses Satzes und des von dem Verhältnisse aller Linien in dem Parallelogramm und dem Dreyecke, welches das von 2:1 ist. (Coroll. 2. prop. 19.) erweiset Cavaleri sehr viele geometrische Sätze, zwar mühsam aber doch sinnreich.

Cavaleri's Satz folgt aus der Formel in (14.) des Artikels, arithm. Reihen höherer Ordnungen. Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen, $1 + 4 + 9 \ldots + r^2$ ist $= \frac{1}{6} r(r+1)(2r+1)$. Die

Summe von r Quadraten, deren jedes r^2 ist, ist $= r^3$. Diese verhält sich zu jener, wie $r^3 : \frac{1}{6}(r+1)(2r+1)$. Die Gränze dieses Verhältnisses für ein unendlich großes r ist $r^3 : \frac{2}{6} r^3$ oder 3 : 1.

Zum Beyspiel nehme man einen Cylinder und Kegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Man zeichne ein Rechteck, dessen Grundlinie der Durchmesser der Grundfläche beider Körper, und die Höhe ihre Höhe ist, und ziehe darin eine Diagonale. Schneidet man die Körper durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche, und zieht in dem Rechtecke nebst dem Dreyecke in derselben Entfernung von der Grundlinie, wie dort von der Grundfläche, eine parallele mit der Grundlinie, so sind die Durchmesser der Durchschnitte in den Körpern die Parallelen in den beiden Figuren. Die beiden Durchschnittsflächen verhalten sich wie die Quadrate dieser Linien; und alle Durchschnittsflächen (nach Cavaleri's Art zu reden); wie alle Quadrate; daher Cylinder und Kegel wie 3 zu 1. (Prop. 34. Coroll. 4. sect. 9.)

Ein anderes Beyspiel giebt die Quadratur der Parabel. Es sey (Fig. 68.) BAC eine Parabel, deren Axe AD, auf welche die Chorde BC senkrecht ist. Die berührende im Scheitel A ist EF. Man ziehe durch den Punct C, und durch irgend einen andern Punct M der Parabel mit ihrer Axe die parallelen FC, PM, deren letztere die Chorde BC in N trifft. Vermöge der Eigenschaft der Parabel ist FC:PM=AFqu: APqu, oder PN: PM=AFqu : AP qu. Also ist die Summe aller PN zu der Summe aller PM, wie die Summe aller AFqu. zu der Summe aller APqu. Die beiden ersten Summen verhalten sich wie das Rechteck ADCF und der dreylinige Raum AMCF; die beiden andern Summen verhalten sich wie 3 : 1. Also ist das Trilineum der dritte Theil des

Rechtecks, und der parabolische Raum BACB ist zweydrittheil des Rechtecks BEFC. (Cavaleri L. IV. prop. 1.)

Noch ein Beyspiel sey die Cubatur eines Kugel-Abschnitts und der Kugel selbst, wozu es nöthig ist, die Summe aller Quadrate der Ordinaten in einem Abschnitte mit der Summe der Quadrate der größten unter ihnen zu vergleichen.

Es ist AEB (Fig. 69.) ein Halbkreis über dem Durchmesser AB aus dem Mittelpuncte C beschrieben; ED eine bestimmte Ordinate senkrecht auf AB, und AFED das Rechteck von den Coordinaten AD, DE. Eine unbestimmte Ordinate ist PM zu der Abscisse AP. Man lasse das Rechteck AE und den Kreisabschnitt AMED sich um AD als Axe drehen, so beschreibt nach einem vollendeten Umlaufe jenes einen Cylinder, dieser ein Kugelstück. Beide Körper verhalten sich wie die Summen aller circulären Durchschnitte, die mit der von DE beschriebenen Kreisfläche parallel sind. Da diese Durchschnitte sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, so verhalten sich die beiden Körper wie die Summen aller PNqu und aller PMqu. Die Summe aller PNqu ist proportional dem Producte AD × DEqu oder AD × AD × DB. Die Summe aller PMqu ist die Summe aller Producte AP × PB. Man verlängere FA nach G, nehme AG = AD, und vollende sowohl das Quadrat AGID als das Rechteck AGHB. In dem Quadrate ziehe man die Diagonale AI, und errichte über dem Dreyecke AGI als Grundfläche ein dreyseitiges senkrechtes Prisma, dessen Höhe AB ist. Auf AG nehme man AL = AP, und ziehe parallel mit AB die Linie LM, welche AI in Q schneide, so ist LQ (= AL) = AP. Durch LQ führe man einen Schnitt des Prisma senkrecht auf die Grundfläche, so ist der Inhalt desselben = LM × LQ = AB × AP. Das Prisma verhält sich also wie die Summe aller Producte AB × AP, oder wie das Aggregat der Summen aller Producte AP × AP + AP × PB.

Auf der Seitenfläche des Prisma, das GI zur Grundlinie hat, zeichne man über GI ein Quadrat, und nehme es zur Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze A, und Höhe AG ist. Eine Seitenfläche dieser Pyramide ist das Dreyeck AGI. Ein Schnitt durch LQ senkrecht auf AGI, also parallel mit der Grundfläche, ist ein Quadrat, und die Pyramide ist proportional der Summe aller Quadrate, wie LQ q u, oder der Summe aller AP q u. Der übrige Theil des Prisma ist der Summe aller $AP \times PB$ proportional. Dieser übrige Theil besteht aus einem Prisma von der Höhe DB über der Grundfläche AGI, und dem Theile des Prisma von der Höhe AD über derselben Grundfläche, der nach abgeschnittener Pyramide übrig bleibt. Das Prisma von der Höhe AD wird ausgedruckt durch das Product $\frac{1}{2} AG \times GI \times AD$ oder $\frac{1}{2}$ AD cub. Die Pyramide aber durch $\frac{1}{3} GI \times GI \times AG$ oder $\frac{1}{3}$ AD cub. Also ist der übrige Theil jenes Prisma $= \frac{1}{6}$ AD cub. Dieses werde zu dem Prisma von der Höhe DB, das ist zu $\frac{1}{2} AG \times GI \times DB$ oder $\frac{1}{2} AD \times AD \times DB$ addirt, so ist die Summe $\frac{1}{2} AD \times AD \times DB + \frac{1}{6}$ AD cub. proportional der Summe aller $AP \times PB$. Folglich verhält sich der Cylinder mit dem Halbmesser DE zu dem Kugelabschnitte über derselben Grundfläche wie $AD \times AD \times DA$ zu $\frac{1}{2} AD \times AD \times DB + \frac{1}{6}$ AD cub, oder wie DB : $\frac{1}{2} DB + \frac{1}{6} AD$.

Für die Halbkugel ist $DB = AD = AC$, also verhält sich der Cylinder, dessen Halbmesser und Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich sind, zu der Halbkugel, wie $1 : \frac{2}{3}$, oder wie $3 : 2$. Eben so verhält sich der Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich sind, zu der ganzen Kugel.

Die hieher gehörigen Sätze bey Cavaleri sind Coroll. Propos. 30. L. 2.; Prop. 1. L. 3.; und Cor. 1. Prop. 34. L. 3. Die Deduction ist hier sehr abgekürzt, doch mit Beybehaltung seiner Vorstellungsart.

Wenn die Linien, durch deren Bewegung oder Fortfließen (Cavaleri braucht einigemal das Wort fluere) eine Figur beschrieben wird, sich um einen festen Punct bewegen, so verhalten sich die beschriebenen Flächenräume nicht wie die Summen der Linien, sondern wie die Summen ihrer Quadrate. Denn man muß hier die Linien als Repräsentanten von verschwindenden Kreissectoren ansehen. Bey der Quadratur der Archimedeischen Spirallinie verfährt Cavaleri nach diesem Grundsatze, wiewohl er sich nicht deutlich darüber erklärt. L, 6, Prop. 9.). Er quadrirt sie durch Hülfe der Quadratur der Parabel.

In dem zweyten anfangs angeführten Werke, den exercitt. mathem. geht Cavaleri weiter als in dem ersten, worin er nur solche Summirungen vortrug, die von dem Werthe einer unendlichen Reihe Quadrate, deren Wurzeln in arithmetischer Fortschreitung sind, abhangen. Er erhebt sich daselbst zu Untersuchungen, welche die Summirung einer unendlichen Anzahl von Cubis und Biquadraten erfordern. Er fand, daß die Summe der Cuborum aller Linien, die in paralleler Lage ein Rechteck ausfüllen, sich zu der Summe der Cuborum aller parallelen in dem halbirenden Dreyecke wie 4 : 1 verhalten; und daß die Summen ihrer Biquadrate wie 5 : 1 sind. Vergl. die Artikel: arithm. Reihen höherer Ordn. 15. und Potenz. III.

Man wird sich gegenwärtig nicht die Mühe machen, Cavaler'is Werke zu lesen, da man seine Sätze weit leichter durch die Integralrechnung finden kann. Er hatte nicht den philosophischen Geist, der auch in der Mathematik zur lichtvollen Darstellung nöthig ist. Seinem Vortrage fehlt es an Nettigkeit, und die Schreibart selbst ist äußerst vernachläßigt.

Seine Methode erhielt unter seinen Zeitgenossen vielen Beyfall. Torricelli sagt in der Vorrede zu seiner Abhandlung de solido acuto hyberbolico sogar: Miseret me veteris Geometriae, quae cum Indivisibi-

lium doctrinam sive non noverit, sive non admiserit, circa dimensionem solidorum adeo paucas veritates invenit, ut ipsa penuria infelix ad aetatem nostram pervenerit. In der Vorrede zu der Abhandlung, Quadratura parabolae per novam indivisibilium Geometriam pluribus modis absoluta, sagt er, er wolle nicht behaupten, daß die Geometria indivisibilium eine ganz neue Erfindung sey. Er glaube vielmehr, daß die alten Geometer sich dieser Methode zur Erfindung sehr schwerer Sätze bedient hätten, ob sie gleich in ihren Beweisen einen andern Weg genommen haben, es sey, um die Kunst der Erfindung zu verstecken, oder um allen Anlaß zu Widersprüchen zu verhüten. Genug, diese Geometrie sey ein herrliches Erfindungsmittel, wodurch man unzählige, sehr verborgene Lehrsätze kurz und directe erweisen könne, welches nach der Methode der Alten nicht thunlich sey.

Torricelli wendet die Methode des Cavaleri auf die Quadratur der Cykloide an, indem er zeigt, daß in dem Raume zwischen der halben Cykloide (vom Anfange bis zum Scheitel) und der Chorde je zwey Parallelen, in gleicher Entfernung von der Grundlinie und dem Scheitel, zusammengenommen den beyden gleichen correspondirenden Parallelen in dem Halbkreise am Scheitel gleich sind, daher jener Raum dem Halbkreise gleich ist.

Er führt auch noch neue Indivisibilia ein, Kreisumfänge, und Flächen von Kugel, Cylinder und Kegel. Dadurch findet er den Inhalt eines hyperbolischen Körpers, den er solidum hyperbolicum acutum nennt. Dieser entsteht durch die Umdrehung eines hyperbolischen, ins Unendliche nach einer Seite hin sich erstreckenden, Bogens um seine Asymptote. Es hat einen endlichen Inhalt, obgleich es unendlich lang ist, weswegen T. es ein wundersames nennt.

Descartes würdigte des Cavaleri Geometrie keiner Aufmerksamkeit. In einem Briefe an Mersenne (Epist.

T. III. 86.) sagt er, daß er die Sätze in einer Viertelstunde überlaufen habe, weil nach einer ihm von dem jüngern Schooten mitgetheilten Nachricht Cavaleri nur schon bekannte Sätze auf eine neue Art bewiesen hätte, welche mit dem Verfahren übereinkäme, das er zur Vergleichung des Flächenraums an einer Cykloide schon ehemahls gebraucht hätte. Dieses ist der Schluß, daß zwey gemischtlinichte Dreyecke, in welchen je zwey zusammen gehörige parallele Linien gleiche Länge haben, gleich groß sind. (Epist. 58,).

Roberval in Frankreich behauptete in einem Briefe an Torricelli vom J. 1644, daß er schon fünf Jahre vor der Ausgabe der Geometrie des Cavaleri eine ähnliche Methode gefunden hätte, die er aus den Alten geschöpft habe, daß er aber, welches besser sey, Flächen und Körper, jene aus unendlich vielen kleinen Rechtecken, diese aus dergleichen Prismen zusammen setze. (Divers ouvrages de MſS. de l'Acad. roy. Paris 1693.).

Fermat gebrauchte die Methode des Untheilbaren, die er mit Rechnung verband, als eine Abkürzung der Archimedeischen durch umschriebene und eingeschriebene Rechtecke und Prismen. Er wandte sie auch auf andere geometrische Untersuchungen höherer Art, außer der Cubirung der Körper, an. In einem Briefe an Roberval vom J. 1636 sagt er, daß er seine Methode schon vor etwa sieben Jahren einem Freunde mitgetheilt hätte.

Lucas Valerius, Professor der Mathematik in Rom, der 1603 ein Werk über den Schwerpunct lieferte, brachte darin den wichtigsten und fruchtbarsten Theil der alten Exhaustions Methode auf einige allgemeine Lehrsätze. Dadurch scheint er die Geometer seines Zeitalters auf die Vorstellung von der Zusammensetzung geometrischer Grössen aus unendlich vielen, unendlich kleinen Theilen, und die Bemühung jenes umständlichere Verfahren abzukürzen, geleitet zu haben.

Keplers im Anfange dieses Artikels angezeigte Methode, den Inhalt körperlicher Räume zu vergleichen, ist, wie Cavaleri richtig behauptete, von der seinigen ganz verschieden. Auch ist sie auf gewisse Arten von Körpern eingeschränkt, solche nämlich, die durch die Umdrehung eines Kreises oder einer Ellipse um eine Axe in ihrer Ebene, parallel mit einer der Axen der Ellipse entstehen, die Drehungsaxe mag innerhalb oder außerhalb der Figur liegen, oder sie berühren. Den ringförmigen, oder vollen, oder vertieften, oder zugespitzten Körper verwandelt er in einen Cylinder, dessen Grundfläche die sich drehende Figur, die Höhe oder Länge der Umfang des von einem gewissen Puncte der Figur beschriebenen Kreises ist, auf eine ähnliche Art, als man die Kreisfläche in ein Dreyeck verwandelt, dessen Grundlinie der Umfang, die Höhe der Halbmesser ist. Auch zerlegt er den Körper, der durch Umdrehung eines Kreises oder einer Ellipse um eine Chorde (die in letzterer senkrecht auf eine der Axen ist) in zwey Stücke, ein cylinderförmiges, und ein ringförmiges, welches er eine Zone nennt. Diese Zone verwandelt er in einen hufförmigen Abschnitt eines Cylinders mit einer circulären oder elliptischen Grundfläche, und zerlegt diesen in zwey Stücke, wovon das eine eine Zone einer Kugel ist.

Cavaleri mag durch sich selbst auf seine Methode gekommen seyn. In der Vorrede zu der Geometrie erzählt er, daß er anfangs cylindrische und konische Körper aus Ebenen, die sich in der Axe schneiden, habe zusammensetzen, und aus den Verhältnissen dieser Ebenen das Verhältniß der Körper selbst herleiten wollen. Allein da er eingesehen, daß dieses unthunlich sey, so habe er die Linien und Ebenen parallel mit einander gelegt, und aus deren Verhältnissen die Vergleichung der Figuren und Körper gefunden.

Zu vergleichen ist

Montucla histoire des Mathém. nouvelle édit. T. II. p. 37 — 42.

Pfleidereri dissert. qua Kepleri methodus solida quaedam sua dimetiendi illustratur. Tubingae 1795, worin viele hieher gehörige literärische Nachrichten vorkommen.

Kästners Geschichte der Mathem. Bd. 3. S. 205.

Centrobaryca methodus s. regula ist das Verfahren, den Inhalt einer Fläche oder eines Körpers, die durch die Umdrehung einer Linie oder Figur um eine Axe erzeugt werden, jene vermittelst des Schwerpuncts der beschreibenden Linie, diesen vermittelst des Schwerpuncts der Fläche der erzeugenden Figur anzugeben. Von κεντρον und βαρυς, schwer.

Die Regel ist: die Fläche oder der Körper, die durch die Umdrehung einer Linie oder Figur um eine Axe erzeugt werden, werden durch das Product aus der erzeugenden Größe (Linie oder Fläche) in den Weg ihres Schwerpunctes dargestellt.

Diese Regel heißt gewöhnlich Guldins Regel, weil Guldin (ein Jesuit aus St. Gallen gebürtig) sie in seinem Werke de centro gravitatis 1635—1642 vorgetragen, und auf viele Fälle angewandt hat. Sie findet sich aber schon in des Pappus mathem. Sammlungen am Ende der Vorrede zum 7ten Buche, und schon in der ersten Ausgabe von 1588. Guldin erwähnt dies gar nicht, ob er gleich das Werk des Pappus häufig anführt. (Montucla T. I. p. 330.).

Beyspiel 1. Ein Kreis wird durch die Drehung des Halbmessers um einen Punct beschrieben. Der Schwerpunct des Halbmessers liegt auf der Mitte desselben; der Weg dieses Punctes ist ein Kreis mit der Hälfte des Halbmessers beschrieben. Dieser Kreis mit der beschreibenden Linie, dem Halbmesser, multiplicirt giebt einen Inhalt, der dem von diesem beschriebenen Kreise gleich ist, übereinstimmend mit dem, was die Kreismessung lehrt.

Beyspiel 2. Auf eine ähnliche Art wird gefunden, daß die Oberfläche eines senkrechten Kegels durch das Product aus der Seite des Kegels in den von dem mittlern Puncte derselben beschriebenen Kreisumfang ausgedruckt wird.

Beyspiel 3. Es sey BAC (Fig. 70. Tab. IV.) ein bey A rechtwinklichtes Dreyeck, durch dessen Drehung um AB ein Kegel beschrieben wird. Man halbire AC in D, ziehe BD, und nehme $DE = \frac{1}{3} BD$, so ist E der Schwerpunct des Dreyecks. Es sey EF parallel mit AC, so ist der mit FE beschriebene Kreisumfang der Weg des Schwerpuncts. Dieser multiplicirt mit der erzeugenden Fläche BAC ist der Inhalt des Kegels. Es sey $1 : \pi$ das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange eines Kreises, so ist der Weg des Schwerpuncts $= 2\pi . FE = \frac{4}{3}\pi . AD = \frac{2}{3}\pi . AC$. Das Dreyeck ist $= \frac{1}{2} . AB \times AC$; also ist der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}\pi . AB \times AC$ qu, oder gleich dem dritten Theile des Cylinders mit dem Halbmesser AC und der Höhe AB, wie in der Geometrie erwiesen wird.

Die Regel ist gegenwärtig von keinem Nutzen für die Berechnung der Körper und ihrer Oberflächen, weil es gewöhnlich schwerer ist, den Abstand des Schwerpunctes von der Drehungsaxe zu finden als jenes. Die Geometer des 17ten Jahrhunderts, welche noch keine allgemeine Methoden zu geometrischen Vergleichungen hatten, mußten einzelne Hülfsmittel dazu suchen. Inzwischen ist der Satz für sich merkwürdig, weil er die Relation zwischen dreyerley Größen, der Länge einer Linie oder dem Inhalt einer Figur, der beschriebenen Fläche oder dem Körper, und dem Abstande des Schwerpuncts der erstern zeigt.

Man kann sich dieses Satzes bedienen, den Abstand des Schwerpunctes einer Linie oder Fläche von der Axe der Drehung zu finden, wenn die beiden andern Größen bekannt sind. Z. B. man wolle den Schwerpunct eines Halbkreises finden. Die von demselben beschriebene Ku-

gel ist $= \frac{4}{3}\pi r^3$, wenn r der Halbmesser ist. Der Inhalt des Halbkreises ist $\frac{1}{2}\pi r^2$. Also ist der Weg des Schwerpunctes bey einer ganzen Drehung $\frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{8}{3} r$. Dieses ist der Umfang des beschriebenen Kreises, dessen Halbmesser folglich $\frac{4r}{3\pi}$ ist, der Abstand des Schwerpunctes vom Mittelpuncte.

Man suche den Schwerpunct des halben Kreisumfanges. Da die von demselben beschriebene Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$, und der halbe Umfang $= \pi r$ ist, so ist der ganze Weg des Schwerpunctes $= 4r$, und der Abstand desselben von dem Mittelpuncte $= \frac{2r}{\pi}$.

Guldin erwies seinen Satz theils durch Induction in solchen Fällen, wo die erzeugte Größe ein schon bekanntes und erwiesenes Verhältniß zu der erzeugenden hat, und die Lage des Schwerpunctes der letztern auch bekannt ist. Dann wollte er auch einen directen Beweis führen, der aber sehr mißlungen ist. Er glaubte, weil der Abstand des Schwerpuncts von der Axe der Drehung ein gewisses Mittel zwischen den Abständen der Theile der erzeugenden Größe hält, und weil dieser Punct ein einziger ausgezeichneter ist, so müsse ihm vor allen andern Puncten die in dem Satze angegebene Eigenschaft zukommen. Es ist besser, sich an die Induction allein zu halten, als solche Vermuthungsgründe zu gebrauchen.

Aus der Eigenschaft des Schwerpunctes läßt sich der Satz leicht herleiten. Wenn in einer Ebene mehrere schwere Puncte auf derselben Seite einer geraden Linie liegen, und von ihnen Perpendikel auf diese Linie gezogen werden, so ist die Summe der Producte aus dem Gewichte jedes Punctes in seine Entfernung von der gegebenen Linie gleich dem Producte aus der Summe aller Gewichte in den Abstand des Schwerpunctes. Man lasse die Ebene mit den Puncten um die gegebene Linie sich drehen, und

einen Umlauf vollenden, so ist die Summe der Producte aus dem Gewichte jedes einzelnen Punctes in den beschriebenen Weg gleich dem Producte aus der Summe aller in den Weg des Schwerpunctes, weil die Kreisumfänge sich wie die Halbmesser oder Entfernungen von der Drehungs-Axe verhalten.

Zuerst lasse man die Puncte alle gleich schwer seyn, und auf einer gegebenen Linie liegen. Es ist alsdann die Summe der Producte aus dem Gewichte jedes Punctes in seinen Weg gleich dem Producte aus dem Gewichte eines einzelnen Punctes in die Summe aller Wege. Da der Satz für jede beliebige Anzahl Punete richtig ist, so ist er auch für die ganze Linie richtig, oder es ist das Product aus dem Gewicht eines einzelnen Puncts in die Oberfläche gleich dem Producte aus der Summe aller Gewichte in den Weg des Schwerpunctes. Die Summe aller Gewichte ist das Gewicht eines einzelnen Punctes mit der Länge des Bogens multiplicirt. Dadurch geht das Gewicht des einzelnen Punctes aus der Vergleichung heraus.

Ist die erzeugende Größe eine ebene Figur, die sich um eine geradlinichte Seite dreht, so ziehe man auf diese irgend eine Anzahl senkrechter Linien, die alle als schwer, und in gleichen Theilen gleich schwer betrachtet werden Ihre Schwerpuncte halbiren jede derselben. Wird in jedem das Gewicht der ganzen Linie vereinigt, so entsteht eine Reihe schwerer Puncte, und es ist das Gewicht aller multiplicirt in den Weg des gemeinschaftlichen Schwerpunctes gleich der Summe der Producte jedes einzelnen Gewichts in den Weg desselben; das ist, (wenn für die Gewichte die denselben proportionalen Längen gesetzt werden), die Summe aller senkrechten Linien auf die Drehungsaxe multiplicirt in den Weg ihres gemeinschaftlichen Schwerpunctes ist gleich der Summe der Producte jeder Linie in den Weg ihres Mittels, oder in den Umfang des von ihrer Hälfte beschriebenen Kreises; oder jenes Product ist gleich der Summe aller Kreisflächen, die von den senkrechten Linien um die Drehungs-Axe beschrieben werden. Da

dieses für jede Anzahl von Linien gilt, so gilt es auch für die Fläche, welche sie ausfüllen, und den Körper, den die Kreisflächen ausfüllen. Also u. s. w.

Tacquet beschäftigt sich viel mit der geometrischen Anwendung des Schwerpunctes, in dem fünften Buche der cylindricorum et annularium, welches in der Sammlung seiner Werke denselben beygefügt ist.

Characteres s. Bezeichnung und Zeichen.

Characteristica der Logarithmen, s. Logarithmen und Kennzifer.

Characteristisches Dreyeck in einer krummen Linie ist dasjenige, welchem sich das gemischtlinichte zwischen dem Unterschiede zweyer Ordinaten, dem Unterschiede der zugehörigen Abscissen und dem Bogen der krummen Linie, zu dessen Endpuncten die Ordinaten gehören, immer mehr nähert, je kleiner der Bogen genommen wird. Es kann nur gedacht, nicht sinnlich dargestellt werden. Die Benennung ist sehr schicklich, weil die Verhältnisse der Seiten dieses Dreyecks die krumme Linie charakterisiren. Leibnitz hat sie zuerst gebraucht. S. Opp. T. III. p. 85. 128. 193. 291. Barrow leitete aus diesem Dreyeck seine Methode her, berührende an eine krumme Linie durch einen gegebenen Punct zu ziehen.

Chilias ist das griechische Wort für Tausend. Im Zählen machen wir im Deutschen mit jeder Chiliade einen Abschnitt.

Chiliagonum, ein Vieleck von tausend Seiten. Der Centriwinkel eines regulären ist 21′ 36″, die Seite ist 62831439 für den Halbmesser 10000 Millionen.

Chorde, oder Sehne, ist die gerade Linie, welche zwischen zwey Puncten einer krummen Linie liegt, ohne sie in einem Puncte zwischen denselben zu schneiden. In krummen Linien, die in sich selbst wiederkehren, wie Kreis

und Ellipse gehört eine Chorde sowohl zu dem einen, als zu dem andern Theile, zu dem größern wie zu dem kleinern. Von der Berechnung der Chorden in einem Kreise aus den zugehörigen Winkeln s. Cyklometrie und reguläre Figur.

Circul, s. Kreis.

Circularstücke in einem rechtwinklichten sphärischen Dreyecke sind die beiden Katheten, das Complement der Hypotenuse zum Quadranten, und die Complemente des beiden spitzen Winkel (der innern oder äußern) zu einem Rechten. In einem sphärischen Dreyecke, dessen eine Seite ein Quadrant ist, sind es die beiden daran liegenden Winkel, die Complemente der beiden andern Seiten zum Quadranten, und das Complement des gegen über liegenden Winkels (des innern oder äußern spitzen) zum Rechten. Neper hat sie zum Behuf seiner Regel für diese beiden Gattungen von Dreyecken circulares genannt. (Logarithm. canonis descriptio. L. II. c. 4.) Das gesuchte wird als das mittlere angesehen, die gegebenen Dinge sind entweder die zunächst anliegenden (circumposita) oder die entgegengesetzten (opposita), d. i., welche auf die anliegenden folgen, immer mit Übergehung des rechten Winkels oder der Quadrantalseite. Die Regel ist in dem Artikel, Nepers Regel, zu finden.

Circulirender, oder periodischer, **Decimalbruch** ist ein solcher, worin dieselbe Ziffer oder mehrere immerfort in ihrer Ordnung wiederkehren, wie 4,7390 7390 7390... Alle Decimalbrüche, die nicht irgendwo abbrechen, sind periodische. S. Decimalbruch.

Circulzahl oder **Kugelzahl** ist eine solche, von welcher eine Potenz sich mit ihr selbst endigt. Z. B. von 5 ist das Quadrat 25, der Würfel 125: von 6 ist das Quadrat 36, die Würfel 216. Von 76 ist das Qua-

drat 5776, der Würfel 438976. Dieses ist von keinem Nutzen.

Circumferenz, s. Umfang.

Cissoide ist eine krumme Linie der zweyten Classe, deren Gleichung ist $x^3 = (a - x)y^2$. Sie ist von einem griechischen Geometer, Diokles, erdacht, um das bey den Alten wichtige Problem, wie zwischen zwey gegebnen Größen die zwey mittlern stetigen (geometrisch) proportionalen zu finden seyn, aufzulösen. Eutocius hat die Construction des Diokles in seinem Commentar über das zweyte Buch des Archimedes von der Sphäre und dem Cylinder uns erhalten. Diokles hat von der krummen Linie nur einen Theil in Betracht gezogen, so viel ihm zu seiner Absicht nöthig war. Die neuere Geometrie liefert ihre Beschaffenheit vollständig.

Es ist (Fig. 71. Tab. V.) ADBd ein Kreis über dem Durchmesser AB aus dem Mittelpuncte C beschrieben, in welchem CD senkrecht auf AB ist. Man nehme die gleichen Bogen DN, Dn, und ziehe die Ordinaten des Kreises NP, np, auf AB senkrecht, nebst den Chorden AN und An. Der Durchschnitt von NP und An giebt einen Punct M der Cissoide innerhalb des Kreises, und der Durchschnitt der verlängerten np und AN giebt einen Punct m der Cissoide außerhalb des Kreises.

Die Gleichung für die krumme Linie wird leicht gefunden. Man bemerke nur im voraus, daß $AP : PN = PN : PB$. Verbindet man damit die beiden identischen Verhältnisse $PN : PB = PN : PB$, so ist $AP : PB = PN^2 : PB^2$. Nun ist

$$AP : PM = Ap : pn = PB : PN,$$

also $AP^2 : PM^2 = PB^2 : PN^2 = PB : AP$,

folglich ist $AP^3 = PM^2 \times PB$.

Man setze $AB = a$; $AP = x$; $PM = y$,

so ist $x^3 = y^2 (a - x)$.

Hier ist x die erste der beiden mittlern proportionalen zwischen y und a — x. Denn die dritte proportionale zu y und x ist $\frac{x^2}{y}$, und die vierte $\frac{x^3}{y^2}$, welche der gefundenen Gleichung zufolge a — x ist. Die Ordinate am Kreise ist die zweyte von den beiden mittlern proportionalen. Denn $PN^2 = x(a - x) = \frac{x^4}{y^2}$, also $PN = \frac{x^2}{y}$. Die vier stetigen Proportionalen sind demnach

PM : AP : PN : PB.

Nimmt man statt der Coordinaten AP, PM, PN die Ap, pm, pn, so ist auf gleiche Art, wie zuerst, $Ap^3 = pm^2 \times pB$, und $pn^2 = Ap \times pB$. Setzt man $Ap = x$; $pm = y$, so ist für den Punct m ebenfalls $x^3 = y^2(a - x)$, und die vier stetigen proportionalen sind pm : Ap : pn : pB.

Die Linie AMn schneide den Halbmesser CD in Q, und BM denselben in R, so ist AC : CQ = AP : PM, und CR : BC = PM : BP, also CR : CQ = AP : BP = PM : PN. (Nämlich PM : PN ist das duplicirte Verhältniß von PM : AP, wie AP : BP von AP : PN oder PM : AP). Es sey CS die mittlere proportionale zwischen CR und CQ, so ist CR : CS = PM : AP, und auch CS : CQ = PM : AP. Also sind CR : CS : CQ : CA drey gleiche Verhältnisse, und die vier Linien CR, CS, CQ, CA stetig proportional.

Hieraus ergiebt sich nun die Construction zur Erfindung der zwey mittlern Proportionalen zwischen zwey gegebenen CR, CA. Mit der einen (hier der größern)

CA als Halbmesser beschreibe man einen Kreis, und zeichne die zugehörige Cissoide. Die andere CR trage man auf den senkrechten Halbmesser CD von C nach R, ziehe BR, welche die Cissoide in M treffe; dann AM, welche CD in Q schneide; und suche zwischen CQ nnd CR die mittlere proportionale CS, so sind CR, CS, CQ, CA die vier stetigen Proportionalen, von welchen CR, CA die gegebenen sind.

Ist CR größer als CA oder CD, so trifft BR die Cissoide in einem Puncte außerhalb des Kreises, und Q fällt auch jenseits D, zwischen D und R.

Die Linie BT, welche in B auf AB senkrecht ist, ist Asymptote der Cissoide. Dieses ist aus der Construction klar.

Für den andern Halbkreis AdB ist ein ganz gleicher Zweig der Cissoide A d μ mit der Asymptote B t vorhanden.

Diokles zeichnet bloß den Bogen AMD des einen Zweiges. Die Alten haben in der Folge noch den Bogen Ad zugefügt, ohne doch die Linie ins Unendliche fortgehen zu lassen. Geminus nannte, wie Proklus in seinem Commentar über Euklides anführt, die Cissoide eine zusammen gesetzte Linie, die sich breche und einen Winkel mache. Es kann auch seyn, daß sie in dem Quadranten BCD einen Bogen, wie den AMD hinzugefügt haben, der mit diesem in D zusammenkam. Geminus bemerkt, daß die Cissoide von dem Epheublatte (κισσος, Epheu) ihren Namen, Epheuähnliche, erhalten habe.

Der Punct A, wo die beiden Zweige AD nnd Ad zusammen kommen, ist eine Spitze (cuspis), wo AB die gemeinschaftliche berührende ist. Die Tangente des Winkels, welchen eine krumme Linie mit einer normalen Ordinate macht, ist $\frac{dx}{dy}$, welcher Quotient für die Cissoide

ist $= \frac{2ay - 2xy}{3x^2 + y^2}$. Dieser wird in A $= \frac{0}{0}$. Um den Werth in diesem Falle zu bestimmen, setze man den Quotienten allgemein $= \frac{Q}{P}$, so ist, wenn Zähler und Nenner Null werden, derselbe $= \frac{dQ : dy}{dP : dy}$ $= \frac{2a - 2x - 2y dx : dy}{6x dx : dy + 2y} = \frac{2a}{0} =$ unendlich, das ist, die krumme Linie wird in A von der Abscissenlinie berührt. (Berührende Linie, 24.). Es erhellt dieses auch daher, daß die Tangente des Winkels der krummen Linie mit der Abscisse in A sich immer mehr dem Werthe von $\frac{y}{x}$ in diesem Puncte nähert. Dieser Werth ist $= 0$.

Der cissoidalische Raum APM oder Apm läßt sich quadriren, doch mit Zuziehung eines Kreissectors. Der ganze, ins Unendliche sich erstreckende Raum zwischen dem unendlichen Zweige Am, der Asymptote und dem Durchmesser AB, ist das Dreyfache der Fläche des Halbkreises, s. Quadratur.

Der Bogen AM oder Am läßt sich durch Hülfe der Logarithmen rectificiren, s. Rectification.

Newton hat eine sinnreiche Construction, die Cissoide durch eine stetige Bewegung zu beschreiben, angegeben, Arithm. univ. de aequationum constructione lineari. p. 231. Sie ist folgende. Über AB (Fig. 72) als Durchmesser ist ein Halbkreis ADB beschrieben. Durch den Mittelpunct sey die unbestimmte CDH senkrecht auf AB gesetzt. EFG ist ein rechter Winkel, dessen Schenkel FG = AB ist. Mit dem Endpuncte G bewege sich dieser auf CH, so daß der andere Schenkel immer durch den Punct E gehe, dessen Abstand CE von

C dem Durchmesser AB gleich ist. Die krumme Linie, welche der Punct M, der FG halbirt, bey dieser Bewegung des Winkelmaßes beschreibt, ist die Cissoide.

Man ziehe MP und FQ senkrecht auf CH, und FK schneide sie in R. Es ist

CE + FQ : CQ = FQ : RQ = PG : PM,

oder CE + 2MP : CP − PG = PG : PM.

Man setze AC = a, CP = x; PM = y, PG = z, so ist aus dieser Proportion

$$2(a+y)y = (x-z)z.$$

Da $z^2 = a^2 - y^2$, so ist

$$a^2 + 2ay + y^2 = xz, \text{ daher}$$

$$(a+y)^4 = x^2z^2 = x^2(a+y)(a-y),$$

also

$$(a+y)^3 = x^2(a-y).$$

Man nehme die Abscissenlinie auf AB von A an, ziehe MS darauf senkrecht, und setze AS = u, so ist

$$u = a + y, \text{ und } u^3 = x^2(2a - u).$$

Dieses ist die Gleichung, die vorher für die Cissoide gefunden ist.

Wallis fand durch seine Arithmetica Infinitorum die Quadratur und Cubatur der Cissoide, nebst der Lage ihres Schwerpuncts. Operum T. I. p. 545.

Reimer in der historia duplicationis cubi, Göttingae 1798. liefert sehr gute Nachforschungen über Diokles und über die Cissoide, wie die Alten sie kannten, nebst der Übersetzung seiner Auflösung des gedachten Problems aus Eutocius. Er zeigt aus einer Anführung des Proklus, daß die Cissoide schon dem Geminus, der im ersten Jahrhundert vor Chr. G. gelebt hat, bekannt gewesen, dagegen Montücla u. a. den Diokles erst ins fünfte Jahrh. nach Chr. G. setzen.

Coefficient ist die gegebene oder die unveränderliche Größe, welche in einer Gleichung oder in einer Reihe mit der unbekannten oder den veränderlichen als Factor verbunden ist. So die Größen a, b, c in der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, oder A, B, C, D, etc. in der nach x geordneten Reihe, $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ Wo die unbekannte oder veränderliche Größe keinen Factor hat, vertritt die Einheit die Stelle desselben. In unsern dekadischen Zahl-Ausdrücken ist jede einzelne Ziffer der Coefficient einer zugehörigen Potenz der Zehn. Wie die unbekannten Coefficienten in einer Reihe aus den Coefficienten in andern zugeordneten Reihen bestimmt werden, zeigt der Artikel, Methode der unbestimmten Coefficienten.

Coelometria ist die Wissenschaft der Regeln, Gefäße auszumessen, ein nicht üblicher Ausdruck für die Visirkunst, von κοιλος, hohl.

Coevoluten sind zwey einander zugeordnete krumme Linien, welche eine die andere durch Abwickelung erzeugen. Es seyn AB, ab, (Fig. 73. Tab. V.) Bogen der beiden krummen Linien; an beide sey ein völlig biegsamer Faden AMPma ohne Dicke gelegt, und in den Puncten M, m, nach den daselbst berührenden MP, mP gespannt. Ferner seyn MN, mn gleich große Bogen, und in den Puncten N und n seyn NQ und nQ die berührenden, die sich in Q schneiden. Ist nun die Summe NQ + nQ hier, so wie für jede andere gleiche Bogen MN, mn, gleich der Summe MP + Pm, so sind AB, ab Coevoluten. Der Durchschnittspunct der beiden berührenden beschreibt nach Art eines den Faden MPm spannenden Stiftes eine krumme Linie CD, welche für die berührenden, wie MP, mP, eine zurückstrahlende Linie ist, wenn diese berührenden als auffallende an CQ betrachtet werden.

Tschirnhausen hat die Coevoluten ersonnen, und Leibnitz bemerkt, daß sie dienen, gewisse Aufgaben aufzulösen.

Man sehe seine Opera, Tom. III. p. 277 und 398; auch das Commercium philos. et mathem. Leibnitii et Jo. Bernoulli an mehrern Stellen.

In dem Artikel, Catacaustica (16.) ist gezeigt, daß die Summe des auffallenden und zurückgeworfenen Strahls, wenn die Strahlen aus einem Puncte auffallen, mit dem Bogen der Brennlinie gleich viel wächst. Hier rückt der strahlende Punct gerade so viel fort, als der Bogen der Brennlinie zunimmt; daher bleibt die Summe des auffallenden und zurückgeworfenen Strahls unverändert, und die Bogen zwischen den zusammengehörigen Puncten sind gleich groß.

Da die Liebhaberey an mannigfaltigen Constructionen der krummen Linien jetzt bey weitem nicht so stark ist, als vor hundert Jahren, so mag das hier beygebrachte vollkommen hinreichen.

Combination ist eine Verbindung von einigen Dingen aus mehrern gegebenen, ohne Rücksicht auf die Ordnung der verbundenen Dinge. Eine Veränderung in der Ordnung der Dinge allein macht keine andere Combination. Die Dinge können Größen seyn, von welchen die verbundenen in einander multiplicirt, zu einander addirt, oder zum Theil subtrahirt, oder auch bloß zusammen gestellt werden, wie die in einem Lotto gezogenen Nummern oder die Augen auf verschiedenen Würfeln. Sie können aber auch andere Dinge seyn, als: Personen, Buchstaben, Wörter, Farben, Karten, einfache Stoffe des Mineralreichs, u. s. w.

1. Die verbundenen Dinge nenne man allgemein Elemente. Die Anzahl der combinirten Dinge oder Elemente heißt der Exponens der Combination. Hierbey unterscheidet man Combinationen an sich und zu bestimmten Summen, mit oder ohne Wiederholungen.

2. **Die Combinationen werden in Classen nach der** Anzahl der verbundenen Elemente abgetheilt. Ein ein=

zelnes aus den vorhandenen Elementen heißt eine Union, und eine oder mehrere derselben machen die erste Classe der Combinationen aus, obgleich dieses Wort grammatisch eine Mehrheit, eigentlich eine Zweyheit andeutet. Man sieht hiebey nur auf das Ausheben aus mehrern Dingen. Eine Verbindung von zwey Elementen heißt eine Binion; von drey eine Ternion; von vier eine Quaternion; von fünf eine Quinion; von sechs eine Sexnion, u. s. w. Was eine Nullion sey, wird sich unten (42.) in einem Beyspiele zeigen.

3. Die Abtheilungen oder Ordnungen in den Classen werden nach den Elementen gemacht, die in der ersten Stelle der einzelnen Combinationen stehen. So gehören aaa, aab, abc zu der ersten Ordnung in der dritten Classe; bbb, bbc, bcd zu der zweyten in derselben. Die Ordnung ist der Zahl nach dieselbe mit der Stellenzahl des anfangenden Buchstabens, wenn die Elemente nach den folgenden Buchstaben geordnet werden. Die Unterordnungen kann man durch die nach dem ersten Buchstaben folgenden angeben. So gehören abbd, abce zu der Unterordnung ab in der vierten Classe.

4. In den Combinationen sind entweder alle Elemente verschieden, oder eines oder mehrere werden wiederholt, z. B. abcd, aabc, aaabbcd. Die wiederholten Elemente kann man wie Potenzen bezeichnen. — Die Zahl, welche angiebt, wie oft ein Element genommen wird, nennt man den Wiederholungs-Exponenten. So ist 3 der Wiederholungs-Exponent von a, und 2 der von b in der Combination $a^3 b^2 cd$.

5. Die Beschaffenheit einer Combination in Rücksicht auf die Anzahl der Elemente, und die Verschiedenheit oder Wiederholung derselben macht die Form der Combination aus. Sie hängt nicht von der Ordnung ab, welche man die Elemente befolgen zu lassen für gut findet.

6. Combinationen, die in der Anzahl der Elemente und in den Wiederholungen, wenn solche vorhanden sind, übereinkommen, sind ähnlich, und machen eine Species, Art oder Gattung aus. Z. B. a b c und b c d; ferner a a b c, b b c d, b c c d; oder $a^3 b^2 c$; $c^2 d^5 e$, $b c^2 d^3$.

7. Die Elemente der Combinationen müssen gut oder regelmäßig geordnet werden, d. i. sie müssen nach der Ordnung der sie bezeichnenden Buchstaben oder der Zahl ihrer Stellen auf einander folgen. Z. B. die Combination a d f f c ist nicht gut geordnet, sie muß geschrieben werden, a c d f f. Dieses ist nöthig, wenn bey der Aufstellung der Combinationen einer Classe Verwirrung und Unvollständigkeit vermieden werden sollen.

8. Die Combinationen einer Classe werden lexikographisch, wie die Wörter in einem Wörterbuche, geordnet. Zwey nächste Combinationen enthalten also in der ersten Stelle, wo sie von einander abgehen, zwey nächst auf einander folgende Buchstaben, und die zweyte derselben nach dem veränderten Buchstaben die darauf unmittelbar folgenden, so viele als die Classe erfordert. Z. B. wenn die zu combinirenden Elemente sind, a, b, c, d, e, f, g, so sind die Combinationen aus der vierten Classe lexikographisch geordnet; a b c d, a b c e ... a b f g, a c d e ... a c f g, a d e f ... a e f g, b c d e .. b e f g, c d e f .. c e f g, d e f g, an der Zahl 35, wo man die Lücken leicht ausfüllen kann.

9. Variationen sind Combinationen mit allen Versetzungen der darin vorhandenen Elemente. Die variirten Combinationen können nicht nach der Folge der bezeichnenden Buchstaben oder Zahlen in den einzelnen Complexionen geordnet bleiben. Doch muß eine gewisse Ordnung in der Folge der Variationen jeder Combination beobachtet werden, s. Versetzungen. Die Combinationen behalten die in (8.) festgesetzte Ordnung.

10. Eine combinatorische Involution der Art, wie hier zunächst vorkommen werden, ist eine Aussonderung aller Combinationen oder Variationen, in welchen die Summe der Stellenzahlen der verbundenen Elemente von der Einheit bis zu einem gewissen Werthe steigt; s. unten 37. f. f.

I. Anzahl der Combinationen jeder Classe ohne Wiederholungen.

11. Die Anzahl der Verbindungen nach m aus n verschiedenen Elementen, mit Inbegriff aller Variationen, ist $= n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

Ein einzelnes läßt sich aus n Elementen n mahl verschiedentlich nehmen. Setzt man zu jedem derselben nach der Reihe eines der übrigen $n-1$, so entstehen $n(n-1)$ Verbindungen nach 2, dergleichen ab, ba, ac, de sind. Wird zu jeder dieser eines der übrigen $n-2$ Elemente gesetzt, so entstehen $n(n-1)(n-2)$ Verbindungen nach 3, dergleichen abc, bac, abd, ade, def sind. Aus der Verknüpfung jeder dieser Verbindungen entstehen $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Verbindungen nach 4, wie abcd, bacd, abce, abef, aefg, efgh, u. s. w. Solchergestalt wird bey jeder Zufügung eines Elements die Anzahl der Verbindungen mit Inbegriff ihrer Variationen immer mit der nächst kleinern Zahl multiplicirt, und für m Elemente ist die Anzahl der Verbindungen, mit Rücksicht auf die Ordnung der Elememte, die angegebene.

Für $m = n$ ist nur eine Verbindung, aber mit $n(n-1)\ldots 2 \cdot 1$ Variationen.

12. Die Anzahl der Combinationen nach m aus n verschiedenen Elementen, ohne Variationen, ist

$$= \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \quad \cdot m},$$

Es sey diese Anzahl = N. Aus jeder Combination von m Elementen entstehen durch die Versetzung derselben, sie selbst auch gerechnet, $m(m-1)(m-2)\ldots 2.1$ Variationen. Also ist die Menge aller Verbindungen nach m, mit Inbegriff der Variationen = $m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 2.1 \times N$. Diese ist aber auch $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)$; also ist

$$N = \frac{n.n-1\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots m}.$$

Es ist aus n verschiedenen Elementen

Die Anzahl der Unionen $= \frac{n}{1}$.

Die Anzahl der Binionen $= \frac{n.n-1.}{1.2}$.

Die Anzahl der Ternionen $= \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}$.

Die Anzahl der Quaternionen $= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}$.

u. s. f.

14. Wenn 2m größer als n, das ist, wenn m größer als n − m ist, so nehme man das Complement n − m des Exponenten m zu der Anzahl der Elemente n, und suche für den Exponenten n − m die Anzahl der Combinationen. Denn nach der Formel (13.) ist die Anzahl der Combinationen nach m =

$$\frac{n.n-1\ldots(m+1)\,m\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots(n-m)(n-m+1)\ldots m} =$$

$\frac{n.n-1\ldots\ldots m+1.}{1.2\ldots\ldots n-m.}$, da die Factoren $m\ldots\ldots(n-m+1)$ im Zähler sich gegen eben so viele solche im Nenner aufheben. Dieses ist aber die Anzahl der Combinationen für den Exponenten n − m.

15. Man kann n — m Dinge aus n Dingen gerade eben so oft nehmen als m Dinge aus derselben Anzahl, z. B. 27 Karten aus 40 so oft als 13 aus 40 Karten.

16. Exempel. I. In dem Hazardspiele, welches Lotto heißt, werden 90 Nummern in einen Kasten gethan, und daraus 5 gezogen. Die Binionen, Ternionen, Quaternionen heißen hier Amben, Ternen, Quaternen.

Aus allen 90 Nummern ist die Anzahl

der Amben $= \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$

der Ternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$

der Quaternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190.$

Aus den gezogenen Nummern sind nur 10 Amben, 10 Ternen und fünf Quaternen möglich. Wer eine Ambe besetzt, hofft auf einen Gewinn in einer Lotterie von 4005 Loosen, mit 10 Gewinnen; bey einer Terne auf einen Gewinn in einer Lotterie von 117480 Loosen mit 10 Gewinnen; und bey einer Quaterne auf einen Gewinn in einer Lotterie von 2555185 Nieten gegen 5 Gewinne.

17. Exempel. II. Im Lombre ist die Menge der in den Händen aller drey Spieler zusammen möglichen Spiele $= \frac{40 \cdot 39 \ldots 28 \ldots 14}{1 \cdot 2 \ldots 13 \ldots 27} = \frac{40 \ldots 28}{1 \ldots 13} =$ 12033 22280, weil 27 Karten aus 40 genommen, oder 13 aus 40 zurückgelegt werden.

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele, ist die Menge der Combinationen von 9 Karten aus 40, also $= \frac{40 \cdot 39 \ldots 32}{1 \cdot 2 \ldots 9} = 273\,438880.$

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele ohne Spadille und Basta ist die Menge der Combinationen von 9 Karten aus 38, also $= \frac{38 \cdot 37 \ldots 30}{1 \cdot 2 \ldots 9} =$ 163 011640.

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele mit Spadille und Basta ist die Menge der Combinationen von 7 Karten aus 38, also $= \frac{38 \cdot 37 \ldots 32}{1 \cdot 2 \ldots 7} = 12620256$.

18. Die Anzahl aller Combinationen in allen Classen aus n Elementen ist $= 2^n - 1$.

Es ist die Anzahl der Unionen $= n$; der Binionen $= \frac{n \cdot n-1.}{1 \cdot 2}$; der Ternionen $= \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2.}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; u. s. w. Die Anzahl der Verbindungen aller Elemente ist $= \frac{n \cdot n-1 \ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots n-1 \cdot n}$. Nun ist $(1+1)^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n \cdot n-1.}{1 \cdot 2} \ldots\ldots + \frac{n \cdot n-1 \ldots 1}{1 \cdot 2 \ldots n}$ (Binomischer Lehrsatz. 1.). Also ist die Anzahl der Combinationen in allen Classen $= (1+1)^n - 1 = 2^n - 1$.

Exempel. Die Zahl 2310 hat die einfachen Factoren 2, 3, 5, 7, 11, ohne Wiederholung eines derselben. Sie hat also $2^5 - 1$ Factoren, das ist, 31 Factoren.

II. Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen.

19. Die Anzahl der Combinationen einer gegebenen Form mit Wiederholung eines oder mehrerer Elemente aus n Elementen zu bestimmen.

Man suche zuerst die Anzahl der Combinationen von so viel verschiedenen Elementen, als in derselben vorkommen, und multiplicire diese mit der Anzahl der Versetzungen, die für die Wiederholungs-Exponenten Statt finden, wann diese als einzelne Elemente zusammengestellt werden. Z. B. Die Form der Combinationen sey aaabbcd, die Anzahl aller Elemente, $= n$. Dasselbe

Element kann entweder dreymahl, oder zweymahl oder einmahl genommen werden. Folglich sind für dieselben Elemente a, b, c. d, folgende ähnliche Combinationen mit dem Exponenten 7 möglich.

$a^3b^2cd \quad a^2b^3cd \quad ab^3c^2d \quad ab^2cd^3$

$a^3bc^2d \quad a^2bc^3d \quad ab^3cd^2 \quad abc^3d^2$

$a^3bcd^2 \quad a^2bcd^3 \quad ab^2c^3d \quad abc^2d^3$

Die Anzahl der Vertauschungen ist offenbar die Anzahl der Versetzungen der Wiederholungs-Exponenten 3, 2, 1, 1, welche ist $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$. Vier Elemente, wie a, b, c, d, lassen sich aus n Elementen nehmen $\frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}$ mahl. Folglich ist die Anzahl der Combinationen nach 7 mit den Wiederholungs-Exponenten 3, 2, 1, 1, $= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4} \cdot \frac{1.2.3.4}{1.2}$. Wie in diesem Beyspiele, so in jedem andern Falle.

20. Die Anzahl der Binionen aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen, ist $= \frac{n.n+1.}{1.2}$.

Die Anzahl der Binionen verschiedener Elemente ist $= \frac{n.n-1.}{1.2}$; der Verdoppelungen $= n$, also die Summe $= \frac{n.n+1.}{1.2}$.

21. Die Anzahl der Ternionen aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen ist $= \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}$.

Die Elemente seyn a, b, c, d, etc. Die verschiedenen Formen der Ternionen sind abc, aab, aaa, welche

die Stelle aller übrigen vertreten. Die Anzahl der ähnlichen Gattungen bezeichne man durch ein vorgesetztes N, als N.abc; N. aab; N. aaa, oder N. abc; $N.a^2b$: $N.a^3$. Es ist $N.\,abc = \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}$; $N.\,a^2b = \frac{n.n-1}{1.2}.2.1 = n.n-1$; $N.\,a^3 = n.$ Die Summe dieser drey Zahlen ist die angegebene.

22. Die Anzahl der Quaternionen aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen, ist

$$= \frac{n.n+1.n+2.n+3.}{1.2.3.4}.$$

Die verschiedenen Formen dieser Verbindungen sind: abcd; a^2bc; a^2b^2; a^3b; a^4. Es ist N. abcd

$$= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}; \; N.\,a^2bc$$

$$= \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} \cdot \frac{1.2.3}{1.2} = \frac{n.n-1.n-2.}{1.2};$$

$$N.\,a^2b^2 = \frac{n.n-1.}{1.2} \cdot \frac{2.1}{1.2} = \frac{n.n-1.}{1.2};$$

$$N.\,a^3b = \frac{n.n-1.}{1.2}.\;2.1 = n.n-1.; \; N.a^4 = n.$$

Die Summe dieser Zahlen ist die angegebene.

23. Die Anzahl der Verbindungen von je fünfen aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen, ist

$$= \frac{n.n+1.n+2.n+3.n+4.}{1.2.3.4.5}.$$

Die verschiedenen Formen der Verbindungen sind hier: abcde; a^2bcd; a^3bc; a^2b^2c; a^4b; a^3b^2; a^5.

Es ist $N.\,abcde = \frac{n\;.\;.\;.\;n-4.}{1\;.\;.\;.\;5}$; $N.\,a^2bcd$

$= \frac{n \,.\, .\, .\, n-3.}{1 \,.\, .\, .\, .\, 4} \cdot 4$; $N.\, a^3bc = \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} \cdot 3$;

$N.\, a^2b^2c = \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} \cdot 3$; $N.\, a^4b = \frac{n.n-1}{1.2} \cdot 2$;

$N.\, a^3b^2 = \frac{n.n-1.}{1.2} \cdot 2$; $N.\, a^5 = n$. Die Summe aller dieser Zahlen ist die angegebene.

24. Da die Formen der Verbindungen, und die Anzahl in jeder Gattung nach gewissen Gesetzen bestimmt werden, so darf man schließen, daß das in den vier berechneten Fällen sich zeigende Gesetz allgemein sey, nämlich, daß die Anzahl der Verbindungen von je m Elementen aus n, ohne und mit Wiederholungen, ist

$$\frac{n.n+1.n+2 \ldots n+m-1.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m}.$$

25. Es läßt sich auf einem andern Wege, als dem vorher, zur Übung in den Combinationen genommenen, leicht erweisen. Die Elemente seyn a, b, c, d, etc. an der Zahl n. Man multiplicire sie nach der Reihe durch a, dann von b an durch b; von c an durch c, u. s. f. und setze den Multiplicator voran. So erhält man alle Binionen, wie ab und aa, ohne Versetzungen und jede von den andern verschieden. Die Anzahl der mit a anfangenden ist $= n$, der mit b anfangenden, $= n - 1$, der mit c $= n - 2$, u. s. f. Folglich ist die Anzahl aller die Summe der Reihe n; $n - 1$; $n - 2$; . . . 2; 1.

Diese Summe ist $= \frac{n+1.n}{1.2}$ (arithm. Reihe 6.).

Die Binionen multiplicire man auf dieselbe Art wie die Unionen, nämlich erstlich alle durch a; dann die von der Ordnung b und den folgenden durch b; darauf die von der Ordnung c und den folgenden durch c, u. s. f. den Multiplicator immer vorangesetzt. So erhält man folgende Partialsummen der verschiedenen Ternionen nach ihren

Ordnungen: I. $\frac{n+1.n}{1.2}$; II. $\frac{n.n-1.}{1.2}$

III. $\frac{n-1.n-2.}{1.2}$ .... letzte $= \frac{2.1}{1.2}$. Die Summe dieser arithmetischen Reihe der zweyten Ordnung erhält man am leichtesten durch den binomischen Lehrsatz, (Binomial-Coefficienten. 6.). Das erste Glied ist der zweyte Binomial-Coefficient in der $(n+1)$ten Potenz. Die Summe aller Glieder ist der dritte Coefficient in der $(n+2)$ten Potenz $= \frac{n+2.n+1.n}{1.2.3}$. Mit den Ternionen verfahre man auf dieselbe Art, wie mit den Unionen und Binionen, so erhält man die Partial-Summen der Quaternionen nach ihren Ordnungen:

I. $\frac{n+2.n+1.n}{1.2.3}$; II. $\frac{n+1.n.n-1.}{1.2.3}$;

III. $\frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}$.... letzte $= \frac{3.2.1}{1.2.3}$

Die Summe dieser dritten Binomial-Coefficienten ist $= \frac{n+3.n+2.n+1.n}{1.2.3.4}$, als die Summe aller Quaternionen.

Auf diese Art erhellt deutlich, daß die Anzahl der Combinationen von m Elementen aus n, ohne und mit Wiederholungen, aber ohne Versetzungen, ist

$$\frac{n.n+1.n+2....n+m-1.}{1.2.3....m}.$$

26. Diese ist der mte Coefficient in der Potenz $(a+b)^{-n}$, den Coefficienten n das zweyten Gliedes als den ersten gerechnet, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen. (Binomischer Lehrsatz. 11.). Die Anzahl der Combinationen von m Elementen aus n, ohne Wiederholun-

gen, nämlich $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$, ist der mte Coefficient in der Potenz $(a+b)^n$. (a. a. O. 1.).

27. Die Anzahl aller Combinationen aus allen Classen, ohne und mit Wiederholungen, von den Unionen an bis zu der von m Elementen, aus n, ist $= \frac{n+1 \cdot n+2 \ldots n+m}{1 \cdot 2 \ldots m} - 1$. Diese Summirung gründet sich auf den Satz, daß die Summe des rten und $(r+1)$ten Binomial-Coefficienten in einer Potenz dem $(r+1)$ten Coefficienten in der nächst höhern Potenz gleich ist, (Binominal Coeff. 5.).

Oder: es ist die Anzahl der Unionen $= n+1-1$; der Binionen $= \frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2}$; also die Summe beider $= \frac{n+2 \cdot n+1}{1 \cdot 2} - 1$. Die Anzahl der Ternionen ist $\frac{n+2 \cdot n+1 \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, also die Summe jener und dieser $= \frac{n+3 \cdot n+2 \cdot n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1$. u. s. f. Zur Erläuterung summire man in der Tafel a. a. O. 4. die Coefficienten nach einer Diagonale genommen.

28. Exempel. Man habe fünf cubische oder gemeine Würfel, es ist die Frage, wie vielerley Arten von Würfen, und wie viele Würfe jeder Art mit allen diesen Würfeln möglich sind. Bezeichnet man die Augen durch a, b, c, d, e, f, so sind die verschiedenen Arten des Wurfs: 1) abcde; 2) aabcd; 3) aabbc; 4) aaabc; 5) aaabb; 6) aaaab; 7) aaaaa, wo die Buchstaben jede Anzahl Augen von 1 bis 6 bedeuten,

aber jeder eine andere. Es ist aus (20.), wenn das vorgesetzte N die Anzahl der Combinationen in einer Gattung bedeutet, N. abcde = 6

N. aabcd = 60 ; N. aabbc = 60;

N. aaabc = 60 ; N. aaabb = 30;

N. aaaab = 30 ; N. aaaaa = 6.

Die Summe ist $= 252 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.

Weil jede Anzahl verschiedener Augen mit andern Würfeln gebracht werden kann, so sind von jeder Combination so viele Variationen möglich als Versetzungen der Elemente. Diese sind 1) 720, 2) 3600, 3) 1800, 4) 1200, 5) 300, 6) 150, 7) 6; in Summa 7776, welches die fünfte Potenz von 6 ist, wie es seyn muß. Denn mit zwey Würfeln sind 6 mahl 6 Würfe möglich; nimmt man noch einen Würfel dazu, so kann zu jedem Wurfe mit zwey Würfeln eine Seite des dritten Würfels gebracht werden, welches $6 \times 6 \times 6$ Würfe giebt, u. s. f.

29. Aufgabe. Wenn unter den gegebenen Elementen einige mehrmahls vorkommen, die Anzahl der Combinationen aus allen Classen, ohne Wiederholungen der übrigen, anzugeben.

Das Verfahren wird sich nur an einem Beyspiele zeigen lassen, Es seyn die wiederholten Elemente, a, a, a, a, b, b, b, c, c; die übrigen d, e, f, etc. Man suche zuerst die Anzahl der Combinationen von den wiederholten Elementen, a, b, c. Das erste für sich giebt 4, das zweyte 3, das dritte 2 Combinationen. Die Combinationen je zweyer derselben sind an der Zahl $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2$; die Combinationen aller drey sind an der Zahl $4 \cdot 3 \cdot 2$. Die Summe aller dieser Combinationen ist $9 + 26 + 24 = 59$.

Die Anzahl aller verschiedenen Elemente sey = n, so ist in unserm Falle die Anzahl der übrigen d, e, f, etc.

$= n - 3$, und die Anzahl ihrer Combinationen $= 2^{n-3} - 1$ nach (18.). Das Product dieser Zahl in die Anzahl der Combinationen aus a, b, c giebt die Anzahl der Combinationen, worin Elemente aus beiden Abtheilungen, der a, b, c, und der übrigen, d, e, f, etc. vorkommen. Dazu nehme man die Combinationen aus a, b, c allein, so ist die gesuchte Anzahl aller Combinationen aus a, a, a, a, b, b, b, c, c, d, e, f, etc. $= 2^{n-8} - 1 + 59(2^{n-8} - 1) + 59 = 60 \times 2^{n-8} - 1$.

30. Exempel. Die Anzahl der verschiedenen Factoren der Zahl $831600 = 2.2.2.2.3.3.3.5.5.7.11$. zu finden. Hier ist $n = 5$, also die Anzahl der verschiedenen Factoren, die Zahl selbst und die Einheit ausgeschlossen, $= 60 \times 4 - 1 = 239$.

Die Anzahl aller Combinationen aus den Elementen, a, a, a, a, a,; b, b, b, b; c, c, c; d, d ist die Summe der Unionen, Binionen, Ternionen und der Quaternion aus den Zahlen 5, 4, 3, 2, d. i. die Summe $14 + 71 + 154 + 120 = 359$. Die Anzahl der übrigen von einander durchgehends verschiedenen Elemente sey $n - 14$, so ist die Anzahl aller Combinationen $= 359 + 2^{n-14} - 1 + 359(2^{n-14} - 1) = 360 \times 2^{n-14}$.

III. Aufstellung aller einzelnen Combinationen mit und ohne Wiederholungen jeder Classe aus einer gegebenen Anzahl von Elementen.

31. Die Anzahl der Elemente, aus welchen die Combinationen gemacht werden, sey $= n$; die Elemente seyn a, b, c, d, etc. Die Classe der Binionen mit Wiederholungen desselben Elements, aber ohne Versetzungen, wird erhalten, wenn jeder Union erstlich das Element a; darauf der Union b und allen folgenden das Element b; ferner der Union c und allen folgenden das Element c, u. s. f. vorgesetzt wird. Die Classe der Ternionen, wenn die einzelnen Elemente a, b, c, d, etc. successiv denjenigen Binionen vorgesetzt werden, die sich mit dem vorzusetzen-

den Element oder einem folgenden anfangen. Auf diese Art werden die übrigen Classen nach einander vollständig aufgestellt.

32. Die Combinationen ohne Wiederholungen darzustellen, setzt man in jeder Classe jedes Element nach der Reihe nur denjenigen Combinationen vor, die sich mit einem der folgenden Elemente anfangen.

33. Exempel für Combinationen mit Wiederholungen.

I.	a	b	c	d
II.	aa	ab	ac	ad
		bb	bc	bd
			cc	cd
				da
III.	aaa	aab	aac	aad
		abb	abc	abd
			acc	acd
				add
		bbb	bbc	bbd
			bcc	bcd
				bdd
			ccc	ccd
				cdd
				ddd
IV.	aaaa	aaab	aaac	aaad
	etc.			

34. Exempel für Combinationen ohne Wiederholung.

I.	a	b	c	d	e
II.		ab	ac	ad	ae
			bc	bd	be
				cd	ce
					de
III.			abc	abd	abe
				acd	ace
					ade
				bcd	bce
					bde
					cde
IV.				abcd	abce
					abde
					acde
					bcde
V.					abcde

35. Die Variationen werden erhalten, wenn jeder einzelnen Combination die Zahl der Versetzungen vorgeschrieben wird. Das Total aller Variationen in einer Classe ist die Potenz des Polynomium a + b + c + d + e + f + etc. als der Summe der Elemente mit dem Exponenten, welcher der Zahl der Classe gleich ist.

36. Von Combinationen ohne Wiederholungen sind nur so viele Classen möglich, als Elemente vorhanden sind. Mit Wiederholungen ist die Anzahl der Classen willkührlich.

IV. Aufstellung der Combinationen mit bestimmter Summe der Stellenzahlen ihrer Elemente.

37. Den Elementen, die verbunden werden sollen, gebe man jedem eine bestimmte Stelle, die durch die beygesetzte Zahl angezeigt wird, nämlich

1	2	3	4	5	6	7	....
a	b	c	d	e	f	g	....

Diese Verbindung der Buchstabenreihe mit der Zahlenreihe heißt der Zeiger (Index). Es sollen alle diejenigen Combinationen mit Wiederholungen aufgestellt werden, in welchen die Summe der Stellenzahlen, oder die Localsumme, eine bestimmte Zahl ist. Dieses kann auf mehr als eine Art geschehen. Erstlich lassen sich die Combinationen Classenweise darstellen, mit Beobachtung der Folge der Elemente in jeder Classe. Zweytens kann man sie lexikographisch ordnen, so daß nach jeder Combination diejenige gesetzt wird, welche ihr in der Folge der bezeichnenden Buchstaben am nächsten kommt. Ein Exempel wird beide Methoden hinlänglich erklären.

83. Die Summe der Stellenzahlen sey = 7, weswegen von allen Elementen nur die ersten 7 in den Combinationen vorkommen.

Combinationen nach Classen.
g
af, be, cd
aae, abd, acc, bbc
aaad, aabc, abbb
aaaac, aaabb
aaaaab
aaaaaaa

Combinationen in lexikographischer Folge.

7	6	5	4	3	2	1	
a	a	a	a	a	a	a	1
a	a	a	a	a	b		2
a	a	a	a	c			3
a	a	a	b	b			
a	a	a	d				4
a	a	b	c				
a	a	e					5
a	b	b	b				
a	b	d					
a	c	c					
a	f						6
b	b	c					
b	e						
c	d						
g							7

Nach der erstern Methode setze man das 7te Element als Union in die erste Classe. Darauf setze man diesem g successiv die Elemente a, b, etc. vor, und vertausche g successive mit f, e, etc. gestatte aber keinen Rückgang in der Folge der Buchstaben. Aus der zweyten Classe bildet man die dritte durch successive Vorsetzung der Elemente a, b, etc., und Vertauschung des letzten Elements mit demjenigen, das so viele Stellen rückwärts liegt, als die Zahl der Stelle des vorgesetzten Elements Einer enthält, übergeht aber alle Combinationen, worin Rück-

gänge vorkommen, weil diese nur Versetzungen schon gefundener Combinationen sind.

Nach der zweyten Methode setze man zuerst das erste Element a, und sondere es durch einen Winkelhaken ab. Man setze a vor, und vertausche das a in dem Winkelhaken mit dem nächsten Elemente b, welches unter das vorgesetzte a geschrieben wird. Diese Combinationen sondere man durch den Winkelhaken 2, 2 ab. Sie geben die Localsumme = 2. Weiter setze man den gefundenen Combinationen das Element a vor, vertausche in denselben das erste Element linker Hand mit dem nächstfolgenden, und setze die daraus entstehenden Combinationen mit Auslassung derer, die Rückgänge enthalten, zu dem mit a anfangenden. Alle in dem Winkelhaken 3,3 eingeschlossenen Combinationen geben die Localsumme = 3. Auf diese Art verfahre man überhaupt, erstlich, daß man den Combinationen von der Summe m — 1 das Element a vorsetze, und daß man in denselben das erste Element linker Hand mit dem nächstfolgenden vertausche, und alle so erhaltene Combinationen, die keine Rückgänge enthalten, zu jenen mit a anfangenden in denselben Winkelhaken setze, wodurch dieser alle Combinationen mit der Lokalsumme m liefert.

Setzte man in den obigen Combinationen nach Classen, statt der Buchstaben die zugehörigen Zahlen nach dem Zeiger (37.) so würden alle Combinationen, von der ersten g = 7, an bis zur letzten aaaaaaa = 1111111, arithmographisch (so wie die Buchstaben in der zweyten Darstellung lexikographisch) fortgehen und auf einander folgen. Auch in der arithmographischen Fortschreitung der ersten Darstellung befolgen die Combinationen, aber nur in den einzelnen Classen, die lexikographische Ordnung.

39. Die zweyte sehr sinnreiche Darstellung, so wie die combinatorischen Regeln und Verfahren für beyde, sind von Hindenburg angegeben, (Archiv der Mathem. IV. Heft. 392. S. und erste Samml. combin. Abhandl.

S. 183.). Die zweyte Darstellung ist **involutorisch**, d. h. sie liefert mit den Combinationen von der Localsumme m zugleich alle von jeder niedrigern Summe. Sie stellt also die Genesis der Combinationen sehr sinnlich und leicht dar; welches auf ähnliche Art auch bey den einzelnen Classen der ersten Darstellung geschehen kann, die sich auch involutorisch anordnen lassen (Erste Samml. a. A. S, 187.) Eine solche Darstellung gewährt daher auch den Vortheil, daß man sie leicht fortsetzen und für jede höhere Localsumme die Aufstellung der niedrigern benutzen kann. Z. B. die Combinationen für die Localsumme 7 seyn zusammen ^{7}J; für die Localsumme 8 sey sie ^{8}J, u. s. f. so sind die

Combinationen für ^{8}J				
a	^{7}J			
b	b	b	b	2
b	b	d		4
b	c	c		
b	f			6
c	e			
d	d			
h				8

Combinationen für ^{9}J				
a	^{8}J			
b	b	b	c	3
b	b	e		5
b	c	d		
b	g			7
c	c	c		
c	f			
d	e			
i				9

Combinationen für ^{10}J					
a	^{9}J				
b	b	b	b	b	2
b	b	b	d		4
b	b	c	c		
b	b	f			6
b	c	e			
b	d	d			
b	h				8
c	c	d			
c	g				
d	f				
e	e				
k					10

Die Combinationen, welche hier zu denen, die a enthalten, hinzukommen, sind nach einem ähnlichen Gesetze, wie das in (38.) für die lexikographische Folge, aus den Elementen b, c, d, e, f, g, etc. zu den Local-Summen, 2, 4, 6, 8, etc. oder 3, 5, 7, 9, etc. gebildet. Den gefundenen Combinationen von einerley Localsumme wird das Element b vorgesetzt, und zweytens wird in denselben jedes der beiden ersten Elemente mit dem nächst folgenden vertauscht, und wo nur ein einziges vorhanden ist, das zweyte folgende dafür genommen, wobey alle diejenigen Combinationen bey Seite gesetzt werden, in welchen ein Rückgang der Buchstaben vorhanden ist. Diese Anwendung des obigen Gesetzes bemerklich zu machen, sind die Combinationen von gleichen Localsummen durch Winkelhaken abgesondert. Es kann nach diesem Verfahren keine Combination ausgelassen werden. Wenn eine in dem letzten Winkelhaken fehlte, so müßte auch eine in dem nächst vorher gehenden fehlen, daher auch eine in dem vor diesem vorher gehenden, u. s. f. bis zu dem letzten oder vorletzten von oben.

Die auf diese Art aus allen Combinationen der Elemente a, b, c, d, etc. ausgesonderten machen eine combinatorische Involution mit dem Exponenten m aus, wenn die höchste Localsumme = m ist. Werden diese Combinationen auf jede mögliche Art versetzt, so entsteht eine Involution der Variationen mit dem Exponenten m.

V. Abtheilung der Combinationen nach den Localsummen, und Anordnung nach den Wiederholungs-Exponenten eines der Elemente.

40. Es sind wiederum n Elemente, a, b, c, d, e, etc. gegeben, von welchen je m genommen werden. Die Stelle des ersten werde durch o bezeichnet, so daß der Zeiger ist

0	1	2	3	4	5	6	7	8	..
a	b	c	d	e	f	g	h	i	..

Bey der Bestimmung der Localsumme für eine Combination wird a nicht mit gerechnet. Die Abtheilungen werden nach der Folge der Localsummen gemacht, und die Combinationen werden nach dem Wiederholungs-Exponenten von a geordnet, von dem größten angefangen.

Tafel der Combinat. in den Potenzen eines Polynomium

a^m	a^{m-1}	a^{m-2}	a^{m-3}	a^{m-4}	a^{m-5}	a^{m-6}	a^{m-7}	a^{m-8}	a^{m-9}	a^{m-10}
	b									
	c	b^2								
	d	b c	b^3							
	e	b d c^2	$b^2 c$	b^4						
	f	b e c d	$b^2 d$ $b c^2$	$b^3 c$	b^5					
	g	b f c e d^2	$b^2 e$ b c d c^3	$b^3 d$ $b^2 c^2$	$b^3 c$	b^5				
	h	b g c f d e	$b^2 f$ b c e $b d^2$ $c^2 d$	$b^3 e$ $b^2 c d$ $b c^3$	$b^4 d$ $b^3 c^2$	$b^5 c$	b^7			
	i	b h c g d f e^2	$b^2 g$ b c f b d e $c^2 e$ $c d^2$	$b^3 f$ $b^2 c e$ $b^2 d^2$ $b c^2 d$ c^4	$b^4 e$ $b^3 c d$ $b^2 c^3$	$b^5 d$ $b^4 c^2$	$b^6 c$	b^8		
	k	b i c h d g e f	$b^2 h$ b c g b d f $b e^2$ $c^2 f$ c d e d^3	$b^3 g$ $b^2 c f$ $b^2 d e$ $b c^2 e$ $b c d^2$ $c^3 d$	$b^4 f$ $b^3 c e$ $b^3 d^2$ $b^2 c^2 d$ $b c^4$	$b^5 e$ $b^4 c d$ $b^3 c^3$	$b^6 d$ $b^5 c^2$	$b^7 c$	b^9	
	l	b k	$b^2 i$	$b h^3$	$b^4 g$	$b^5 f$	$b^6 e$	$b^7 d$	$b^8 c$	b^{10}

etc.

etc.

41. In der beygefügten Tafel haben die C
tionen jeder horizontalen Abtheilung einerley Loca
und die in jeder Verticalreihe befindlichen mit den z
stehenden a enthalten m Elemente. Die Tafel lie
weit sie reicht, in jeder Verticalreihe die Glieder
tenz $(a + b + c + d \ldots)^m$, welche die z
stehende Potenz von a zum Factor haben, wenn
den darunter stehenden Producten verbunden wird
noch die Versetzungszahl der Elemente als nur
Factor oder Coefficient gesetzt werden muß.
horizontalen Abtheilung sind die Factoren zu dem
darüber stehenden Potenzen von a enthalten, die m
verbunden die Literal-Coefficienten in der Potenz (
$+ cz^2 + dz^3 +$ etc.$)^m$, geben, so daß die
zontale Antheilung (ohne die Reihe der Potenzen
zu der rten Potenz von z gehört. Die Tafel gew
eine sehr deutliche Übersicht der Bildung der p
schen Potenzen.

Die Combinationen jedes Faches werden a
in dem darüber zunächst befindlichen derselben
reihe auf folgende Art hergeleitet. Für das le
ment wird das nächstfolgende gesetzt. Ist das
welches vor dem letzten oder vor den letzten unter
chen zunächst vorhergeht, in der Ordnung der
benzeichen auch das nächst vorhergehende (wie in
b^2cd^2, bc^2d^2), so wird damit dieselbe Vert
vorgenommen, sonst aber nicht. Alle übrigen
bleiben unvertauscht. Ist das letzte Element wi
so wird die Vertauschung doch nur mit einem
dem letzten, vorgenommen. Eben so auch, wenn da
vorhergehende unterschiedene Element vertauscht w

Der Grund dieser Vertauschung ist leicht be
Durch sie wird, wie es seyn soll, die Localsumm
Combination um Eins erhöht. Jede Combinat
sich auf ein einfaches oder nicht wiederholtes
endigt, wird auf diese Art aus einer Com

mit der nächst niedrigern Localsumme hervorgebracht, z. B. bcdf aus bcde. Allein die Combinationen, in welchen das letzte Element wiederholt ist, können nur durch Vertauschung des nächst vorhergehenden, von jenen verschiedenen, Elements entstehen. So entsteht bce^5 aus $bcde^4$; dieses aus bcd^2e, und dieses durch die erstere Art der Vertauschung aus bcd^3. Die fernere Folge der vertauschten Combinationen rückwärts mit abnehmender Localsumme ist $bccd^2$, bc^3d; bc^4, b^2c^3. b^3c^2, b^4c; b^5. Es kann daher bey dieser Herleitung kein Glied in einem Fache fehlen, es müßte dann auch in dem nächst obern fehlen; also auch in dem über diesem befindlichen; also müßte in dem obersten Fache die Combination der b allein auch nicht vorhanden seyn, auf welche doch zuletzt sich jede Combination bringen läßt.

42. Die Tafel dient auch zu Substitutionen für die Potenzen einer vieltheiligen Größe, $bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + gz^6 +$ etc., wenn diese mit gegebenen Factoren verbunden werden, und daraus eine Größe zusammengesetzt wird, da dann diejenigen Glieder, welche in den verschiedenen Potenzen des Polynomium einerley Potenz von z enthalten, in ein Glied zusammengefaßt werden. Die Polynomialgröße sey $= Z$, und es werden alle Glieder verlangt, welche die fünfte Potenz von z enthalten. Aus den Potenzen von z sind sie folgende:

Aus Z	fz^5
aus Z^2	$(2be + 2cd)z^5$
aus Z^3	$(3b^2d + 3bc^2)z^5$
aus Z^4	$4b^3c.z^5$
aus Z^5	$b^5.z^5$

Die Versetzungszahlen sind den Combinationen beygefügt. Jedes Element kann nämlich aus jedem der gleichen polynomischen Factoren genommen werden.

Ist das Polynomium $Z = a + bz + c$[...] $+ ez^4 + fz^5 +$ etc., so sind die Glieder, [...] fünfte Potenz von z enthalten.

aus Z	fz^5
aus Z^2	$(2af + 2be + 2cd)z^5$
aus Z^3	$(3a^2 f + 3a(2be + 2cd)$ [...]
	$+ 3bc^2)z^5$
aus Z^4	$(4a^3 f + 6a^2 (2be + 2cd)$ [...]
	$(+ 4a\,3b^2d + 3bc^2) + 4b$ [...]
aus Z^5	$(5a^4 f + 10a^3 (2be + 2cd)$ [...]
	$+ 10a^2(3b^2d + 3bc^2) + 5a.4b^3c$ [...]
etc.	

In den Potenzen beider Polynomien gehö[...] nigen Combinationen von a, b, c, d, e, etc. [...] selben Potenz von z, deren Localsumme nach de[...]
$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{matrix}$ dem Exponenten der Potenz vo[...] ist. Daher sind aus den Potenzen des ersten [...] $a = 0$ ist, die zu z^r gehörigen Combinationen in [...] chern der rten Horizontalreihe nach ihrer Folge [...] fen, die Reihen oder Abtheilungen nach den höch[...] tenzen von b gezählt. Hingegen sind aus den P[...] des zweyten Polynomium alle Combinationen, [...] halten, noch beyzufügen. Aus Z^m gehören zu de[...] z^r alle Combinationen der rten Abtheilung mit den [...] Verticalreihe gehörigen Potenzen von a verbund[...] a^{m-1} an bis zu a^0.

Die Potenzen von a sind hier eigentlich Com[...] nen desselben wiederholten Elements. So wi[...] Reihe der Potenzen von a auch a^0 aufgenommen [...] wird auch hier a^0 als Zeichen eines abwesenden [...] a gebraucht, und daher eine Nullion genannt [...] können.

V. Relationen der Combinationen und der Summen der Potenzen von den combinirten Größen.

43. Satz. Es sey die Summe der Unionen, $a + b + c + d + e +$ etc. $= A$; die Summe der Binionen $= B$; der Ternionen $= C$; der Quaternionen $= D$; der Quinionen $= E$; der Senionen $= F$: u. s. f. alle ohne Wiederholungen. Ferner sey die Summe der $a, b, c, d,$ etc. als Potenzen vom ersten Grade betrachtet, $= P$; ihrer Quadrate $= Q$; ihrer Cuborum $= R$; ihrer Biquadrate $= S$; ihrer fünften Potenzen $= T$ u. s. f. so ist

$$P = A$$
$$Q = AP - 2B$$
$$R = AQ - BP + 3C$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$$
$$V = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F$$

etc. etc.

Bew. Man bezeichne die Summe der Combinationen einer gewissen Gattung durch das vorgesetzte Zeichen ſ. als $ſ.a^2$ die Summe aller Quadrate von den Größen $a, b, c,$ etc.; $ſ.a^2b$ die Summe aller Combinationen von der Form a^2b; $ſ.abcd$ die Summe aller Quaternionen ohne Wiederholung, u. s. w. Erstlich ist

$(a + b + c \ldots)(a + b + c \ldots) = ſ.a^2 + 2ſ.ab$, das ist, in den Zeichen des Satzes, $AP = Q + 2B$, also $Q = AP - 2B$.

Zweytens,

$(a + b + c \ldots)(a^2 + b^2 + c^2 \ldots) = ſ.a^3 + ſ.a^2b$, und $(ab + ac + bc \ldots)(a + b + c \ldots) = ſ.a^2b + 3ſ.abc$. Der numerische Factor 3 ist der Summe, $ſ.abc$, vorgesetzt, weil eine Binion und eine Union aus den drey

Ist das Polynomium $Z = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.}$, so sind die Glieder, welche die fünfte Potenz von z enthalten.

aus Z	fz^5
aus Z^2	$(2af + 2be + 2cd)z^5$
aus Z^3	$(3a^2f + 3a(2be + 2cd) + 3b^2d + 3bc^2)z^5$
aus Z^4	$(4a^3f + 6a^2(2be + 2cd) (+ 4a\,3b^2d + 3bc^2) + 4b^3c)z^5$
aus Z^5	$(5a^4f + 10a^3(2be + 2cd) + 10a^2(3b^2d + 3bc^2) + 5a.4b^3c + b^5)z^5$
etc.	

In den Potenzen beider Polynomien gehören diejenigen Combinationen von a, b, c, d, e, etc. zu derselben Potenz von z, deren Localsumme nach dem Zeiger $\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{matrix}$ dem Exponenten der Potenz von z gleich ist. Daher sind aus den Potenzen des ersten, worin $a = 0$ ist, die zu z^r gehörigen Combinationen in den Fächern der rten Horizontalreihe nach ihrer Folge anzutreffen, die Reihen oder Abtheilungen nach den höchsten Potenzen von b gezählt. Hingegen sind aus den Potenzen des zweyten Polynomium alle Combinationen, die a enthalten, noch beyzufügen. Aus Z^m gehören zu der Potenz z^r alle Combinationen der rten Abtheilung mit den zu jeder Verticalreihe gehörigen Potenzen von a verbunden, von a^{m-1} an bis zu a^0.

Die Potenzen von a sind hier eigentlich Combinationen desselben wiederholten Elements. So wie in der Reihe der Potenzen von a auch a^0 aufgenommen wird, so wird auch hier a^0 als Zeichen eines abwesenden Elements a gebraucht, und daher eine Nullion genannt werden können.

V. Relationen der Combinationen und der Summen der Potenzen von den combinirten Größen.

43. Satz. Es sey die Summe der Unionen, $a+b+c+d+e+$ etc. $=A$; die Summe der Binionen $=B$; der Ternionen $=C$; der Quaternionen $=D$; der Quinionen $=E$; der Senionen $=F$: u. s. f. alle ohne Wiederholungen. Ferner sey die Summe der a, b, c, d, etc. als Potenzen vom ersten Grade betrachtet, $=P$; ihrer Quadrate $=Q$; ihrer Cuborum $=R$; ihrer Biquadrate $=S$; ihrer fünften Potenzen $=T$ u. s. f. so ist

$$P=A$$

$$Q=AP-2B$$

$$R=AQ-BP+3C$$

$$S=AR-BQ+CP-4D$$

$$T=AS-BR+CQ-DP+5E$$

$$V=AT-BS+CR-DQ+EP-6F$$

etc. etc.

Bew. Man bezeichne die Summe der Combinationen einer gewissen Gattung durch das vorgesetzte Zeichen $\int$. als $\int.a^2$ die Summe aller Quadrate von den Größen a, b, c, etc.; $\int.a b$ die Summe aller Combinationen von der Form a^2b; $\int.abcd$ die Summe aller Quaternionen ohne Wiederholung, u. s. w. Erstlich ist
$(a+b+c\ldots)(a+b+c\ldots)=\int.a^2+2\int.ab$, das ist, in den Zeichen des Satzes, $AP=Q+2B$, also $Q=AP-2B$.

Zweytens,

$(a+b+c\ldots)(a^2+b^2+c^2\ldots)=\int.a^3+\int.a^2b$, und $(ab+ac+bc\ldots)(a+b+c\ldots)=\int.a^2b+3\int.abc$. Der numerische Factor 3 ist der Summe, $\int.abc$, vorgesetzt, weil eine Binion und eine Union aus den drey

Größen, a, b, c, jede auf dreyerley Art genommen werden können, nämlich abc, acb, bca. Aus den beiden Gleichungen ergiebt sich

$$AQ - BP = R - 3C, \text{ und}$$
$$R = AQ - BP + 3C.$$

Drittens,

$(a + b + c \ldots)(a^3 + b^3 + c^3 \ldots) = \text{ſ}.a^4 + \text{ſ}.a^3 b$, und
$(ab + ac + bc \ldots)(a^2 + b^2 + c^2, \ldots) = \text{ſ}.a^3 b + \text{ſ}.a^2 bc$,
auch $(abc + abd + bcd \ldots, (a + b + c \ldots) = \text{ſ}.a^2 bc + 4\,\text{ſ}.abcd$, wo der Factor 4 der Summe aller Quaternionen, wie abcd, vorgesetzt ist, weil eine Ternion und eine Union aus 4 Größen auf viererley Arten genommen werden können. Aus den drey Gleichungen zusammengenommen folgt

$$AR - BQ + CP = S + 4D, \text{ und}$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D.$$

Viertens,

$(a + b + c \ldots)(a^4 + b^4 + c^4 \ldots) = \text{ſ}.a^5 + \text{ſ}.a^4 b$
$(ab + ac + bc \ldots)(a^3 + b^3 + c^3 \ldots) = \text{ſ}.a^4 b + \text{ſ}.a^3 bc$
$(abc + abd + bcd \ldots)(a^2 + b^2 + c^2 \ldots) = \text{ſ}.a^3 bc + \text{ſ}.a^2 bcd$
$(abcd + bcde \ldots)(a + b + c \ldots) = \text{ſ}.a^2 bcd + 5\,\text{ſ}.abcde$. Diese vier Gleichungen vereinigt geben die Gleichung

$$AS - BR + CQ - DP = T - 5E, \text{ und}$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E.$$

Aus den Beweisen dieser vier Formeln erhellt, daß allgemein,

$$\text{ſ}.a^{m-3} = \text{ſ}.a \times \text{ſ}.a^{m-1} - \text{ſ}.ab \times \text{ſ}.a^{m-2} + \text{ſ}.abc \times^{m-3}$$
$$- \text{ſ}.abcd \times \text{ſ}.a^{m-4} \ldots\ldots \pm m\,\text{ſ}.abcd \ldots$$

wo in der letzten Combination m Factoren zu nehmen sind, und das obere Vorzeichen für ein ungerades m gilt.

44. Der Gang des Beweises zeigt, daß unter den Größen a, b, c, d, etc. auch subtractive vorhanden seyn können. Die Combinationen, welche eine ungerade Anzahl negativer Factoren enthalten, sind subtractiv.

45. Da in jeder Gleichung, $x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} \ldots \pm k = 0$, der Coefficient α die Summe der Wurzeln; β die Summe der Producte je zweyer; γ die Summe der Producte je dreyer, u. s. f. ist, so hat der Satz seine Anwendung in der Theorie der Gleichungen.

46. Die gefundenen Formeln für die Summen der Potenzen sind abhängige, indem in den Werth jeder Summe die vorhergehenden alle hineinkommen. Setzt man in jeder nach der Reihe die Werthe aus den vorhergehenden Formeln, so erhält man die unabhängigen Werthe. Doch wird dieses Verfahren in der Fortsetzung mühsam, und führt nicht leicht auf das Gesetz der Formation. In dem Artikel, combinatorische Analysis, (54.) sind die unabhängigen Werthe der Summen der Potenzen auf eine leichte Art aus gewissen combinatorischen Formeln mit Hülfe eines Satzes aus der Lehre von den Logarithmen hergeleitet.

47. In dem Artikel, Algebra, ist angeführt, daß Albert Girard in dem Buche, Invention nouvelle en l'Algebre etc. 1629, die unabhängigen Formeln für die Summen der Potenzen vorgetragen hat, jedoch ohne Beweis. Die abhängigen Formeln hat Newton in seiner Arithm. univers. p. 192. (edit. s'Graves.) auch ohne Beweis angeführt, und sie benutzt, eine Gränze der größten Wurzel zu finden. Die Vorzeichen sind daselbst alle einerley, weil die Combinationen von einer ungeraden Anzahl Elemente negativ genommen sind. Man nennt die Formeln auch den Newtonischen Lehrsatz von dem Verhalten der Coefficienten in einer Gleichung zu den

Summen der Potenzen ihrer Wurzeln. Die abhä
Formeln mag man so nennen; doch muß man da
alten Girard, als ursprünglichen Erfinders, nicht
sen. Joh. Bernoulli gebraucht den Satz, we
elegantissimum theorema Newtonianum nenn
die geraden Potenzen der Brüche $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$,
infin. zu summiren, und sagt, daß er einen Bew
Satzes gefunden habe, den er aber nirgends m
(Joh. Bernoulli Opp. T. IV. n. 152.) Eule
in der Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 166. die F
so wie sie hier in dem Satze aufgestellt sind, und s
zu, daß man sich von ihrer Richtigkeit leicht wü
sichern können, daß aber in der Differentialrechn
Satz in völliger Strenge würde dargethan werden
seinen Institt. calc. diff. ist das nicht geschehen.
aber zwey Beweise des Satzes in dem zweyten Ba
Opusculorum, p. 108 — 120. mitgetheilt, d
den Titel hat: Conjectura physica circa propa
nem soni ac luminis, cet. Berolini 1750. De
wird durch die Differentialrechnung geführt, der
wird aus einem Lehrsatze über die algebraischen Glei
hergeleitet. In den Comment. novis Petrop.
hat Euler für die unabhängigen Formeln ein Ges
Formation gezeigt, doch nur durch Induction.
mann hat im J. 1745 einen etwas verwickelten Bew
Satzes geliefert in einem Programm: Demon
theorematis algebraici. Dieser veranlaßte K
einen leichtern zu suchen, den er 1758 der Göttin
cietät mittheilte. S. dessen Dissertt. mathem.
ficae, und seine Analysis endlicher Größen, S
An jenem Orte zeigt er an, daß Landen in sein
thematical Lucubrations, London 1755.
einen Beweis durch die Rechnung des Unendlichen
habe. In Tempelhofs Analysis endlicher G
Berlin 1769, §. 643 f. ist der Beweis aus algeb
Gründen, verschieden von dem Eulerischen, geführt
Beweis, den la Grange in einer Abhandlung i
Gleichungen, Mem. de Berlin, pour 1768.

(Michelsens Sammlung betitelt, Theorie der Gleichungen, S. 191.) gegeben hat, bezieht sich zunächst auf die reciproken Wurzeln einer Gleichung. Er kommt mit dem vorher angeführten ersten Eulerischen im Wesentlichen überein. Arbogast hat in dem Calcul des dérivations, 1800, nach seiner Methode, die sich auf den Taylorschen Lehrsatz gründet, einen sehr bequemen Weg zur Herleitung beiderley Formen des Lehrsatzes genommen. S. combinatorische Analysis, 54. 55.

Der Satz gehört nicht der Algebra, sondern der Combinationslehre zu, aus welcher man die eine Form desselben mit der kläresten Einsicht herleiten kann, woraus sich auch die zweyte und ihr Gesetz, durch Induction, herleiten läßt.

48. Satz. Es sey wiederum die Summe der Unionen $= A$; der Binionen $= B$; der Ternionen $= C$; u. s. f. ohne Wiederholungen. Nun nehme man die Quadrate der Combinationen jeder Gattung zusammen, und setze

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.}$$

$$Q = a^2 b^2 + a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + \text{etc.}$$

$$R = a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 b^2 e^2 + a^2 c^2 d^2 + \text{etc.}$$

$$S = a^2 b^2 c^2 d^2 + a^2 b^2 c^2 e^2 + a^2 b^2 d^2 e^2 + \text{etc}$$

u. s. w.

so ist

$$P = AA - 2B$$

$$Q = BB - 2AC + 2D$$

$$R = CC - 2BD + 2AE - 2F$$

$$S = DD - 2CE + 2BF - 2AG + 2H$$

u. s. w.

Bey dem Beweise dieser Formeln kommt es vornehmlich darauf an, die numerischen Coefficienten der Combi-

nationen, die durch die Multiplication zweyer Rei
Combinationen entstehen, zu bestimmen. Dazu d
folgende Bemerkung.

Wenn eine Reihe A von Combinationen der E
a, b, c, d, etc. deren Exponent α ist, in eine R
von Combinationen derselben Elemente, deren Exp
ist, multiplicirt wird, so entstehen dadurch, wenn
ner als β gesetzt wird, $\alpha + 1$ Formen von Par
ducten, weil der Factor aus der Reihe A entweder
$\alpha - 1$, oder $\alpha - 2$ ..., oder zwey, oder eine
gar keine Elemente mit dem Factor aus der R
übereinstimmig hat. Die Anzahl der übereinsti
Factoren sey $= \gamma$, welche auch $= 0$ seyn kann, so
das Product γ Paare gleicher Factoren, und
$\alpha + \beta - 2\gamma$ verschiedene. Von den letztern
$\alpha - \gamma$ dem Factor aus der Reihe A, und $\beta - \gamma$ d
tor aus der Reihe B zu. Nun suche man, wie
$\alpha - \gamma$ Elemente oder (welches auf eins hinaus
wie oft sich $\beta - \gamma$ aus $\alpha + \beta - 2\gamma$ Elementen
lassen, so hat man die Anzahl der Producte von d
Form und mit denselben Elementen. Mit dies
muß die Summe aller verschiedenen Combinatione
ben Form multiplicirt werden.

Z. B. Wenn die Reihe der Ternionen in d
der Quinionen multiplicirt wird, so nehme man
Totalproducte das Partialproduct a^2b^2cdef
Hier ist $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $\gamma = 2$, und $\alpha - \gamma = 1$
$\alpha + \beta - 2\gamma = 4$. Nun lassen sich 1 oder 3 E
aus 4 Elementen nehmen 4 mahl; das ist, man k
Product derselben Elemente a, b, c, d, e, f n
Form aus den Ternionen und Quinionen 4 mahl
nämlich aus abc in abdef, aus abd in abce
abe in abcdf, und aus abf in abcde,

Dieses wohl verstanden, hat die Multiplicatio
Reihen von Combinationen keine Schwierigkeit.
Formel ist dieselbe mit der ersten in (43.).

Die zweyte Formel wird folgendergestalt gefunden. Es ist

I. $(ab + ac + bc\ldots)(ab + ac + bc\ldots) = \int.a^2b^2 + 2\int.a^2bc + 6\int.abcd$. Diese sind alle hier möglichen Formen mit den Zahlen, die anzeigen, wie oft sie Statt finden. Ferner ist II. $(a + b + c\ldots)(abc + abd + bcd\ldots) = \int.a^2bc + 4\int abcd$. Aus beiden Gleichungen folgt

$$B^2 - 2AC = Q - 2D, \text{ also}$$
$$Q = B^2 - 2AC + 2D.$$

Die dritte Formel entsteht folgendergestalt. Es ist

I. $(abc + abd\ldots)(abc + abd\ldots) = \int.a^2b^2c^2 + 2\int.a^2b^2cd + 6\int.a^2bcde + 20\int.abcdef.$

II. $(ab + ac\ldots)(abcd + \ldots) = \int.a^2b^2cd + 4\int.a^2bcde + 15\int.abcdef.$

III. $(a + b + c\ldots)(abcde + \ldots) = \int.a^2bcde + 6\int.abcdef.$ Aus diesen drey Gleichungen folgt

$$C^2 - 2BD + 2AE = R + 2F,$$

das ist

$$R = C^2 - 2BD + 2AE - 2F.$$

Die vierte Formel ergiebt sich auf ähnliche Art: Es ist

I. $(abcd + \ldots)(abcd + \ldots) = \int.a^2b^2c^2d^2 + 2\int.a^2b^2c^2de + 6\int.a^2b^2cdef + 20\int.a^2bcdefg + 70\int.abcdefgh.$

II. $(abc + \ldots)(abcde + \ldots) = \int.a^2b^2c^2de + 4\int.a^2b^2cdef + 15\int.a^2bcdefg + 56\int.abcdefgh.$

III. $(ab + \ldots)(abcdef + \ldots) = \int.a^2b^2cdef + 6\int.a^2bcdefg + 28\int abcdefgh.$

IV. $(a + b + \ldots)(abcdefg + \ldots) = \int.a^2bcdefg + 8\int.abcdefgh.$

Aus diesen vier Gleichungen folgt

$$D^2 - 2CE + 2BF - 2AG = S - 2H, \text{ also}$$
$$S = D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H.$$

Die Gleichförmigkeit in der Entwickelung der Producte aus den Combinations-Reihen berechtigt zu schließen, daß das Gesetz, welches sich in den gefundenen Formeln zeigt, allgemein gelte.

49. Der Satz steht in Eulers Instit. Calc diff. p. 702, ohne Beweis, nur mit dem Beyfügen, daß die Formeln sich aus der Natur der Combinationen ergeben. Er wird zur Entdeckung unmöglicher Wurzeln in einer algebraischen Gleichung gebraucht.

VII. Geschichte der Combinationslehre.

Die erste noch unvollkommene Bekanntschaft der Algebraisten des sechszehnten Jahrhunderts mit dem binomischen Lehrsatze führte schon auf Combinationen, oder konnte doch darauf aufmerksam machen. Johann Buteo lösete in seiner Logistica, 1559 die Aufgabe auf, alle verschiedene mit vier Würfeln mögliche Würfe zu finden. Er stellt in einer Tabelle die viererley Verbindungen der Zahlen 1 bis 6 regelmäßig auf, so daß, wie er ausdrücklich vorschreibt, nie eine kleinere Zahl auf eine größere folgt, und leitet die Classen aus einander her auf die Art, wie oben in (33) geschehen ist. Bey einer andern Aufgabe dieser Art, wo er alle Variationen der vier ersten Classen von Verbindungen aus sechs Buchstaben sucht, setzt er, um es bequemer zu machen, Zahlen statt der Buchstaben. (Pfaffii disquisit. analyticae, p. 311.). In dem letzten Satze der Schrift von Vieta, de emendatione aequationum (1615), kommen Combinationen vor. Es seyn fünf Größen B, D, G, H, K, deren Summe ich α nenne, die Summe ihrer Binionen β, der Ternionen γ, der Quaternionen δ. Vieta druckt alles mit Worten aus. Sein Satz ist folgender: Wenn $A^5 - \alpha A^4 + \beta A^3 - \gamma A^2 + \delta A = B.D.G.H.K$, so sind B, D, G, H, K, die Wurzeln dieser Gleichung, oder die Werthe von A; oder, wie Vieta es ausdruckt: A explicabilis est de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K.

Harriots ganze Algebra beruht auf Combinationen der Wurzeln der Gleichungen. Doch findet sich die Benennung noch nicht darin; auch ist nie die Frage von der Anzahl der Combinationen einer Classe, bey einer gegebenen Anzahl von Größen.

Pascal wechselte mit Fermat Briefe über verschiedene Fragen, die Combinationen und die Wahrscheinlichkeiten in Spielen betreffend, wobey er auf sein arithmetisches Dreyeck gerieth, in welchem die Zahlen zur Bestimmung der Anzahl der Combinationen einer gewissen Menge von Dingen aus einer gegebenen Anzahl dienen. S. arithmetisches Dreyeck. In Fermats Werken, S. 179 — 188 sind zwey Briefe von Pascal enthalten, worin Anwendungen der Combinationen auf Wahrscheinlichkeiten in Spielen vorkommen.

Um dieselbe Zeit beschäftigte sich der Pater Mersenne mit den Combinationen, und machte davon Anwendungen auf die Verbindungen der Töne. Er findet, daß 20 Dinge sich über zwey Trillionen (beinahe $2\frac{1}{2}$ Trillionen) mahl versetzen lassen. Für 64 Dinge erhält die Versetzungszahl neunzig Ziffern. Cogit. phys. mathem. p. 296. und Harmonicorum L. 7, p. 116.

Guldin berechnete in einer Abhandlung über die Combinationen die Menge der Wörter, die aus 23 Buchstaben zusammen gesetzt werden können, und fand, daß sie über 25 Trillionen Bände von 1000 Seiten, jede Seite von 100 Zeilen, und jede Zeile zu 60 Buchstaben, anfüllen würden. Eine solche Berechnung machte nach ihm Prestet, der die Anzahl der Wörter von 2, von 3, von 4 bis zu 24 Buchstaben über 1391 Quinquillionen groß findet, von welchen aber ein großer Theil sich nicht aussprechen läßt.

Van Schooten trägt in dem 5ten Bd. seiner Exercitationum mathematicarum (1657) einige Aufgaben über die Combinationen vor. Er nennt sie Electiones ganz schicklich. Der Satz (18.), und die Aufgabe (29.) finden sich bey ihm. Auch giebt er eine Tafel der Combi-

nationen, aus welchen eine gegebene Anzahl Combinationen, wie Factoren, genommen werden kann, von der Anzahl 1 bis 100.

Leibnitz brachte in seinem 20sten Jahre eine Disputation de complexionibus zu Leipzig 1666 auf die Katheder, welche seiner Ars characteristica, Lipſ. 1668 zum Grunde liegt. Er wandte in der Folge die Combinationslehre auf die Umkehrung der Reihen an, wovon er die Möglichkeit aber nur an einem Beyspiele, nicht sehr deutlich zeigte. (A. Erud. 1700 m. Maji). Die arithmetischen Combinationen erweckten in ihm die Idee von einer höhern Combinirkunst und combinatorischen Charakteristik, welche zur Erfindung hoher philosophischer Wahrheiten dienen sollte. Dergleichen wollte auch Athanasius Kircher erfinden. Ars magna ſciendi. Amſtelod. 1669.

Wallis gab 1685 eine Schrift über Combinationen, Versetzungen und Zerfällungen heraus, in englischer Sprache, welche lateinisch in seinen Operibus, Vol. II. befindlich ist.

Jakob Bernoulli, der 1705 gestorben ist, hinterließ ein Werk über die Wahrscheinlichkeits-Rechnung, Ars conjectandi, welches 1713 zu Basel herausgekommen ist. Die zweyte Abtheilung enthält eine fast vollständige Ausführung der Lehre von den Combinationen und Versetzungen, wovon in der folgenden Abhandlung die Anwendungen auf Glücksspiele gemacht werden.

Euler hat die Lehre von den Combinationen nicht unberührt gelassen. Die Formeln (48) scheinen ihm zu gehören. Von ihm sind obſervationes analyticae de combinationibus. Comm. Petrop. vet. T. XIII. 1741 — 43.

Man bekümmerte sich in der Combinationslehre aber fast nur allein um die Anzahl der Verbindungen und Versetzungen der Dinge, und übergieng fast gänzlich ihre wirkliche Darstellung, die doch für die Analysis so wichtig ist. Denn die Anwendung der Combinations-

lehre in der Analysis besteht vornehmlich darin, daß zusammengesetzte Größen als Summen von Combinationen nach gewissen Gesetzen in einem einfachen Ausdruck dargestellt werden. Dabey wird aber erfordert, daß man die Bestandtheile der Summe, wo die Entwickelung nöthig ist, leicht, mit Deutlichkeit und Regelmäßigkeit angeben, gleichsam mechanisch hinschreiben könne. Diesen wichtigen Dienst hat Hindenburg der Analysis geleistet. Er hat gezeigt, wie Combinationen und Variationen an sich (simpliciter) nach sichern und einfachen rein-combinatorischen Gesetzen, in Classen und Ordnungen vollständig aufgestellt werden; sowohl arithmographisch als lexikographisch und involutorisch; eben so hat er zuerst die Combinationen und Variationen zu bestimmten Summen, deren Gebrauch in der combinatorischen Analysis am häufigsten vorkommt, auszusondern und aufzuzählen gelehrt, ebenfalls nach einer zweyfachen Methode. Dann hat er gewiesen, wie jede ganze Zahl in alle ihre ganzen Theile auf eine regelmäßige Art, mit und ohne Versetzungen zerlegt wird. Seine hierher gehörigen Schriften sind nebst mehreren die Combinationslehre und ihre Anwendungen betreffenden Schriften am Ende des folgenden Artikels angezeigt.

Combinatorische Analysis ist die allgemeine Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis, wo, bey der Aufsuchung und dem Vortrage der Formeln, bey der Entwickelung ihrer Resultate, überall combinatorische Begriffe und Sätze angewandt, combinatorische Zusammensetzungen und Zeichen gebraucht, statt der allgebraischen und transcendentischen (oft sehr verwickelten und schweren) Operationen, die gleichgültigen (einfachern und leichtern) combinatorischen gesetzt und benutzt werden. — Diese Erklärung giebt in dem mathem. Archiv 1. Bd. 423. S. Prof. Hindenburg, der als Erfinder dieses wichtigen Theils der Analysis anzusehen ist, da er die bis dahin nur als einzelne Sätze bekannten combinatorischen Lehren in einen Zusammenhang gebracht, erweitert, und sehr vortheilhaft angewandt, zu-

gleich auch eine neue, schickliche und faßliche Bezeichnungsart in dem neuen System eingeführt hat.

Die Lehre von den Combinationen, wovon die combinatorische Analysis eine Anwendung ist, muß also von demjenigen, der diesen fruchtbaren und interessanten Theil der höhern Arithmetik studieren will, wohl gefaßt werden. Zu dem Ende ist diese in dem Artikel, Combination, ausführlich vorgetragen und erläutert worden, doch in einer solchen Kürze, daß das Ganze noch gut zu übersehen ist; zugleich unabhängig von andern analytischen Sätzen, und ohne eine besondere Characteristik. Ferner muß man die Lehrsätze von den Permutationen oder Versetzungen gegebener Elemente, und von der Zerlegung ganzer Zahlen in alle mögliche ganze Theile wohl inne haben. Die erstern werden gebraucht, um die verschiedenen Combinationen einer Art aus ihren Variationen, die sich nur durch die Stellung der Elemente unterscheiden, auszusondern, nach einem dazu vorgeschriebenen oder angenommenen Gesetze der Folge oder Ordnung, und auf der andern Seite für jede Combination die Anzahl ihrer Variationen anzugeben, auch die Anzahl der Combinationen einer gegebenen Art zu finden. Die Zerlegung der Zahlen dient auf mehr als eine Art zur Aufstellung aller Combinationen von einer gewissen Beschaffenheit, wovon in dem gedachten Artikel Beyspiele vorkommen.

Bey den Zerlegungen der Zahlen hat Hindenburg sich anfänglich der Zerfällung (discerptio) derselben in ihre möglichen ganzen kleineren Theile bedient. Daher die beiden gewöhnlich so genannten Discerptionsprobleme (Infin. Dign. p. 73. seq, p. 129. seq.) für Combinationen und Variationen; unstreitig die beiden wichtigsten in Absicht auf ihren weitläuftigen Gebrauch in der combinatorischen Analysis. Die Zerfällung der Zahlen in ihre Aggregattheile führt auf Summen und ihre Complemente, und ist also nicht rein, sondern arithmetisch-combinatorisch. Späterhin sind daher von Hindenburg, auch die rein-combinatorische, arithmo-

graphischen und lexikographischen, Zerlegungen und Ableitungen der Combinationen, sowohl zu bestimmten als unbestimmten Summen, durch Ordnungen aus Ordnungen eingeführt worden, die für Zahlen- und Buchstaben-Combinationen gleich gerecht und bequem, auch wegen ihrer unvolutorischen Anordnung nach leichter sind als jene successiven Zerfällungen der größern Zahlen in ihre kleinern summatorischen Theile. (Erste Samml. anal. comb. Abh. 177, 183, 187, 189, 191, 202, 204.).

I. Gegenstände der combinatorischen Analysis.

1. Die combinatorische Analysis geht also von einfachen, rein- oder arithmetisch-combinatorischen (gemischten) Operationen aus, von einer Zusammenzählung und Zusammenstellung des Gleichartigen, wie es nach einer gewissen Regel genommen wird, nachdem man dabey auf die Anzahl der Elemente, mit oder ohne Verschiedenheit, mit oder ohne Veränderung der Folge, oder in andern Fällen auf die Summe der Stellenzahlen (den Summenexponenten) mit oder ohne Rücksicht auf die Anzahl der Elemente sieht. Der Weg zu ihr geht nicht durch die dornige Algebra, welcher sie viel mehr Licht ertheilt, ja ihr zur Darstellung der Wurzeln jeder Gleichung durch Reihen hilft, sondern der Übergang zu ihr geschieht gleich von der leichten elementarischen Buchstabenrechnung in den höhern und allgemeinern Aufgaben der Multiplication, Division und Zerfällung in gleiche Factoren Man hat sie also als einen selbstständigen Theil der Analysis anzusehen.

2. Der wichtigste Fall der Multiplication vieltheiliger Größen ist der, wenn alle Factoren gleich groß sind. Dieses giebt den polynomischen Lehrsatz, von welchem in einem besondern Artikel gehandelt wird. Hier nur dieses, um ein in die Augen fallendes Beyspiel von der Anwendung det combinatorischen Analysis zu geben. Der

Satz ist auch die Veranlassung zu der Erweiterung der Analysis durch ein System von combinatorischen Operationen gewesen.

3. Wenn die Reihe der unabhängigen formlosen Größen, $a + b + c + d + e +$ etc. deren Anzahl $= n$ sey, auf die mte Potenz erhoben werden soll, so ist dieses nichts anders als alle mögliche Combinationen von m Größen aus n Größen, ohne und mit Wiederholungen, machen. Z. B. wenn die zweyte Potenz verlangt wird, erhält man alle Producte je zweyer ungleichen (Binionen), mit den Versetzungen oder Variationen, und die Quadrate jedes Theils (Wiederholung des einzelnen). Wird der Cubus gemacht, so erhält man alle Producte wie abc (Ternionen mit den Versetzungen); alle Producte wie $a^2 b$ (Combinationen mit Wiederholung), jedes so oft als sich die a, a, b versetzen lassen; dann noch alle Cubos, wie aaa, (Conternationen mit Wiederholung des einzelnen).

4. Die vieltheilige Größe sey nach den Potenzen einer veränderlichen Größe geordnet, deren Coefficienten als unveränderlich angenommen werden. Sie sey $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 +$ etc. $= p$. Die Potenz p^m werde ebenfalls nach den Potenzen von z geordnet. Nun besteht jeder Coefficient von z aus m Factoren, die alle verschieden, oder zum Theil dieselben, oder ganz und gar dasselbe seyn können. Bezeichnet man die Stellen der Glieder in p durch 0, 1, 2, 3, 4, etc., so ist der Coefficient der Potenz z^n in p^m die Summe der Combinationen in welchen die Summe Stellenzahlen, ihrer Elemente (der Summenexponent) $= n$ ist, und besteht z. B. für $n = 5$, aus den Combination, $a^{m-1} f$; $a^{m-2} be$; $a^{m-2} cd$; $a^{m-3} b^2 d$; $a^{m-3} bc^2$; $a^{m-4} b^3 c$; $a^{m-5} b^5$. Es ist nur noch nöthig die Zahlen beyzufügen, wie oft jede vorkommt.

Das (in 3 und 4) Gesagte dient blos als Nachweisung, wie leicht sich diese Producte, als die Bestandtheile jener Potenzen der Reihe, combinatorisch übersehen lassen. Übrigens giebt die Combinationslehre Regeln an die Hand,

vermöge welcher man die einzelnen Combinationen der Potenzen (in 3, 4), ohne an die Beschaffenheit jener Producte weiter zu denken, gleich gut geordnet, mechanisch hinschreiben kann. Diese Bemerkung gilt auch für die folgenden als Beyspiele aufgeführten, und andere Aufgaben. Die arithmographischen, lexikographischen und andere combinatorischen Anordnungen leisten hierbey vortreffliche Dienste.

5. Man soll das Product von mehrern Reihen, wie

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc.} = p$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.} = q$$
$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.} = r$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4 + \text{etc.} = s$$

machen. Das wird dem ersten Anblicke nach nicht allein eine sehr mühsame, sondern auch dem Fehlen sehr unterworfene Arbeit scheinen. Die combinatorische Analysis aber macht es leicht und sicher. Man hat nur in den Combinationen, woraus p^m nach (4.) besteht, für jedes der darin vorkommenden Elemente eines an derselben Stelle aus jeder der Reihen, p, q, r, s, zu setzen. Z. B. der Coefficient von z^2 in p^4 enthält die Combinationen a^3c und a^2b^2. Daher enthält die Coefficient von z^2 in dem Producte $pqrs$ die Combinationen; $aA\alpha\mathfrak{C}$; $aA\mathfrak{A}\gamma$; $a\alpha\mathfrak{A}c$; $A\alpha\mathfrak{A}c$; und $aA\beta\mathfrak{B}$; $a\alpha B\mathfrak{B}$; $a\mathfrak{A}B\beta$; $A\alpha b\mathfrak{B}$; $A\mathfrak{A}b\beta$; $\alpha\mathfrak{A}bB$. Die Zahlcoefficienten in den Coefficienten von p^m geben die Anzahl der Combinationen jeder Gattung an.

6. Der Quotient aus der Division einer Reihe, wie vorher p ist, durch eine andere, wie q, besteht aus Combinationen nach einem bestimmten Gesetze. (Buchstabenrechnung. V.). Die Zerfällung der Multiplication in Factoren ist zwar das Umgekehrte der Multiplication, aber doch in analytischer Betrachtung etwas ähnliches, so daß der polynomische Lehrsatz für gebrochene Exponenten eben dieselbe Form hat, wie für ganze.

7. Es sey die veränderliche Größe y durch eine nach den Potenzen der veränderlichen z geordneten Reihe gegeben: und eine dritte veränderliche x durch eine Reihe nach den Potenzen von y; man soll x durch eine Reihe nach den Potenzen von z ausdrücken. Die beiden Reihen seyn:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 \ldots = y$$

$$A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 \ldots = x.$$

Man hat hier die Potenzen des Polynomium y zu machen, und diese in der Reihe für x zu substituiren. Die Coefficienten in der neuen Reihe für x werden aus den Coefficienten in den Polynomialpotenzen, die zu einer gegebenen Potenz von z gehören, zusammengesetzt, nachdem sie mit den Coefficienten B, C, D, etc. der Folge nach multiplicirt sind. Z. B. der Coefficient von z^3 ist $= Bd + C(2ad + 2bc) + D(3a^2d + 6abc + b^3) + E(4a^3d + 12a^2bc + 4ab^3) + F(5a^4d + 20a^3bc + 10a^2b^3) + G(6a^5d + 30a^4bc + 20a^3b^3) +$ etc. S. Combination, 42.

8. Die beiden Reihen seyn.

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^4 + \text{etc.} = y,$$

$$Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \text{etc.} = x,$$

und es soll x durch eine nach z geordnete Reihe dargestellt werden. In den Potenzen von y sind die Theile des Coefficienten von z^n Producte aus denen Coefficienten in der Reihe y, deren Stellen für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5. \\ a & b & c & d & e. \end{pmatrix}$ die Summe n geben. In der Tafel (Combination, 41.) geben die Combinationen in einer horizontalen Abtheilung auch dieselbe Localsumme, aber für einen andern Zeiger, worin b, c, d, e, etc. zu den Stellen 1, 2, 3, 4, etc. gehören. Setzt man daher für jeden Buchstaben in der Tafel den nächst vorhergehenden, so erhält man die Combinationen zu jeder Potenz in der neuen Reihe für x in den horizontalen Abtheilungen. Z. B. der Coefficient zu z^6 ist

$Af + B(2ae + 2bd + c^2) + C(3a^2d + 6abc + b^3) + D(4a^3c + 3a^2b^2) + E.5a^4b + Fa^6$, wo noch die Versetzungszahlen den Combinationen beygefügt sind. S. a. a. O. 42.

9. Die Umkehrung der Reihen ist eine wichtige combinatorische Operation. Es sey

$$z = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{etc.}$$

Hieraus soll eine Reihe

$$y = a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}$$

hergeleitet werden.

Man setze in der erstern Reihe für die Potenzen von y ihre Werthe mittelst der zweyten, auf die vorher gewiesene Art, so erhält man den Werth von z durch eine Reihe, die nach Potenzen von z fortschreitet, und deren Coefficienten aus den Coefficienten beider Reihen zusammengesetzt sind. Wenn nun gleich a, b, c, etc. nicht bekannt sind, so ergeben sich doch aus den Coefficienten in der umgewandelten Reihe eben so viele Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten in der Reihe für y, (s. Umkehrung der Reihen.)

10. Ist $z = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{etc.}$

und $y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}$

so findet man auf dieselbe Art eine Reihe für z, die nach den Potenzen von z selbst geordnet ist, deren Coefficienten zur Bestimmung der unbekannten a, b, c, etc. dienen.

11. Man kann eben so gut die Werthe von z in 10, 11) in die Reihe für y setzen, wodurch eine Reihe für y durch y selbst erhalten wird, aus deren Coefficienten die Größen a, b, c, etc. bestimmt werden.

Dies letztere Verfahren giebt wie das erstere recurrirende Ausdrücke für die unbekannten a, b, c, d . . . deren Entwickelung aber leichter ist, als in dem ersten Falle. Die beyderley Formen dieser Coefficienten, im Nov. Syst. Perm. Comb. p. XXX, XXXI. Andere

combinatorische, nicht recurrirende Formeln für die a, b, c, d . . . in der Folge.

12. Durch eben dieses Verfahren findet man eine Reihe für eine Potenz von y, als y^m, der Exponens sey, was man wolle. Es kommt aber noch darauf an, das Gesetz der Formation der Reihe, es sey für y oder y^m zu entdecken, (s. Umkehrung der Reihen.)

13. Ist die Frage, irgend eine Function von y durch z mittelst der für z gegebenen Reihe auszudrucken, so wird dieses Geschäft durch die combinatorische Analysis und ihre Charakteristik sehr erleichtert.

14. Bey dem Gebrauche des Taylorschen Lehrsatzes, die Veränderung einer Function durch ihre successiven Differentialquotienten, und durch die zu der Functionalgröße hinzugefügten, von ihr unabhängigen Größen auszudrucken, leistet die combinatorische Analysis vortreffliche Dienste, um die ganze Operation leicht und sicher zu machen. Hier schließt sich die Derivations-Rechnung an sie an.

15. Bey Eliminationen, bey Transformationen und Interpolationen der Reihen, bey der Summirung der Potenzen irgend welcher Größen, bey Entwickelung continuirlicher Brüche, und cyklischen Perioden, kommen Combinationen vor.

II. Charakteristik der combinatorischen Analysis.

16. Um die Glieder, welche aus den Combinationen zusammengesetzter Größen oder unendlicher Reihen ententstehen, da diese Glieder oft sehr zusammengesetzt sind, deutlich und kurz darzustellen, und das Gesetz der ganzen combinatorischen Anordnung offenbar zu machen, ist eine neue Bezeichnungsart nöthig, welche man sich geläufig machen muß, um in diesem Geschäft ohne Anstoß fortzukommen. Hindenburg hat diese Charakteristik mit solcher

Geschicklichkeit eingerichtet, daß man kaum etwas in einzelnen Bezeichnungen zu erinnern finden wird. Seine combinatorischen Ausdrücke stellen Formen von bekannter und faßlicher Structur dar, die man also mit der größten Klarheit sogleich anwenden kann; welches bey Substitutionen, die bald auf diese, bald auf jene Art gemacht werden, nicht der Fall ist.

17. Ganze Reihen, wie $a + b + c + d +$ etc. oder $az^m + bz^{m+1} + cz^{m+2} +$ etc. werden, wie es auch sonst üblich ist, durch einzelne Buchstaben als p, q; z, π; u. dgl. bezeichnet, um anzugeben, von welcher Reihe die Rede ist.

18. Das mte Glied einer Reihe p wird bezeichnet durch $p \rceil m$; das mte Glied des Products der Reihen $p \rceil q$, durch $pq \rceil m$; des Products dreyer Reihen p, q, r durch $pqr\ m$; der nten Potenz der Reihe p durch $p^n \rceil m$; des Quotienten $\frac{p}{q}$, durch $\frac{p}{q} \rceil m$

19. Ist die Reihe p nach den Potenzen einer veränderlichen Größe z geordnet, so wird der Coefficient des mten Gliedes bezeichnet durch $p \varkappa m$, des $(m+1)$ten durch $p \varkappa (m+1)$. Diese Bezeichnung ist besonders nützlich, wenn die Coefficienten aus den Gliedern mehrerer Reihen zusammen genommen werden söllen, um den unbestimmten Coefficienten in einer neuen Reihe zu bilden. Also ist $p \varkappa m + q \varkappa (m-1) + r \varkappa (m-2) + s \varkappa (m-3)$ das Aggregat von dem mten der Reihe p; dem $(m-1)$ten der Reihe q; dem $(m-2)$ten in der Reihe r, dem $(m-3)$ten in der Reihe s, woraus der Coefficient zu einer gemeinschaftlichen Potenz von z zusammengesetzt wird. — Diese Bezeichnungen der Glieder und Coefficienten heißen Localzeichen, und eine daraus zusammengesetzte Formel heißt eine Localformel. Z. B. die Localformel des polynomischen Lehrsatzes ist

$$p^n = p^n \varkappa 1 + p^n \varkappa 2.z + p^n \varkappa 3.z^2 + p^n \varkappa 4.2^3$$
$$\ldots\ldots + p^n \varkappa (m+1).z^m + \ldots$$

wenn $p = a + bz + cz^2 + dz^3 +$ etc. ist. Man kann nach Rothe, noch die Scale der Coefficienten in jeder Reihe nebst dem Zeichen der Reihe beyfügen, als hier p(a, b, c, d . . . .), welches wegen der Combinationen der Coefficienten nützlich ist.

20. Die Coefficienten werden aber auch auf die gewöhnliche Art durch Buchstaben bezeichnet, nämlich in den Functionen, die combinirt werden. Für jede Function oder Reihe müssen Buchstaben aus einem besondern Alphabet genommen werden, wenn man sie nach der Ordnung vom Anfange an nehmen will. Die unbekannten Coefficienten, welche noch erst durch Vergleichung der Coefficienten in den gleichnamigen Potenzen einer neuen Reihe, oder auf andere Art gefunden werden sollen, unterscheidet Hindenburg durch darüber gesetzte Puncte, als $\dot{a}$, $\dot{A}$, $\dot{\mathfrak{A}}$. Doch scheint dieses nicht nöthig zu seyn, wenn es einmahl angemerkt ist, daß sie noch zu finden sind; welche Bemerkung diese Puncte ersparen sollen. Bey den analytischen Operationen wird zwischen den gegebenen und gesuchten Größen weiter kein Unterschied gemacht, als nur in so fern man bey den letztern zum Zweck hat, sie unvermischt bloß durch gegebene darzustellen.

21 Zuweilen ist es nützlich, einen Coefficienten durch seinen Abstand von einem gegebenen anzudeuten. Es sey z. E. dieser letztere $= g$, die vorhergehenden, nach der Folge von g an seyn f, e, d, etc. die nachfolgenden, h, i, k, etc.

so ist $f = \overset{-1}{g}$; $e = \overset{-2}{g}$; $d = \overset{-3}{g}$, etc.

und $h = \overset{+1}{g}$; $i = \overset{+2}{g}$; $k = \overset{+3}{g}$, etc. indem der Abstand von dem gegebenen durch die über das Buchstabenzeichen des gegebenen Gliedes gesetzte Zahl bemerkt wird, mit dem Vorzeichen — für die vorhergehenden Glieder, und dem Zeichen + für die folgenden. Diese Zahlen heißen Distanz-Exponenten.

Der Gebrauch dieser Exponenten erstreckt sich nicht blos auf gemeine, sondern auch auf Binomial- und Polynomialcoefficienten, auf Variations- und Combinationsclassen, auf Functionen aller Art; überhaupt, auf jede Reihe gleichartiger oder sonst zusammengehöriger, oder so betrachteter Dinge, die eine gewisse Ordnung in ihrer Folge auf einander beobachten — um sie durch einander, folgende durch vorhergehende, und umgekehrt, bestimmte durch unbestimmte und wechselsweise, auszudrucken. Durch diese Exponenten kann auch jedes Alphabet von einer gegebenen Anzahl Buchstaben, vorwärts und rückwärts unbestimmt erweitert werden.

22. Die Binomial-Coefficienten, die in combinatorischen Rechnungen häufig vorkommen, werden durch die Buchstaben des großen deutschen Alphabets, mit dem Exponenten der Potenz oben auf der linken Seite, nach ihrer Folge bezeichnet, nämlich, wenn der Exponent der Binomialpotenz $= m$ ist, $^m\mathfrak{A}$; $^m\mathfrak{B}$, $^m\mathfrak{C}$; $^m\mathfrak{D}$, u. s. f. so daß

$$^m\mathfrak{A} = m; \quad ^m\mathfrak{B} = \frac{m.m-1.}{1.\quad 2}; \quad ^m\mathfrak{C} = \frac{m.m.-1m-2.}{1.\ 2.\quad 3}$$

$$^m\mathfrak{D} = \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.}; \text{ etc.}$$

23. Die Polynomial-Coefficienten, oder die Versetzungszahlen, welche in der Formel des polynomischen Lehrsatzes die Combinationen begleiten, weil jede Combination so oft vorhanden ist, als sich derselben Elemente versetzen lassen, werden durch die kleinen deutschen Buchstaben angedeutet, so daß die Stellenzahl des Buchstaben mit der Anzahl der Elemente übereinkomme; nämlich a a; b a b; c a b c oder $c a^2 b$; d a b c d oder $d a^2 b^2$, u. s. f. Der Werth dieser Buchstabenzeichen wird durch die Beschaffenheit der Combination bestimmt. So ist in d a b c d der Werth von $d = 24$; in $d a^2 b^2$ aber $= 6$.

24. Einen unbestimmten Binomial- oder Polynomial-Coefficienten bezeichnet Hindenburg durch einen

Buchstaben aus der Mitte des Alphabets mit Schwabacher Schrift, damit man ihn nicht für einen bestimmten, nach der Stellenzahl des Buchstaben, nehme. Inzwischen wird diese Unterscheidung, die in der Handschrift beschwerlich ist, kaum nöthig seyn. In der Reihe mit andern zeigen die Trennungspuncte zwischen den Gliedern schon an, daß die zuletzt hingesetzten Glieder eine unbestimmte Stelle haben, und nur bloß die Form angeben. Man darf nur anzeigen, daß die Buchstaben, M, N, etc. m, n, etc. allemahl unbestimmte Werthe haben, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert wird. Das wird in diesem Wörterbuche angenommen, und eben so in allen ähnlichen Fällen.

25 Die Combinationen der Elemente a, b, c, d ... oder der Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . werden nach der Folge der Classen mit Wiederholungen, durch 'A, 'B, 'C, 'D... ohne Wiederholungen, durch, A', B', C', D', . . . bezeichnet. Z. B. C' = abc + abd + acd + bcd, als die Ternionen ohne Wiederholung aus a, b, c, d. Für beiderley Combinationen werden sowohl die Ordnung der Elemente in den einzelnen Complexionen, als auch die Folge der leztern in den einzelnen Classen nach bestimmten Regeln festgesezt. Sie heißen Classes complexionum (combinationum) simpliciter, im Gegensatze gegen diejenigen, die eine bestimmte Summe der Stellenzahlen haben.

26. Wenn die Combinationen in einer Classe, nach einer bestimmten Regel geordnet sind, so wird jede einzelne Combination (Complexion) durch eine rechter Hand zugefügte Zahl angezeigt, als 'C4 bedeutet die vierte Complexion in der dritten Combinationsclasse, wo Wiederholungen verstattet sind.

27. Die Buchstaben des deutschen kleinen Alphabets mit den Classenzeichen verbunden zeigen an, daß jede Combination mit der zugehörigen Versetzungszahl multiplicirt werden soll. Die Stelle des deutschen Buchstaben und des Classenzeichens sind dieselben. Z. B. wenn vier Elemente

a, b, c, d, je drey mit Wiederholungen verbunden werden, ist die Summe der Variationen (der Combinationen mit den Versetzungen).

$$c\,{}^{4}C = aaa + 3aab \ldots\ldots + 6abc,$$

wo der Kürze wegen nur die verschiedenen Arten der Combinationen angegeben sind, worin c verschiedene Werthe erhält.

28. Die Combinationen der Elemente a, b, c, d, etc. worin die Summe der Stellenzahlen, n, bestimmt ist, (Classes complexionum numeri propositi), werden nach der Folge der Classen durch ${}^{n}A$, ${}^{n}B$, ${}^{n}C$, ${}^{n}D$, etc. angezeigt. Die Stellen seyn, wie in dem Zeiger bemerkt ist,

1	2	3	4	5 ...	so ist, wenn n = 5 ist,
a	b	c	d	e ...	

und Wiederholungen genommen werden ${}^{5}A = e$; ${}^{5}B = ad + bc$; ${}^{5}C = aac + abb$; ${}^{5}D = a^{3}b$; ${}^{5}E = aaaaa$.

29. Wenn diesen Classenzeichen mit bestimmten Summen die Zeichen der Versetzungszahlen (Polynomial-Coefficienten) vorgesetzt werden, so bedeutet dieses, daß jede in der Classe enthaltene Combination mit der ihr zugehörigen Versetzungszahl multiplicirt werden soll. Z. B. $a\,{}^{5}A = 1.e$; $b\,{}^{5}B = 2ad + 2bc$; $c\,{}^{5}C = 3aac + 3abb$; $d\,{}^{5}D = 4a^{3}b$; $e\,{}^{5}E = 1.aaaaa$. Die Versetzungszahlen sind oft in derselben Classe verschieden, wenn sie gleich in diesen Beyspielen gleich groß sind. Z. B. $e\,{}^{7}E = 5a^{4}c + 10a^{3}b^{2}$,

30. Hieraus folgen nachstehende Relationen der Classen für Combinationen an sich und solche zu bestimmten Summen:

$'A = {}^1A + {}^2A + {}^3A + {}^4A \ldots$ (d. i. $a+b+c+d \ldots$)
$'B = \quad {}^2B + {}^3B + {}^4B \ldots$ (d. i. $aa+ab+bb \ldots$)
$'C = \quad {}^3C + {}^4C \ldots$ (d. i. $aaa + aab \ldots$)
$'D = \quad {}^4D \ldots$ (d. i. $aaaa + aab \ldots$)
etc. etc.

wenn nämlich das erste Element a die Stelle 1, nicht etwa o hat.

31. Die Classen der Variationen schlechtweg (simpliciter) ohne Rücksicht auf die Summe der Stellenzahlen werden durch die Buchstaben des großen lateinischen Alphabets aus der Cursivschrift angedeutet, mit Strichlein oben, wie *'A*, *'B*, *'C*, etc. wenn Wiederholungen verstattet sind; *A'*, *B'*, *C'* . . . wenn keine verstattet sind. Anstatt derselben mag man auch die obigen Classenzeichen mit dem Zeichen der Versetzungszahlen verbinden. Damit in der Handschrift diese Unterscheidung der Cursiv-Buchstaben von den gewöhnlichen keine Mühe mache, oder zu Verwechselungen Anlaß gebe, kann man jene von diesen auf eine leichte, willkührliche, aber festgesetzte Art, (Z. B. durch einen kleinen Strich unterwärts) unterscheiden.

32. Die involutorischen Aggregate, (s. Combination, 10, 38, 39.) von andern combinatorischen Ausdrücken zu unterscheiden, bezeichnet man sie durch *J*, mit Beyfügung des Summenexponenten der Involution oben linker Hand, wie ^7J, welches anzeigt, daß alle Combinationen aller Classen für die Lokalsumme 7 zusammen genommen werden sollen. Es ist also

$$^7J = {}^7A + {}^7B + {}^7C + {}^7D + {}^7E + {}^7F + {}^7G,$$

für den Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Combinationen sind in dem Artikel, Combination, (38.) in der Aufstellung nach Classen arithmographisch angegeben, so daß ${}^{7}A = g$; ${}^{7}B = af + be + cd$ ist, u. s. f.

Wenn die Involution Variationen enthält, so werden die Buchstaben *J*; *A*, *B*, *C* . . . aus der Cursiv-Schrift genommen.

Die Abtheilungen der lexikographischen Involutionen nach den Anfangsbuchstaben der Combinationen bezeichnet Hindenburg durch Buchstaben aus einem verzierten Alphabet, s. Sammlung combin. analyt. Abh. Th. I. S. 177. Im Druck unterscheiden sich diese Buchstaben sehr auszeichnend von den andern; in der Handschrift kann die Verzierung jedes andere ganz leichte Abzeichen (z. B. ein Strich durch den Buchstaben) vertreten.

33. Wenn mehreren Reihen, wie

$$a, b, c, d, e \ldots (p$$
$$A, B, C, D, E \ldots (q$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots (r$$

u. s. f.

gegeben sind, so bedeutet ${}^{1}\overset{pq}{B}$ das Aggregat aller Combinationen aus den beiden Reihen p, q, indem aus jeder derselben ein Element genommen wird. Gleichfalls ist ${}^{1}\overset{pqr}{C}$ das Aggregat aller Combinationen aus den drey Reihen p, q, r, aus jeder Reihe ein Element genommen. So auch mit den Combinationen mehrerer Reihen.

34. Wenn Combinationen aus zwey oder mehreren Reihen eine bestimmte Summe der Stellenzahlen ihrer Elemente haben, so wird dieses mittelst der beygefügten Summenzahl angedeutet, wie in ${}^{m}\overset{pq}{B}$; ${}^{m}\overset{pqr}{C}$, u. dgl. wo m die Summe der Stellenzahlen von den Elementen ist.

Die Anfangsglieder der Reihen haben zur Stellenzahl Eins.

Diese neue combinatorische Charakteristik kann anfänglich weitläuftig und verwickelt, und daher schwierig scheinen; ein Vorwurf, den man ihr auch zuweilen wirklich gemacht hat. Aber die Sache verhält sich ganz anders, wenn man zur wirklichen Anwendung fortschreitet. Was von den Zeichen hier gesagt worden ist, gilt auch von ihrer combinatorischen Auflösung. Man wird ihre Vorschriften durchaus leicht finden, wenn man die Regeln in der Anwendung anfänglich (wenigstens für ein Paar Beyspiele) nicht bloß mit den Augen, sondern mit der Feder in der Hand, verfolgt. Die hier zunächst (in III) folgenden Aufgaben mit den dortigen Exempeln können dazu Veranlassung geben, und so die Behauptung rechtfertigen.

III. Beyspiele von der Anwendung der combinatorischen Analysis.

35. Es sey $a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.} = p$, so ist, wenn die Combinationszeichen, A, B, C . . . M . . . sich auf die Elemente a, b, c, etc. beziehen, oder

für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ a & b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$

$$p = a({}^1A + {}^2Az + {}^3Az^2 + {}^4Az^3 + \text{etc.})$$
$$p^2 = b({}^2B + {}^3Bz + {}^4Bz^2 + {}^5Bz^3 + \text{etc.})$$
$$p^3 = c({}^3C + {}^4Cz + {}^5Cz^2 + {}^6Cz^3 + \text{etc.})$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$p^m = m({}^mM + {}^{m+1}Mz + {}^{m+2}Mz^2 + {}^{m+3}Mz^3 + \text{etc.}$$

Die Coefficienten dieser Potenzen der Reihe p hängen also von der ganz leichten combinatorischen Anordnung und

Darstellung der Complexionen zu bestimmten Summen 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . m, m + 1, m + 2 etc. in Combinationsclassen A, B, C . . M, nach vorstehendem Zeiger, mit Vorsetzung der zugehörigen Versetzungszahlen, ab. Insbesondere ist hier M ein Aggregat von Producten aus m Factoren, die aus a, b, c, d, etc. mit und ohne Wiederholungen genommen werden, und deren Local-Summen sind m; m + 1; m + 2; m + 3; etc. nach der Folge der Glieder.

Ein solches Product allgemein dargestellt ist $a^{\alpha}\ b^{\beta}\ c^{\gamma}\ d^{\delta}$, wo die Summe der Exponenten = m ist, und b, c, d . . irgend welche Coefficienten aus der Reihe p, ausser a, bedeuten. Für ein solches Product ist die Versetzungszahl =

$$\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\ldots 3.2.1.}{\alpha.\overline{\alpha-1}\ldots 1\times\beta.\overline{\beta-1}\ldots 1\times\gamma.\overline{\gamma-1}\ldots 1\times\delta.\overline{\delta-1}\ldots 1\times \text{etc.}}$$

$$=\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\ldots\overline{\alpha+2}.\overline{\alpha+1}.}{\beta.\overline{\beta-1}\ldots 1\times\gamma.\overline{\gamma-1}\ldots 1\times\delta.\overline{\delta-1}\ldots\times \text{etc.}}$$

da die Factoren 1.2 . . . $\alpha-1.\alpha$ im Nenner sich gegen eben solche in Zähler aufheben. Man setze $m = \alpha + r$, also $\alpha = m - r$, und multiplicire Zähler und Nenner mit $1.2.3 \ldots \overline{r-1}.r$, so ist die Versetzungszahl =

$$\frac{m.\overline{m-1}\ldots\overline{m-r+1}}{1.2\ldots r}\times$$

$$\frac{r.\overline{r-1}\ldots 2.1}{\beta.\overline{\beta-1}\ldots 1\times\gamma.\overline{\gamma-1}\ldots 1\times\delta.\overline{\delta-1}\ldots 1\times \text{etc.}}$$

Hier ist der erstere Factor der rte Binomial-Coefficient in der mten Potenz, und der zweyte die Versetzungszahl für die Factoren des Products $b^{\beta}\ c^{\gamma}\ d^{\delta}$ . . . . , deren Anzahl = r ist. Darum sondere man in den Aggregaten M von jedem Theile die darin enthaltene Potenz des Factors a ab, und bezeichne den übrig bleibenden Factor durch A, B, C, D. etc. je nachdem er aus einem, zwey, drey, vier Elementen, wie b, c, d, e, u. a. besteht. Diese

Classenzeichen beziehen sich nun auf

$$\text{den Zeiger}\quad \begin{matrix} 1, & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ b & c & d & e & f & \ldots \end{matrix}$$

Die Localsummen in p^m sind jetzt nach der Folge der Glieder 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. weil die Stellenzahl jedes Elements, wie a, b, c, etc. um 1 vermindert ist. Nämlich in ${}^{m}M$ ist bloß der Factor a^m enthalten; in ${}^{m+1}M$ sind enthalten a^{m-1} nebst b; in ${}^{m+2}M$ sind enthalten a^{m-1}, a^{m-2}, nebst c und b^2; in ${}^{m+3}M$ sind enthalten a^{m-1}; a^{m-2}; a^{m-3}, nebst d; bc; b^3, u. s. f. So wie der Exponent von z um 1 wächst, kommt ein folgender Factor aus der Reihe b, c, d, e, etc. hinzu, wogegen in der Combination mit diesem ein Factor von a abgeht. Die Versetzungszahlen jedes Theils jeder Classe bezeichne man gemeinschaftlich durch den mit dem Buchstabenzeichen der Classe gleich lautenden Buchstaben des kleinen deutschen Alphabets, und es erhält nun die mte Potenz, p^m, folgende combinatorische Form,

$$p^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^1 A\, z + \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^2 A \\ + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^2 B \end{matrix}\right| z^2$$

$$+ \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^3 A \\ + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^3 B \\ + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, \mathfrak{c}^3 C \end{matrix}\right| z^3 + \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^4 A \\ + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^4 B \\ + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, \mathfrak{c}^4 C \\ + {}^m\mathfrak{D}\, a^{m-4}\, \mathfrak{d}^4 D \end{matrix}\right| z^4$$

$$+ \ldots \ldots \ldots$$

$$+ \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}\, a^{n-1}\, \mathfrak{a}^n A \\ + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^n B \\ + {}^m\mathfrak{C}\, a^{n-3}\, \mathfrak{c}^n C \\ \vdots \\ + {}^m\mathfrak{N}\, a^{m-n}\, \mathfrak{n}^n N \end{matrix}\right| z^n + \text{etc.}$$

Die combinatorische Anordnung der Classen zu bestimmten Summen, wie hier vorkommen, läßt sich involutorisch ausführen. Auch liefert die Tafel (Combination, 41.) die Classen A, B, C, etc. In der ersten Verticalreihe ist die Classe A, in der zweyten die Classe B, in der dritten die Classe C, u. s. f. mit zunehmender Localsumme in jedem Abschnitte enthalten.

Exempel. Für $m = 3$ und $n = 7$, ist der Coefficient von $z^7 = 3a^2h + 3a(2bg + 2cf + 2de) + 1.\, a^0(3b^2f + 6bce + 3bd^2 + 3c^2d)$. Der vierte Binomial-Coefficient nebst den folgenden ist $= 0$ für $m = 3$.

Für $m = 8$ und $n = 6$ ist der Coefficient von

$$z^6 = 8a^7g + 28a^6(2bf + 2ce + d^2)$$
$$+ 56a^5(3b^2e + 6bcd + c^3) + 70a^4(4b^3d + 6b^2c^2)$$
$$+ 56a^3.\, 5b^4c + 28a^2b^6.$$

36. Es seyn zwey, drey, oder mehrere Reihen

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.} = p$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.} = q$$
$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.} = r$$

so ist ihr Product combinatorisch ausgedruckt, von zwey Reihen:

$$pq = {}^2\overset{pq}{B} + {}^3\overset{pq}{B}z + {}^4\overset{pq}{B}z^2 + {}^5\overset{pq}{B}z^3 + \text{etc.}$$

von drey Reihen:

$$pqr = {}^3\overset{pqr}{C} + {}^4\overset{pqr}{C}z + {}^5\overset{pqr}{C}z^2 + {}^6\overset{pqr}{C}z^3 + \text{etc.}$$

Die Binionen erhalten aus jeder der beiden Reihen p, q, einen Coefficienten; die Ternionen aus jeder der drey Reihen p, q, r, einen. Die Summe der Stellenzahlen der Elemente ist den Classenzeichen beygefügt. Die Anfangsglieder der Reihen haben zur Stellenzahl Eins. Die wirkliche Entwickelung in dem Artikel, Multiplication der Reihen.

37. Es sey die gebrochne Function,

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^5 + ez^4 + \text{etc.}}{1 - \beta z - \gamma z^2 - \delta z^3 - \varepsilon z^4 - \text{etc.}}$$

in eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe Q zu verwandeln, und zwar mit combinatorischen Bezeichnungen.

Man setze $\beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.} = y$, so ist

$$\begin{aligned}
Q = {} & a\,(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \text{etc.}) \\
& + bz\,(1 + y + y^2 + y^3 + \text{etc.}) \\
& + cz^2(1 + y + y^2 + \text{etc.} \\
& + dz^3(1 + y + \text{etc.}) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Nun ist, zufolge (35.), wenn daselbst statt a, b, c. etc. gesetzt wird β, γ, δ, etc. und die dortige Reihe p mit z multiplicirt wird, mit Zuziehung

des Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
y &= \mathfrak{a}({}^1Az + {}^2Az^2 + {}^3Az^3 + \text{etc.}) \\
y^2 &= \mathfrak{b}({}^2Bz^2 + {}^3Bz^3 + {}^4Bz^4 + \text{etc.}) \\
y^3 &= \mathfrak{c}({}^3Cz^3 + {}^4Cz^4 + {}^5Cz^5 + \text{etc.})
\end{aligned}$$

u. s. f.

Durch die Substitution dieser Werthe der Potenzen von y wird erhalten.

$$\begin{aligned}
Q = {} & a \\
& + [b + a\mathfrak{a}\,{}^1A]\,z \\
& + [c + b\mathfrak{a}\,{}^1A + a(\mathfrak{a}\,{}^2A + \mathfrak{b}\,{}^2B)]\,z^2 \\
& + [d + c\mathfrak{a}\,{}^1A + b(\mathfrak{a}\,{}^2A + \mathfrak{b}\,{}^2B) + a(\mathfrak{a}\,{}^5A + \mathfrak{b}\,{}^5B + \mathfrak{c}\,{}^5C)]\,z^3 \\
& + [e + d\mathfrak{a}\,{}^1A + c(\mathfrak{a}\,{}^2A + \mathfrak{b}\,{}^2B) + b(\mathfrak{a}\,{}^5A + \mathfrak{b}\,{}^5B + \mathfrak{c}\,{}^5C) \\
& \qquad + a(\mathfrak{a}\,{}^4A + \mathfrak{b}\,{}^4B + \mathfrak{c}\,{}^4C + \mathfrak{d}\,{}^4D)]\,z^4 \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Die Combinationen mit derselben Localsumme findet man in der Tafel, (Combination, 41.) in den horizontalen Abschnitten. wenn für die dortigen b, c, d, e, etc. hier β, γ, δ, ε, etc. gesetzt werden. So sind die Combinationen in dem lezten Gliede des Coëfficienten von z^4 folgende: ε; $\beta\delta + \gamma^2$; $\beta^2\gamma$; β^4. Der Coefficient selbst ist $= e + d\beta + c(\gamma + \beta^2) + b(\delta + 2\beta\gamma + \beta^3) + a(\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2 + 3\beta^2\gamma + \beta^4)$.

Hiermit vergleiche man die Auflösnng in dem Artikel, Buchstabenrechnung, (27). Wenn das Anfangsglied des Divisors nicht 1 sondern α ist, so hat man alle Coefficienten im Dividendus und Divisor durch α zu dividiren. Haben β, γ, δ, etc. das Vorzeichen +, so werden die Combinationen derselben, die eine ungerade Anzahl Elemente enthalten, negativ. Sind einige derselben, oder unter den Coefficienten des Dividendus, negativ, (wohl zu verstehen, in Rücksicht auf die hier gemachte Annahme der Vorzeichen), so werden die Combinationen negativ, worin eine ungerade Anzahl von Factoren oder Elementen vorhanden ist. Die Vorzeichen von β, γ, δ, etc. sind hier — genommen, damit in der entwickelten Formel alle Glieder dasselbe Zeichen + erhalten. Subtractiv ist hier nicht als negativ zu verstehen.

38. Es seyn gegeben die beiden Reihen:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc.} = y$$

$$\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \varepsilon y^3 + \delta y^4 + \text{etc.} = x,$$

man soll x durch eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe combinatorisch darstellen.

Mit Zuziehung des Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ a & b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$.

ist

$$
\begin{array}{ll|l|l|l|l}
x = & a & \underline{|z} & \underline{|z^2} & \underline{|z^3} & \\
 & +\beta a^1 A & +\beta a^2 A & +\beta a^3 A & +\beta a^4 A & + \text{etc.} \\
 & +\gamma b^2 B & +\gamma b^3 B & +\gamma b^4 B & +\gamma b^5 B & \\
 & +\delta c^3 C & +\delta c^4 C & +\delta c^5 C & +\delta c^6 C & \\
 & +\varepsilon d^4 D & +\varepsilon d^5 D & +\varepsilon d^6 D & +\varepsilon d^7 D & \\
 & + \text{etc.} & + \text{etc.} & + \text{etc.} & + \text{etc.} &
\end{array}
$$

Die Coefficienten werden auf die Art, wie in dem Artikel, Combination (42.) für das Polynomium $a + bz + cz^2 + \text{etc.}$ gewiesen ist, entwickelt, und aus der Tafel daselbst (41.) genommen. Es ist nämlich der Coefficient

$$
\begin{aligned}
\text{von } z &= \beta b + \gamma . 2ab + \delta . 3a^2 b + \varepsilon . 4a^3 b \\
&\quad + \zeta . 5a^4 b + \text{etc.} \\
\text{von } z^2 &= \beta c + \gamma(2ac + b^2) + \delta(3a^2 c + 3ab^2) \\
&\quad + \varepsilon(4a3o + 6a^2 b^2) + \zeta(5a^4 c + 1ca^3 b^2) \\
&\quad + \text{etc.} \\
\text{von } z^3 &= \beta d + \gamma(2ad + 2bc) + \delta(3a^2 d + 6abc + b^3) \\
&\quad + \varepsilon(4a^3 d + 12a^2 bc + 4ab^3) \\
&\quad + \zeta(5a^4 d + 20a^3 bc + 10a^2 b^3) + \text{etc.} \\
\text{von } z^4 &= \beta e + \gamma(2ae + 2bd + c^2) \\
&\quad + \delta(3a^2 e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2 c) \\
&\quad + \varepsilon(4a^3 e + 12a^2 bd + 6a^2 c^2 + 12ab^2 c + b^4) \\
&\quad + \zeta(5a^4 e + 20a^3 bd + 10a^3 c^2 + 30a^2 b^2 + 5ab^4) \\
&\quad + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Die Combinationen zu z^5 sind mit den Versetzungszahlen, doch ohne die hier beyzufügenden β, γ, δ, etc. in dem A. Combination (42.) aufgestellt. Bey einiger Aufmerksamkeit wird man ein Gesetz der Herleitung für die Coefficienten durch Vertauschungen der Elemente, durch Multi-

plication mit den Exponenten des letzten Elements, und Division mit dem Exponenten des letzten veränderten wahrnehmen, s. unten (45.).

Ein ganz leichtes Verfahren, wie man (wie hier erfordert wird) aus ${}^{n}A$ könne ${}^{n+1}B$, und daraus ${}^{n+3}C$, und daraus ferner ${}^{n+3}D$, u. s. w. involutorisch ableiten, zeigt (Erste Samml. c. a. Abh. S. 187) an ${}^{10}D$ als einem Beyspiele.

39. Die beiden Reihen seyn:

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.} = y,$$

$$\alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \varepsilon y^5 + \text{etc.} = x,$$

so ist mit Zuziehung des Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & \ldots \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{llll|l|l|l} & \lvert z & \lvert z^2 & & \lvert z^3 & \lvert z^4 & \\ x = & \alpha a\,{}^1A & + \alpha a\,{}^2A & & + \alpha a\,{}^3A & + \alpha a\,{}^4A & + \text{etc.} \\ & & \beta b\,{}^2B & & + \beta b\,{}^3B & + \beta b\,{}^4B & \\ & & & & + \gamma c\,{}^3C & + \gamma c\,{}^4C & \\ & & & & & + \delta d\,{}^4D & \end{array}$$

Diese Entwickelung ist eben so einfach als die vorhergehende, nach der zuletzt angeführten involutorischen Regel. Die Combinationen haben hier in jedem Coefficienten dieselbe Localsumme. Daher finden sie sich für jeden in einem horizontalen Abschnitte der Tafel, Combination (41.) bey einander, wenn daselbst die Buchstaben mit den nächst vorhergehenden vertauscht werden. Es ist

$$x = \alpha a z + (\alpha b + \beta a^2) z^2 + (\alpha c + \beta . 2ab + \gamma . a^3) z^3$$
$$+ (\alpha d + \beta (2ac + b^2) + \gamma . 3a^2 b + \delta a^4) z^4$$
$$+ \text{etc.}$$

40. Exempel. Es sey $x = \log. \text{nat} (1 + y)$, so ist $x = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \text{etc.}$ Ferner sey $y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}$

so ist

$$\log \text{nat.}\,(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})$$
$$= az + (b - \tfrac{1}{2}a^2)\,z^2 + (c - \tfrac{1}{2}.2ab + \tfrac{1}{3}a^3)\,z^3$$
$$+ (d - \tfrac{1}{2}(2ac + bb) + \tfrac{1}{3}.3a^2b - \tfrac{1}{4}a^4)\,z^4 + \text{etc.}$$

Mehr Exempel in der Hindenburgischen Abhandlung de infinitinomii dignitatibus exponentis indeterminati pag. 103 seqq; und in den beyden Sammlungen a. comb. Abhandl. Auch in dem folgenden Abschnitte selbst.

IV. Verbindung der combinatorischen und Differenzen-Rechnung.

41. Bey dem Gebrauch des Taylorschen Lehrsatzes, die Veränderung einer Function zu finden, wird die combinatorische Rechnungsmethode sehr brauchbar, um das Geschäft kurz, einleuchtend und sicher auszuführen.

42. Es sey φu irgend eine Function der veränderlichen Größe u, z. B. ihr Logarithme, oder der Sinus, wenn u ein Winkel ist, oder der Bogen, wenn u ein Sinus ist. Das Zeichen φ zeigt die Art der Function, aber unbestimmter Weise, an. Man setze zu u die polynomische Größe, $az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 +$ etc. worinn z eine von u ganz unabhängige willkührliche Größe ist. Nun soll dieselbe Function der zusammengesezten Größe, nämlich $\varphi(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})$ durch φu, und eine nach den ganzen bejahten Potenzen von z geordnete Reihe dargestellt werden, so daß diese Reihe die Veränderung der Function φu, zufolge der Veränderung von u angebe.

43. In dem Artikel, Differenzenrechnung, wird gezeigt, daß die Veränderung einer Function sich durch die Potenzen der Veränderung der Functionalgröße mit ganzen bejahten Exponenten ausdrucken läßt. Daselbst wird gelehrt, wie die Coefficienten dieser Potenzen bestimmt werden.

Diese giebt in der bequemsten Form der Taylorsche Lehrsatz. Es ist nähmlich, wenn y die Veränderung der Functionalgröße u ist,

$$\varphi(u+y) = \varphi u + \frac{d\varphi u}{1.du}y + \frac{d^2\varphi u}{1.2.du^2}y^2 + \frac{d^3\varphi u}{1.2.3.du^3}y^3 + \frac{d^4\varphi u}{1..4du^4}y^4 + \text{etc.}$$

wo das Differential du unveränderlich ist, so daß u sich gleichförmig verändert. Hier ist $y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4$ etc. Setzt man für y diese Reihe, so wird die Function, $\varphi(u+y)$, oder $\varphi(u + az + bz^2 + cz^3 + \text{etc.})$ durch φu und eine nach z geordnete Reihe erhalten.

Man setze der Kürze halber $\frac{d\varphi u}{1.du} = \alpha$; $\frac{d^2\varphi u}{1.2du^2} = \beta$;

$$\frac{d^3\varphi u}{1.2.3du^3} = \gamma; \frac{d^4\varphi u}{1..4du^4} = \delta;$$

u. s. f. so daß

$$\varphi(u+y) = \varphi u + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \text{etc.}$$

und die ganze Rechnung ist schon in (39.) gemacht, theils der Form nach, theils schon für die vier ersten Coefficienten entwickelt. Man bezeichne die Coefficienten der Reihe zur bessern Unterscheidung durch A, B, C, D, etc. so daß

$$\varphi(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}) =$$
$$\varphi u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$$

wo man die Symbole A, B, C, etc. mit den Classenzeichen der Combinationen nicht wird verwechseln können.

Es ist

$A = \alpha a$

$B = \alpha b + \beta a^2$

$C = \alpha c + \beta . 2ab + \gamma a^3$

$D = \alpha d + \beta(2ac + b^2) + \gamma . 3a^2 b + \delta a^4$

$E = \alpha e + \beta(2ad + 2bc) + \gamma(3a^2 c + 3ab^2)$
$\quad + \delta . 4a^3 b + \varepsilon a^5$

$F = \alpha f + \beta(2ae + 2bd + c^2) + \gamma(3a^2 d + 6abc + b^3)$
$\quad + \delta(4a^3 c + 6a^2 b^2) + \varepsilon . 5a^4 b + \zeta a^6$

$G = \alpha g + \beta(2af + 2be + 2cd)$
$\quad + \gamma(3a^2 e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2 c)$
$\quad + \delta(4a^3 d + 12a^2 bc + 4ab^3)$
$\quad + \varepsilon(5a^4 c + 10a^3 b^2) + \zeta . 6a^5 b + \eta a^7$

u. s. f.

44. Das Gesetz, wie diese Coefficienten unabhängig von einander gefunden werden, ist offenbar. Der mte Coefficient enthält m Glieder, so fern die Quotienten α, β, γ, etc. unbestimmt gelassen, oder nicht null werden. Wenn der (m — n)te derselben = o ist, so hat der Coefficient nur m — n — 1 Glieder. Aus den m Größen, a, b, c, d, etc. werden alle Combinationen mit der Lokalsumme m für den Zeiger 1, 2, 3, 4, 5, etc, zu a, b, c, d, e, etc. gemacht, und die Classen derselben nach der Folge von der ersten an, mit jenen α, β, γ, etc. verbunden, mit Beyfügung der Versetzungszahlen.

45. Die Combinationen der a, b, c, d, etc. lassen sich auch aus denen in den nächst vorhergehenden Coefficienten zugleich mit den numerischen Factoren folgendermassen herleiten. Wenn der letzte Buchstab in einem Terminus einfach ist, so wird dafür der im Alphabet nächstfolgende gesetzt. Ist der letzte Literalfactor eine Potenz, so multiplicirt man den Terminus mit dem Exponenten, ver-

mindert den Exponenten der Potenz um Eins, und setzt statt des weggenommenen Factors den nächstfolgenden Buchstaben. Ist der zweyte Literalfactor vom Ende der Buchstab, welcher im Alphabet vor dem letzten vorhergeht, einfach oder eine Potenz, so verfährt man mit diesem auf eine ähnliche Art, dividirt aber zugleich mit dem erhöhten Exponenten des letzten Literalfactors. Ist der vorletzte Literalfactor nicht ein solcher, so wird keine Veränderung als die mit dem letzten vorgenommen. Der dritte Literalfactor vom Ende, wenn ein solcher vorhanden ist, und noch entferntere bleiben unverändert. Das letzte Glied in dem Coefficienten muß noch für sich hinzugefügt werden.

Der Grund dieser Herleitung, was die Elemente der Combinationen betrifft, ist in dem Artikel, Combination, §. 41. angegeben. Die Verwandlung der numerischen Factoren wird aus der Beschaffenheit der Versetzungszahlen leicht hergeleitet. Enthält ein Product ω einfache Factoren, so ist die Versetzungszahl das Product 1. 2. 3. . ω, wenn sie alle verschieden sind. Für α gleiche wird dieses Product durch 1. 2. . α dividirt, für andre an der Zahl β unter sich gleiche durch 1. 2. . β, u. s. f. Ist nun der letzte Factor in einer Combination q^ν, so kommt für denselben der Divisor 1. 2. . . ν; in der abgeleiteten, die sich auf $q^{\nu-1} r$ endigt, aber der Divisor 1. 2. . . $(\nu - 1)$. Folglich wird die Versetzungszahl der letztern durch die Multiplication mit ν erhalten. Endigt sich die Combination auf $p^\mu q^\nu$, so ist wegen dieser Factoren das Product 1. 2. 3. . . . ω durch 1. 2 . . . $\mu \times$ 1. 2 . . . ν zu dividiren, dagegen in der einen der abgeleiteten, die sich auf $p^{\mu-1} \times q^{\nu+1}$ endigt, dasselbe durch 1. 2 . . . $(\mu - 1) \times$ 1. 2 . . $(\nu + 1)$ zu dividiren ist. Die Versetzungszahl der letztern Combination wird also aus der für die erstere durch die Multiplication mit μ und Division durch $\nu + 1$ erhalten.

46. Eine merkwürdige, vollständige Derivation jedes Coefficienten aus dem nächst vorhergehenden geschieht folgendergestalt. Für a, b, c, d, e, etc. wird folg-

weise gesetzt 2b, 3c, 4d, 5e, 6f, etc. für α, β. γ, δ, ε, etc. folgweise $2\beta a$, $3\gamma a$, $4\delta a$, $5\varepsilon a$, $6\zeta a$, etc. und für A, B, C, D, E, F, etc. folgweise 2B, 3C, 4D, 5E, 6F, etc. In den Producten und Potenzen wird diese Vertauschung mit jedem einfachen Factor vorgenommen. Der Grund dieser Herleitungen wird in dem Artikel, Derivations-Rechnung, sich ergeben.

47. Exempel I. Es sey $\varphi u = \log. nat. u$, so ist $\alpha = \frac{1}{u}$; $\beta = -\frac{1}{2u^2}$; $\gamma = +\frac{1}{3u^3}$;

$\delta = -\frac{1}{4u^4}$; $\varepsilon = +\frac{1}{5u^5}$; u. s. f.

Folglich sind für $\log nat. (u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + etc.) = \log nat\, u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$ etc. die Werthe der Coefficienten:

$$A = \frac{a}{u}$$

$$B = \frac{b}{u} - \frac{a^2}{2u^2}$$

$$C = \frac{c}{u} - \frac{2ab}{2u^2} + \frac{a^3}{3u^3}$$

$$D = \frac{d}{u} - \frac{2ac + b^2}{2u^2} + \frac{3a^2b}{3u^3} - \frac{a^4}{4u^4}$$

$$E = \frac{e}{u} - \frac{2ad + 2bc}{2u^2} + \frac{3a^2c + 3ab^2}{3u^3} - \frac{4a^3b}{4u^4} + \frac{a^5}{5u^5};$$

u. s. f.

48. Die Relationen zwischen diesen Coefficienten und allen vorhergehenden sind in folgenden Gleichungen enthalten:

$Au = a$

$2Bu + Aa = 2b$

$3Cu + 2Ba + Ab = 3c$

$4Du + 3Ca + 2Bb + Ac = 4d$

$5Eu + 4Da + 3Cb + 2Bc + Ad = 5e$

$6Fu + 5Ea + 4Db + 3Cc + 2Bd + Ae = 6f$

u. s. f.

Jede dieser Gleichungen entsteht aus der nächst vorhergehenden, wenn die Größen der beiden Reihen A, B, C, D, etc, und a, b, c, d, etc. auf die in (46) angezeiget Art jede mit der folgenden vertauscht werden, und zugleich für u die in der Functionalgröße darauf folgende a, ohne die veränderliche z, gesetzt wird. Es gehört nämlich u mit in die Reihe a, b, c, d, etc. vor a als Coefficient von z^0 oder von 1, und nach dem Gesetze der Vertauschung für diese muß u mit a vertauscht werden.

49. Exempel II. Es sey $\varphi u = e^u$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Nun sey . . .

$$\varphi(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}) =$$
$$e^u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$$

wo $u + az + bz^2 + \text{etc.}$ der natürliche Logarithme der Zahl $e^u + Az + Bz^2 + \text{etc.}$ ist. Da $\varphi u = e^u$, so ist $d\varphi u = e^u du$; $d^2\varphi u = e^u du^2$; $d^3\varphi u = e^u du^3$; $d^4\varphi u = e^u du^4$; u. s. f. (s. Exponential-Rechnung). Daher $\alpha = \varphi u = e^u$; $\beta = \frac{1}{2}\alpha$; $\gamma = \frac{1}{6}\alpha$; $\delta = \frac{1}{24}\alpha$; u. s. f. Demnach ist

$e^u = \alpha$

$A = \alpha a$

$B = \alpha b + \frac{\alpha}{2} \cdot a^2$

$C = \alpha c + \frac{\alpha}{2} \cdot 2ab + \frac{\alpha}{6} \cdot a^3$

$D = \alpha d + \frac{\alpha}{2}\ (2ac + b^2) + \frac{\alpha}{6} \cdot 3a^2b + \frac{\alpha}{24} \cdot a^4$

$E = \alpha e + \frac{\alpha}{2}\ (2ad + 2bc) + \frac{\alpha}{6}\ (3a^2c + 3ab^2)$

$+ \frac{\alpha}{24} \cdot 4a^3b + \frac{\alpha}{120} \cdot a^5$

u. s. f.

50. Die Coefficienten durch eine rücklaufende Reihe auszudrucken, mache man die in (46.) angewiesenen Vertauschungen zwischen den Größen der Reihe a, b, c, d, etc. und der Reihe A, B, C, D, etc. Da e^u mit in die Reihe der A, B, C, D, etc. als Coefficient von z^0 gehört, so ist e^u, wofür man bequemer α schreibt, mit A zu vertauschen, nach dem Gesetze der Vertauschung für A, B, C, etc. Aus der Gleichung $A = \alpha a$ werden nun alle folgenden hergeleitet.

Es ist

$A = \alpha a$

$2B = Aa + 2\alpha b$

$3C = Ba + 2Ab + 3\alpha c$

$4D = Ca + 2Bb + 3Ac + 4\alpha d$

$5E = Da + 2Cb + 3Bc + 4Dd + 5\alpha e$

u. s. f.

51. Exempel III. Es sey $\varphi u = \sin u$, so ist $d\varphi u = \cos. u . du$; $d^2\varphi u = -\sin u . du^2$; $d^3\varphi u =$

$- \cos u . du^3$; $d^4 \varphi u = + \sin u . du^4$. u. s. f. Also ist $\alpha = \cos u$; $\beta = - \frac{1}{2} \sin u$; $\gamma = - \frac{1}{6} \cos u$; $\delta = + \frac{1}{24} \sin u$; etc. Mittelst dieser Werthe werden die Coefficienten in der Reihe für

$$\sin (u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}) =$$
$$\sin u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$$

gefunden, wenn in den allgemeinen Werthen derselben (43.) für α, β, γ, etc. die hier gefundenen Werthe gesetzt werden.

52. Exempel IV. Die Coefficienten in der entwickelten Potenz, $(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})^m = u^m + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$ können mittelst des in (46.) angegebenen Derivations-Processes sehr leicht durch eine rücklaufende Reihe gefunden werden. Es ist hier $\varphi u = u^m$, also $\alpha = mu^{m-1}$ woraus $Au = mu^m a$. In die Reihe a, b, c, d, etc. gehört auch vor a die Größe u, und in die Reihe A, B, C, D, etc. gehört auch vor A die Größe u^m. Nach dem Gesetze der Vertauschung für jene Größen muß u mit a, und u^m mit A vertauscht werden. Durch diese und die andern in (46.) angegebenen Vertauschungen werden aus der ersten Grundgleichung alle folgende erhalten, nämlich

$$Au = mu^m a$$
$$2Bu = (m-1) Aa + 2mu^m b$$
$$3Cu = (m-2) Ba + (2m-1) Ab + 3mu^m c$$
$$4Du = (m-3) Ca + (2m-2) Bb + (3m-1) Ac + 4mu^m d$$
$$5Eu = (m-4) Da + (2m-3) Cb + (3m-2) Bc + (4m-1) Ad + 5mu^m e$$

u. f. f.

Summirung der Potenzen irgend welcher Größen durch die Combinationen derselben.

53. Man formire das Product aus einer bestimmten Anzahl binomischer Factoren,

$$(1 + az)\ (1 + bz)\ (1 + cz)\ (1 + dz) \text{ etc.}$$

und setze es =

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$

so ist A die Summe aller Factoren, a, b, c, d, etc.; B die Summe der Producte je zweyer, wie ab, ac, bc; C die Summe der Producte je dreyer, wie abc, abd, bcd; D die Summe der Producte je vierer, wie abcd, abce, u. s. f.; sämmtlich ohne Wiederholungen, (Buchstabenrechnung, 19.). Nimmt man von dem Producte und von der Reihe die Logarithmen, so ist

$$l(1 + az) + l(1 + bz) + l(1 + cz) + l(1 + dz) + \text{etc.}$$

$$= l(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.})$$

Jeder Logarithme werde in eine Reihe verwandelt, so ist, bey Anwendung der natürlichen Logarithmen, der erste Theil jener Gleichung =

$$+ az - \tfrac{1}{2}a^2z^2 + \tfrac{1}{3}a^3z^3 - \tfrac{1}{4}a^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ bz - \tfrac{1}{2}b^2z^2 + \tfrac{1}{3}b^3z^3 - \tfrac{1}{4}b^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ cz - \tfrac{1}{2}c^2z^2 + \tfrac{1}{3}c^3z^3 - \tfrac{1}{4}c^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ dz - \tfrac{1}{2}d^2z^2 + \tfrac{1}{3}d^3z^3 - \tfrac{1}{4}d^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Der zweyte Theil der Gleichung, nämlich der Logarithmus von $1 + Az + Bz^2 + cz^3 + \text{etc.}$ werde in die Reihe,

$$Pz - \tfrac{1}{2}Qz^2 + \tfrac{1}{3}Rz^3 - \tfrac{1}{4}Sz^4 + \tfrac{1}{5}Tz^5 - \tfrac{1}{6}Vz^6 + \text{etc.}$$

verwandelt, so ist aus (47), wenn daselbst $u = 1$ gesetzt

wird, wodurch $\log \mathrm{nat}\, u = 1$ ist, bey gehöriger Vertauschung der Bezeichnungen,

$$P = A$$

$$\tfrac{1}{2}Q = \tfrac{1}{2}A^2 - \tfrac{1}{1}.B$$

$$\tfrac{1}{3}R = \tfrac{1}{3}A^3 - \tfrac{1}{2}.2AB + \tfrac{1}{1}C$$

$$\tfrac{1}{4}S = \tfrac{1}{4}A^4 - \tfrac{1}{3}.3A^2B + \tfrac{1}{2}(2AC + B^2) - \tfrac{1}{1}D$$

$$\tfrac{1}{5}T = \tfrac{1}{5}A^5 - \tfrac{1}{4}.4A^3B + \tfrac{1}{3}(3A^2C + 3AB^2) - \tfrac{1}{2}(2AD + 2BC) + \tfrac{1}{1}E$$

$$\tfrac{1}{6}V = \tfrac{1}{6}A^6 - \tfrac{1}{5}.5A^4B + \tfrac{1}{4}(4A^3C + 6A^2B^2) - \tfrac{1}{3}(3A^2D + 6ABC + B^3) + \tfrac{1}{2}(2AE + 2BD + C^2) - \tfrac{1}{1}F.$$

u. s. f.

Hier ist P die Summe der a, b, c, d, etc. als Potenzen vom ersten Grade betrachtet, Q die Summe ihrer Quadrate, R der Cuborum, S der Biquadrate, u. s. f. Das Gesetz der Formation ist sehr klar. In der Summe der nten Potenzen sind alle Classen der Combinationen von A, B, C, D, E, enthalten, deren Localsumme = n ist, mit Aufnahme der Wiederholungen. Jede Combination ist mit der Versetzungszahl ihrer Elemente begleitet. Jede Classe wird durch die Anzahl ihrer Elemente dividirt. Die Vorzeichen der Classe wechseln ab. Das Aggregat giebt den nten Theil der Summe der Potenzen von a, b, c, d, e, etc.

Die Form, welche Euler in den Comm. Petr. novis, T. XV. diesen Summen giebt, ist nicht so einleuchtend. Er ordnet die Hauptthei le der Formeln nach der Anzahl der Elemente aus der Reihe A, B, C, D, E, F, etc. Dadurch wird das Gesetz der numerischen Coefficienten verwickelt.

54. Die rücklaufenden Formeln werden aus (48.) erhalten, wenn die gehörige Vertauschung der Bezeichnungen gemacht wird,

nämlich für die dortigen	a,	b,	c,	d,	e,	etc.
	A,	B,	C,	D,	E,	etc.
hier	A,	B,	C,	D,	E,	etc.
	P,	$-\frac{1}{2}$Q,	$\frac{1}{3}$R,	$-\frac{1}{4}$S,	$\frac{1}{5}$T,	etc.

Es ist

$$P = A$$
$$Q = PA - 2B$$
$$R = QA - PB + 3C$$
$$S = RA - QB + PC - 4D$$
$$T = SA - RB + QC - PD + 5E$$
$$V = TA - SB + RC - QD + PE - 6F$$

u. s. f.

Dieses sind dieselben Gleichungen, welche in dem Artikel, Combination, (43.) unmittelbar aus Vergleichung der Combinationen hergeleitet sind.

Schriften über die Combinationslehre, die combinatorische Analysis und ihre Anwendung.

Hindenburgii Infinitinomii dignitatum historia, leges ac formulae, 1779.

Der combinatorische Theil des Buchs enthält: die Auflösung der beiden wichtigen sogenannten Discerptionsprobleme; ihre mannichfaltige Anwendung auf die Analysis; einen Anhang combinatorischer Tafeln.

Ej. Novum systema permutationum, combinationum et variationum, 1781.

Die Grundbegriffe der Combinationslehre und ihre Zeichen. Die Operationen größtentheils arithmetisch-combinatorisch.

Eschenbach de serierum reversione, 1789.

Die combinatorische Umkehrung der Reihen, ohne Recurrenz der Glieder.

Fischers Theorie der Dimensionszeichen, 2 Th. 1792. Die Charakteristik des Verf. ist bey weitem nicht so bequem als die Hindenburgische. Mancherley brauchbare, oder zur Übung dienende Aufgaben, welche man suchen muß durch die Hindenburgische Methode aufzulösen. Das wichtigste ist die Untersuchung über die Umkehrung der Reihen, und Auflösung der Gleichungen durch dieses Mittel.

Rothe, formulae de serierum reversione demonstratio universalis, 1793.

Die combinatorische Rechnungsmethode ist hier mit großer Geschicklichkeit angewandt. Das schöne und merkwürdige, von dem Verfasser entdeckte Gesetz der Coefficienten in der umgekehrten Reihe, welches der la Grangischen Umwandlungsformel zur Seite gestellt zu werden verdient, wird in dem Artikel, Umkehrung der Reihen, vorgetragen, und auf einem andern Wege anschaulich gemacht werden.

Hindenburg, problema solutum maxime universale ad serierum reversionem 1793.

Verbesserungen, Zusätze, Erweiterung der Eschenbach-Rothischen Reversionsformel.

Töpfer, combinatorische Analytik und Theorie der Dimensionszeichen in Parallel gestellt, 1793. Gegen die hier gemachte Beschuldigung vertheidigt sich Fischer in der Schrift,

Über den Ursprung der Theorie der Dimensionszeichen, und ihr Verhältniß gegen die combinatorische Analysis des Hrn. Prof. Hindenburg 1794. womit zu vergleichen: Pfaffs Erklärung zur Rechtfertigung des Hrn. Prof. Hindenburg, ꝛc. im Intelligenzbl. der A. Litt. Zeit. 1802. nr. 169. und Hindenburgs Bemerkungen über diese Erklärung eb. das. nr, 192. Man muß es schon für unwahrscheinlich halten, daß jemand, um die

Methode eines andern sich zuzueignen, sie unbequemer macht.

Burckhardt Methodus combinatorio - analytica evolvendis fractionum continuarum valoribus idonea, 1794.

Dieses und andere combinatorische Verfahren, von Hindenburg, Rothe, Töpfer, im mathem. Arch. 1stem Band.

Hindenburg, terminorum ab infinitinomii dignitatibus coefficientes Moivreanos sequi ordinem Lexicographicum, 1795.

Hier wird gezeigt, daß Moivre's Verfahren auf lexikographische Anordnung dieser Coefficienten führt. Die von Hindenburg (Infin. Dign.) gegebene ist arithmographisch, nach Classen.

Mathematisches Archiv, herausgegeben von Hindenburg, angefangen 1794.

Darin sind viele hierher gehörige Abhandlungen enthalten. Mit diesem ist zu verbinden:

Sammlung combinatorisch- analytischer Abhandlungen, herausgegeben von Hindenburg, erste Samml. 1796, zweyte 1800. Die erste kam unter dem Titel: der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis, heraus. In diesen Sammlungen werden vornehmlich rein- combinatorische Operationen, und die damit in Verbindung stehenden Involutionen gebraucht.

Rothe, theorema binomiale universaliter demonstratum, 1796; vermittelst Variationen und Combinationen.

De Prasse usus Logarithmorum infinitinomii in theoria aequationum, 1796.

Hierin eine deutliche Anleitung zu dem combinatorischen Calcül.

In Pfaffs Disquisitionibus analyticis ist in

dem tractatu de reversione serierum ein Abschnitt p. 260 — 321. de theoremate polynomiali combinatorie tractato, ejusque applicatione ad reversionem serierum; ein sehr lehrreicher Commentar über die Hindenburgische Combinationslehre.

Stahls Grundriß der Combinationslehre nebst Anwendung derselben auf die Analysis, 1800. Mit Fleiß ausgearbeitet.

Desselben Einleitung in das Studium der Combinationslehre. 1801.

Weingärtners Lehrbuch der combinatorischen Analysis; 2 Theile. 1800.

Im ersten, die Theorie der Hindenburgischen Combinationslehre; im zweyten, die Anwendung derselben auf mehrere analytische Aufgaben. Der Vortrag deutlich.

Columnarzahl ist das Product einer Polygonalzahl in ihre Seite, oder in ihre Stellenzahl. Die Namenzahl einer Polygonalzahl sey $= n$ (für Trigonalzahlen $= 3$, für Tetragonalzahlen $= 4$, u. s. f.), die Seite $= m$, so ist die Polygonalzahl $= \frac{1}{2} m ((m-1)(n-2)+2)$, und die Columnarzahl $= \frac{1}{2} m^2 ((m-1)(n-2)+2)$. Man hat diese Form, wie manche andere, jetzt bey Seite gelegt. S. ... burgs Progressionalcalcul. S. 300 ff.

Commensurabel wird von Größen gesagt, die sich durch einen und denselben Theil ohne Reste messen oder theilen lassen. Alle ganze Zahlen sind commensurabel durch die gemeinschaftliche Einheit; doch nennt man insbesondere Zahlen commensurabel, die einen andern gemeinschaftlichen Theiler als die Einheit haben. Alle Brüche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, oder darauf gebracht werden können, sind commensurabel. Bringt man sie auf einen gemeinschaftlichen Nenner n, so ist der Bruch $\frac{1}{n}$ das gemeinschaftliche Maaß, z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{7}$ haben das

gemeinschaftliche Maaß $\frac{1}{28}$. Größen sind noch commensurabel, wenn ihr gemeinschaftliches Maaß eine Irrationalzahl ist, oder sich mit der Einheit nicht vergleichen läßt, wie, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$, wo $\sqrt{2}$ das gemeinschaftliche Maaß ist, daher sich diese Zahlen wie 3, 5, 10 verhalten.

Commensurabel in der Potenz nennt Euklides (X. 3. Erkl.) gerade Linien, deren Quadrate von einem und demselben Flächenraume gemessen werden, z. B. Zahlen statt der Linien genommen, die Zahlen $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, deren Quadrate, 3, 5, commensurabel sind. So auch $2\sqrt{3}$, $7\sqrt{5}$, deren Quadrate 12 und 245 sind.

Complanation, Ebnung, ist die Vergleichung des Inhalts einer krummen Fläche mit einer ebenen.

Die Alten haben nur die Oberflächen eines senkrechten Cylinders und Kegels, einer Kugel und eines Kugelabschnittes mit Kreisflächen vergleichen können. S. Archimedes von Kugel und Cylinder. B. I. Satz 14. 15. 16. 30. 38. Huygens fand im J. 1657. die Ebnung des parabolischen Konoids, und in dem folgenden Jahre die Vergleichung der Oberfläche des hyperbolischen Konoids und der Sphäroiden mit Kreisflächen. S. Horol oscill. P. III. prop. 9. Er gab davon einigen Geometern Nachricht, unter andern auch Wallis, der ihm bald darauf seine Methode, diese Vergleichungen zu machen, mittheilte, (Operum T. I. p. 555; 562), und auch die hohle Oberfläche fand, welche eine Parabel durch die Umdrehung um die berührende am Scheitel beschreibt, (a. a. O. S. 562.). Diese gründet sich auf seine Arithmetik unendlicher Größen, und ist beschwerlich. Huygens hat nur die Constructionen, ohne Beweise, gegeben. Durch die neuere Infinitesimal-Rechnung wird die Oberfläche derer Körper, die durch Umdrehung um eine Axe entstehen, nach einem allgemeinen Verfahren gefunden.

Es ist AZ (Fig. 74. Tab. V.) eine gerade Linie, die

bey der Umdrehung der Winkelfläche ZAX um die gerade AX eine Kegelfläche beschreibe. Man setze $AP = x$; $PQ = \Delta x$; die auf AX senkrechten $MP = y$; $NQ = y + \Delta y$; die Seite des von AM beschriebenen Kegels $AM = z$, und $MN = \Delta z$. Nun ist die von AM beschriebene Kegelfläche gleich einem Dreyecke, dessen Grundlinie der von PM beschriebene Kreisumfang, und Höhe AM ist, also $= \pi y z$, wo $1 : \pi$ das Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zum Umfange ist. Die von AN beschriebene Kegelfläche ist $= \pi (y + \Delta y)(z + \Delta z)$ also die Fläche des von MN beschriebenen Kegelstücks $= \pi (z\Delta y + y\Delta z + \Delta y . \Delta z) = 2\pi \Delta z (y + \frac{1}{2}\Delta y)$, weil $y : z = \Delta y : \Delta z$ ist. Da $\Delta z^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, so ist die Fläche des Kegelstücks $= \pi (y + \frac{1}{2}\Delta y) \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$.

Es sey nun AZ (Fig. 75) eine krumme Linie in der Ebene ZAX, welche sich um die gerade AX drehet, wodurch AZ die Oberfläche eines runden Körpers beschreibt. Man ziehe PM, QN senkrecht auf AX, und Mm parallel mit PQ, ferner die Chorde MN, und die berührende TM in M, welche QN in n schneidet. Ist MN gegen AX concav, so fällt n in die Verlängerung von QN; ist MN convex, so liegt n zwischen N und m. Es sey $AP = x$; $PQ = \Delta x$; $MP = y$; $Nm = \Delta y$; und $mn = u\Delta x$, wo u eine Zahl ist, der Exponens des Verhältnisses $PT : PM$, wenn PT die Subtangente für den Punct M ist. Die von der Chorde MN beschriebene Fläche ist $= 2\pi (y + \frac{1}{2}\Delta y) \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$; die von der Linie Mn beschriebenen ist $= 2\pi (y + \frac{1}{2} u \Delta x) \sqrt{(\Delta x^2 + u^2 \Delta x^2)}$. Beide verhalten sich wie

$$(y + \tfrac{1}{2}\Delta y) \sqrt{(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2})} : (y + \tfrac{1}{2} u \Delta x) \sqrt{(1 + u^2)}.$$

Die Gränze dieses Verhältnisses ist das von 1 : 1. Denn die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist $= u$, (berührende Linie, 12.), und die Gränze der Verhältnisse, $y + \frac{1}{2}\Delta y : y$, und

Kk

$y + \frac{1}{2}u\Delta x : y$, ist auch $= 1 : 1$, daher auch die von den vorangehenden Gliedern dieser Verhältnisse.

Die von dem Bogen AM beschriebene Oberfläche sey $= S$, die von dem Bogen MN beschriebene $= \Delta S$. Da bey einem concaven Bogen ΔS zwischen die von der Chorde und von Mn beschriebenen Oberflächen fällt, und diese sich ohne Ende einander nähern, so ist auch das Gränzverhältniß von ΔS und der von der Chorde MN beschriebenen Kegelfläche das Verhältniß der Gleichheit. Bey einem convexen Bogen ist die von demselben beschriebene Oberfläche größer als jede der von den beiden geraden Linien beschriebenen. Diese können sich aber nicht einander nähern, ohne zugleich jener sich zu nähern, und zuletzt ihr gleich zu werden. Folglich ist, die für Gränzverhältnisse gehörigen Bezeichnungen gebraucht, $dS = 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$,

oder, weil $dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 1 : \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$

ist, $\frac{dS}{dx} = 2\pi y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Dividirt man auf

beiden Seiten mit einer willkührlichen, aber bestimmten Größe h, um das Differential der Oberfläche mit dem Differential einer Fläche zu vergleichen, so ist $\frac{dS}{h\,dx} = \frac{2\pi y}{h} \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Doch braucht diese

Größe h nur in Gedanken zugesetzt zu werden.

Der Bogen AM sey $= s$, so ist $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$,

oder $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; also ist $dS = 2\pi y\, ds$.

Die Oberfläche eines runden Körpers zu finden, hat man nun folgendergestalt zu verfahren. Aus der Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x, y, suche

man den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = p$, so ist . .

$dS = 2\pi y\, dx \sqrt{(1 + p^2)}$. Wird in dieser Function

y durch x ausgedruckt, so wird durch die Integration S erhalten.'

Oder man nenne $\frac{dx}{dy} = q$, so ist . . . .

$dS = 2\pi y dy \sqrt{(1 + q^2)}$, worin alles durch y ausgedruckt werden muß.

Exempel. I. Es sey AM ein Kreisbogen mit dem Halbmesser a beschrieben. Die Gleichung für den Kreis ist $2ax - xx = yy$; also $adx - xdx = ydy$,

und $p = \frac{a - x}{y}$; daher $1 + p^2 = \frac{yy + aa - 2ax + xx}{yy}$

$= \frac{a^2}{y^2}$. Also ist $dS = 2\pi a dx$, und $S = 2\pi a x$,

wenn die Oberfläche mit x zugleich anfängt.

Der Abschnitt der Kugelfläche von A bis M ist dem Sinusversus AP proportional; die Kugelzone zwischen zwey mit PM, QN in irgend einem Abstande von einander beschriebenen Kreisen dem zugehörigen Unterschiede der Sinusversus AP und AQ.

Man ziehe die Chorde AM; so ist (am Kreise) $2ax = AM^2$, also ist der Kugelfläche Abschnitt $S = \pi . AM^2$, das ist dem Kreise mit dem Halbmesser AM. Die Oberfläche der Halbkugel ist also $= 2\pi aa$; der ganzen Kugel $= 4\pi aa$.

Exempel. II. Die beschreibende Linie sey eine Parabel, die sich um ihre Axe dreht. Die Gleichung ist $ax = yy$, wenn a der Parameter ist. Die Differentialgleichung ist

$adx = 2ydy$, also $p = \frac{a}{2y}$; $1 + p^2 = \frac{4yy + aa}{4yy}$

$= \frac{4ax + aa}{4yy}$: also $dS = \pi dx \sqrt{(4ax + aa.)}$ Daraus ist $S = \frac{\pi(4ax + aa)^{\frac{3}{2}}}{6a} +$ Const. (Integralfor-

meln, 4.). Das Integral sey $= 0$; wenn $x = 0$ ist. Der veränderliche Theil des Integrals ist $= \frac{1}{6}\pi a a$, für $x = 0$, also ist $Const = -\frac{1}{6}\pi a a$, und demnach die Oberfläche des parabolischen Konoids,

$$S = \frac{1}{6}\pi \left(\frac{(4ax + aa)^{\frac{2}{3}}}{a} - aa \right).$$

Exempel. III. Die beschreibende Linie sey wiederum eine Parabel, aber die Axe der Drehung sey die Linie AY, welche die Parabel in dem Scheitel A berührt. Die Abscisse auf der Drehungs-Axe genommen ist $AR = y$, die Ordinate $MR = x$. Daher ist das Differential der von AM um AR beschriebenen Oberfläche, $dS = 2\pi x \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi x\, dx \sqrt{(1 + p^2)} = \pi dx \sqrt{(4x^2 + ax)}$. Man setze $a = 8b$, so ist $dS = 2\pi dx \sqrt{(2bx + x^2)}$. Die Integration giebt

$$S = \pi(b+x)\sqrt{(2bx+x^2)} - \pi b^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(2bx+xx)}} + C.$$

(Integralformel. 37.). Es ist $\int \frac{dx}{\sqrt{(2bx + xx)}}$

$$= \log nat \frac{b + x + \sqrt{(2bx + xx)}}{const.}.$$ (Integral-Form. 35.). Die Const. in dem logarithmischen Integral ist $= b$. damit für $x = 0$ die Zahl zu dem Logarithmen $= 1$, und der Logarithme dadurch $= 0$ werde. Das algebraische Integral bedarf keiner Constans. Also ist

$$S = \pi(b + x)\sqrt{(2bx + x^2)} \; \ldots\ldots$$
$$- \pi b^2 \log nat \frac{b + x + \sqrt{(2bx + x^2)}}{b}.$$

Man setze $b + x = \frac{b}{\cos\varphi}$, so ist $\sqrt{(2bx + xx)}$

$= b \tan \varphi$, und $b + x + \sqrt{(2bx + xx)} =$
$\frac{b(1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi} = b \tan (45° + \frac{1}{2}\varphi)$; auch . . .

$(b + x)\sqrt{(2bx + xx)} = \frac{bb \tan \varphi}{\cos \varphi}$

$= bb \tan \varphi . \sec \varphi$. Also ist

$S = \pi b^2 (\tan \varphi . \sec \varphi - \log nat. \tan (45° + \frac{1}{2}\varphi))$

oder auch

$S = \pi b^2 (\tan \varphi . \sec \varphi + \log nat \tan (45° - \frac{1}{2}\varphi))$,

weil das Product der Tangenten von Winkeln, deren Summe 90 Grad ausmacht, die Einheit giebt, daher hier ihre Logarithmen gleich und entgegen gesetzt sind.

Die Rechnung in Kästners Analysis des Unendlichen S. 696 ff. hat eine andre Form als die hier geführte. Zuletzt ist ein Fehler begangen, und $\frac{1}{2}$ statt $\frac{1}{2}$ gesetzt. Daher muß der logarithmische Theil das Vorzeichen + erhalten.

Exempel. IV. Die Linie AZ sey eine Hyperbel, die sich um ihre Axe AX drehet; es wird die Oberfläche des konoidischen Körpers gesucht.

Die halbe Haupt-Axe der Hyperbel sey $= a$, die halbe conjugirte $= b$; die Abscisse von dem Mittelpuncte aus genommen sey $= x$, die Ordinate $= y$; so ist die Gleichung für beide, $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$.

Daraus folgt die Differentialgleichung $a^2 y\, dy = b^2 x\, dx$,

und $p = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, also $1 + p^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2}$

$= \frac{(a^2 + b^2) b^2 x^2 - a^4 b^2}{a^4 y^2}$.

Setzt man $a^2 + b^2 = e^2$, so ist $1 + p^2 = \frac{b^2 (e^2 x^2 - a^4)}{a^4 y^2}$,

und $dS = \frac{2\pi b}{aa} dx \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}$.

...

Es ist $\int dx \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)} = \frac{1}{2} x \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}$ $- \frac{1}{2} a^4 \int \frac{dx}{\sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}}$, und $\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}}$

$\int \frac{dx}{c\sqrt{(x^2 - a^4 : c^2)}} = \frac{1}{c} \log. \text{nat.} \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^4 : c^2)}}{\text{const}} =$

$\frac{1}{c} \log. \text{nat.} \frac{cx + \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}}{c. \text{const}}$ (Integr Formel, 36.30)

Beide Integrale sollen für $x = 0$ Null seyn, also ist die Constans des algebraischen Integrals $= -\frac{1}{2} a \sqrt{(c^2 a^2 - a^4)} = -\frac{1}{2} a^2 b$. In dem logarithmischen Integral muß für $x = a$ die Zahl $= 1$ seyn, also ist $\frac{ca + ab}{c} = \text{const}$. Folglich ist

$$S = \frac{\pi b}{aa} (x \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)} - a^2 b)$$

$$- \frac{\pi a^2 b}{c} \log \text{nat.} \frac{cx + \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}}{a(b + c)} \sqrt{}$$

Man setze $\frac{cx}{aa} = \sec \varphi$, so ist $\frac{c^2 x^2 - a^4}{a^4}$ $= \sec \varphi^2 - 1 = \tang \varphi^2$, und $cx + \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}$ $= aa \; (\sec \varphi + \tang \varphi) = aa \, \text{tg} (45° + \frac{1}{2} \varphi)$, nach Goniometrie (43.). Also ist

$$S = \frac{\pi b}{c} (a^2 \, \text{tg} \, \varphi \sec \varphi - bc) - \frac{\pi a^2 b}{c} \text{ l. n. } \frac{a \, \text{tg} (45° + \frac{1}{2} \varphi)}{b + c}$$

Man setze den Winkel der Asymptoten mit der Axe $= \alpha$; so ist $\frac{b}{a} = \tang \alpha$; $\frac{c}{a} = \sec \alpha$;

$\frac{bc}{aa}$ tang α. sec α; $\frac{b+c}{a}$ = tang α + sec α

= tang ($45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$); $\frac{b}{c}$ = sin α. Daraus ist nun

$$S = \pi a^2 \sin\alpha\ (\sec\varphi.\ \tan\varphi - \sec\alpha.\ \tan\alpha)$$

$$- \pi a^2 \sin\alpha.\ \log\ nat\ \frac{tg(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{tg(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Exempel V. Der hyperbolische Bogen AM drehe sich um AY, die berührende im Scheitel. Nun ist $dS = 2\pi x \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi x dy \sqrt{(1 + q^2)}$, wo $q = \frac{dx}{dy}$ ist. Es ist $q = \frac{a^2 y}{b^2 x}$, und . . . .

$$1 + q^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{b^4 x^2} = \frac{a^4 y^2 + a^2 b^2 y^2 + a^2 b^4}{b^4 x^2}$$

$= \frac{a^2 (c^2 y^2 + b^4)}{b^4 x^2}$. Demnach $dS = \frac{2\pi a dy}{b^2} \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}$.

Es ist $dy\,(c^2 y^2 + b^4) = \frac{1}{2} y \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}$

$+ \frac{1}{2} b^4 \int \frac{dy}{\sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}}$; und $\int \frac{dy}{\sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}}$

$= \frac{1}{c} \log\ nat\ \frac{y + \sqrt{(y^2 + b^4 : c^2)}}{const}$ $\sqrt{}$

Also ist

$$S = \frac{\pi a y}{b^2} \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)} + \frac{\pi a b^2}{c} \text{l. n.} \frac{cy + \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}}{b^2}$$

wo die Const. in dem logarithmischen Integral gehörig beygefügt ist.

Man setze $\frac{cy}{bb}$ = tang ω, so ist $\frac{c^2 y^2 + b^4}{b^4}$ = tang $\omega^2 + 1$ = sec ω^2; auch sey wiederum der Winkel der Asymptoten mit der Axe = α, so

ist $\frac{ay}{b} = \frac{a}{c}$ tang ω = cos α. tang ω. Dadurch wird

$$S = \pi b^2 \cos\alpha\,(\text{tang}\,\omega.\sec\omega + \log\text{nat}\,(\text{tang}\,\omega + \sec\omega))$$

oder

$$S = \pi b^2 \cos\alpha\,(\text{tang}\,\omega.\sec\omega + \log\text{nat.}\,\text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega)).$$

Von der Complanation eines Sphäroids, sowohl des gedruckten als des gestreckten, mit der Anwendung auf die Erde, in dem Artikel Sphäroid.

Man ziehe auf die berührende MT die senkrechte MN, welche die Abscissenlinie in N schneidet. Die Subnormale PN ist $= \frac{y\,dy}{dx}$ (berührende Linie, 42.); also

$$MN = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2\,dy^2}{dx^2})} = y\sqrt{(1 + p^2)}.$$ Man setze MN = z, so ist das Differential der von AM beschriebenen runden Oberfläche $= 2\pi z\,dx$. Man verlängere jede Ordinate PM der krummen Linie AMZ, bis sie der Normale MN gleich ist, so entsteht aus den Endpuncten der auf die Abscissenlinie solchergestalt gestellten MN eine zweyte krumme Linie, von deren Area das Differential $= z\,dx$ ist. Für dieselbe Abscisse beider Curven verhält sich die von AM beschriebene Oberfläche zu der Area der zweyten Curve, wie $2\pi : 1$, oder wie der Umfang eines Kreises zu dessen Halbmesser.

Dieser Satz ist für die Geschichte der Mathematik merkwürdig. Leibnitz erzählt, daß derselbe ihn auf die Differentialrechnung geleitet habe. Ganz in dem Anfange seines mathematischen Studiums, sagt er, sey ihm bey dem Anblick eines gewissen Beweises vom der Größe einer Kugelfläche plötzlich ein großes Licht aufgegangen. Er habe eingesehen, daß überhaupt eine Figur, die von den Normalen einer Curve, wenn sie auf die Are senkrecht gestellt werden, erzeugt wird, (wie am Kreise von den Halbmessern), der Oberfläche des runden, durch die Umdrehung

jener Figur um ihre Axe entstandenen Körpers proportional sey. Dieser Satz habe ihm sehr viel Vergnügen gemacht, und er habe sogleich das charakteristische Dreyeck erdacht, dessen Seiten indivisibilia, oder genauer zu reden unendlich kleine, oder Differentialgrößen sind, woraus er eine Menge Lehrsätze ohne Mühe hergeleitet habe. De Geometria recondita, cet. Acta Er. 1686. Opp. Tom. III. p. 193.

Complement, Ergänzung, ist überhaupt, was einer Größe zugesetzt werden muß, um ein gewisses Ganzes derselben auszumachen.

Complement eines eigentlichen Bruchs ist der Unterschied desselben von der Einheit.

Arithmetisches Complement eines Logarithmen ist der Unterschied desselben von 1 oder von 10. z. B. das Complement von log. 4,75 = 0,6766936 ist 0,3233064. Das Complement von log. 475 = 2,6766936 ist 7,3233064. Man mag auch das Complement eines Logarithmen, der größer als 1 ist, in Beziehung auf die Einheit nehmen, wenn dieser 10 geliehen werden, die man aber als subtractiv hinter dem Logarithmen anzeichnen, oder sich als geliehen gedenken muß. So ist das Complement des Logarithmen 2,6766936 dieses; 7,3233064 — 10, oder schlechtweg 7,3233064. Der Logarithme eines eigentlichen Bruchs wird am bequemsten als das Complement des umgekehrten uneigentlichen angesehen, und auf die angezeigte Art geschrieben. So ist $\log \frac{69}{8567} = 7{,}9060203 - 10$ da $\log \frac{8567}{69} = 2{,}0939797$ ist. Die beiden Brüche mit einander multiplicirt geben zum Producte die Einheit; die Summe ihrer Logarithmen ist = 0 = log. 1. Der Logarithme der Cotangente eines Winkels ist das

Complement des Logarithmen der Tangente; so sind auch die Logarithmen eines Sinus und einer Cosecante, eines Cosinus und einer Secante sich gegenseitig Complemente, in Beziehung auf die Einheit, wenn der Halbmesser = 1 gesetzt wird. Wird er zu 10000 Millionen genommen, so sind sie Complemente in Beziehung auf 20. Die Complemente der Logarithmen gewähren die Bequemlichkeit, daß man sie zu andern Logarithmen addiren kann, wo die Logarithmen selbst zu subtrahiren sind, so daß man statt zwey verschiedener Operationen nur eine anwendet.

Complement in einem Parallelogramm sind die beiden Parallelogrammen, welche mit den beiden, um die Diagonale an einem Puncte derselben gelegten, Parallelogrammen das ganze Parallelogramm ausmachen. Sie sind einander gleich. S. Euklids Elemente I. 43.

Complement eines Winkels oder Kreisbogens ist der Unterschied des rechten Winkels oder des Quadranten und jenes. z. B. von 40° sind 50° das Complement. Das Complement eines Winkels zu 180° nennt man zur Unterscheidung lieber Supplement, oder gewöhnlicher den Nebenwinkel

Complement kommt auch in der Astronomie, der Schifffahrt und der Befestigungskunst vor.

Complex heißt in der Analysis eine Größe, die aus mehreren, durch die Vorzeichen + und — verbundenen Theilen, zusammen gesetzt ist, wie a + b — c.

Complexion, ist der Inbegriff mehrerer, auf irgend eine Art (in der Combinationslehre durch bloße Nebeneinanderstellung) verbundenen Dinge sie mögen nun alle verschieden, oder einige derselben einerley seyn. Der Ausdruck ist ein Synonymum von Combination, welches letztere einen etwas weitern Umfang hat, da es zugleich den Nebenbegriff von Auswahl enthält, weswegen auch van Schooten und Jacob Bernoulli die Combinationen: Electiones genannt haben, dagegen Complexion jedes einzelne Pro-

duct der Auswahl anzeigt. Leibnitz hat den Ausdruck, Complexion, aufgebracht in der Abhandlung de arte combinatoria, Lipsiae 1668. Er ist etymologisch richtiger als Combination, wiewohl er doch nicht die Unionen mit anzeigt. In dem Artickel, Combination, habe ich, wegen der nahen Beziehung auf die combinatorische Analysis, bloß den Ausdruck, Combination, für die Verbindung mehrerer Dinge aus einer gegebenen Anzahl, mit Einschluß der einzelnen und aller zusammen, gebraucht. Die deutschen neuern Analysten gebrauchen häufig den Ausdruck, Complexion; die Ausländer nur, Combination, (s. Combination.).

Compositio ist I. dasselbe, was mit einem griechischen Worte Synthesis heißt, s. Analysis als Methode, und, Synthetische Methode. II. compositio motus, die Erzeugung einer Bewegung durch zwey oder mehrere besondere Bewegungen, s. Bewegung. in der zweyten Abtheilung III. Compositio rationum, die Entstehung eines Verhältnisses aus zwey oder mehreren, gleichen oder ungleichen, Verhältnissen, s. Verhältniß.

Concav und Convex, hohl und erhaben, sind verbundene Begriffe, da was nach einer Gegend hin hohl ist, nach der andern hin erhaben ist. Ein Bogen einer krummen Linie ist concav nach einer Gegend, wenn der Durchschnitt der berührenden an den Endpuncten nach der entgegengesetzten hin liegt, und dieses für je zwey Puncte dieses Bogens statt findet. Der Bogen ist convex, nach einer Gegend, wenn der Durchschnitt der berührenden nach eben derselben hin liegt.

Es sey Mm (Fig. 76 und 77. Tab. V.) ein Bogen einer krummen Linie Ll, und AB die Abscissenlinie. Die Berührende in M ist Dd, in m ist es Ee, ihr Durchschnittspunct ist F. In Fig. 76 ist der Bogen Mm concav gegen AB, in Fig. 77. ist Mm convex gegen AB.

2. Man ziehe auf die berührenden die Normalen MR, mR, welche sich in R schneiden, so ist der Bogen Mm nach AB hin concav, wenn der Durchschnittspunct R nach derselben Seite, wie AB, hin liegt; convex, wenn beide auf entgegengesetzten Seiten des Bogens liegen.

3. Die Normalen schneiden die Abscissenlinie in Q und q. Werden die Abscissen von A her genommen, und folgt die größere Ordinate auf die kleinere, so ist für einen concaven Bogen (Fig. 76.) der spitze Winkel AQM kleiner als Aqm. Nimmt man die Abscissen von B her, wobey die größere Ordinate vor der kleinern vorhergeht, so ist ebenfalls der vorhergehende stumpfe Winkel Bqm kleiner als der nachfolgende BQM. Die Tangente des kleinern stumpfen Winkels ist zwar, absolut genommen, größer als die des größern stumpfen, allein da beide negativ sind (Goniometrie, 8.), so wird tang Bqm als die kleinere, und tang BQM als die größere betrachtet (s. entgegengesetzte Größen), daher auch hier die Tangente des vorhergehenden Winkels der Abscissenlinie mit der Normale, auf der Seite des Anfangspunctes der Abscissen, kleiner ist als die Tangente des nachfolgenden Winkels, eben so wie für spitze Winkel.

Für einen convexen Bogen (Fig 77.) ist hingegen die Tangente des vorhergehenden Winkels der Abscissenlinie mit der Normale, auf der Seite des Anfangspunctes der Abscissen, größer als die Tangente des nachfolgenden Winkels, in beiden Fällen, die Veränderungen der Coordinaten mögen gleichnamig oder ungleichnamig seyn.

4. Damit der mögliche Wechsel des Concaven und Convexen an einem endlichen Bogen nicht in die Frage komme, so muß der Bogen unendlich klein genommen werden. Die Frage, ob die krumme Linie in einem Puncte M concav oder convex sey, zu beantworten, muß man untersuchen, ob das Differential der Tangente des Winkels, welchen die Normale mit der Abscissenlinie, nach dem Anfangspuncte der Abscissen hin macht, positiv oder negativ ist.

5. Es sey $AP = x$; $PM = y$, und pm größer als PM, so ist die Tangente des W. $PMD = \frac{dx}{dy}$ (s. berührende Linie, 14.); also auch tang $PQM = \frac{dx}{dy}$. Die krumme Linie ist in M gegen die Abscissenlinie concav, wenn das Differential des Quotienten $\frac{dx}{dy}$ positiv ist, und convex, wenn dieses Differential negativ ist. Ist der Quotient $\frac{dx}{dy}$ negativ, d. i. wenn die Ordinaten abnehmen, indem die Abscissen wachsen, so bleibt diese Bestimmung unverändert, wofern nur x und y bei positiv sind, wie hier angenommen ist.

6. Da für einen endlichen durchaus concaven oder converen Bogen die Lage des Durchschnittspunkts R in Absicht auf Mm nicht von der Größe des Unterschiedes Pp der beiden Abscissen, AP, Ap, abhängt, so kommt es auch bey einem unendlich kleinen Bogen nicht auf das Verhältniß der Differentiale der Abscissen gegen einander an. Es muß daher dx unveränderlich gesetzt werden, damit nicht die Veränderungen dieses Differentials Einfluß auf die Qualität des Differentials $\frac{dx}{dy}$ haben mögen. Es ist nun $d.\frac{dx}{dy} = -\frac{dx\,d^2y}{dy^2}$, oder

$$d.\frac{dx}{dy} = -\frac{dx^2}{dy^2}.\frac{d^2y}{dx}.$$

7. Das Differential, $\frac{d^2y}{dx}$, zu finden, suche man aus der Gleichung zwischen x und y zuerst den Quotienten $\frac{dy}{dx}$

und differentiire diesen, worauf man in dem Werthe des Differentials, wenn dy darin vorhanden ist, für dieses seinen Werth durch dx setzt. Dadurch erhält $\frac{d^2y}{dx}$ die Form Pdx, wo P eine Function x von und y, oder auch einer von beiden allein ist.

8. Ob die Abscisse positiv oder negativ ist, macht keinen Unterschied bey der gegenwärtigen Untersuchung. Die Folge der Abscissen wird darum nicht umgekehrt, weil sie negativ werden. So wie bey positiven x auf $+x$ die Abscisse $+x+\Delta x$ folgt, so muß man bey negativen auf $-x$ die Abscisse $-x+\Delta x$ folgen lassen. Die Differenz Δx, und so auch das Differential dx, sind immer additiv.

9. Für negative y sind die Winkel AQM und Aqm (oder Bqm, BQM) negativ, also auch ihre Tangenten, und der Unterschied dieser Tangenten, nämlich in Beziehung auf die Lage, die für positive Winkel Statt hätte. Dadurch wird das Differential von $\frac{dx}{dy}$, dem für positive Ordinaten entgegengesetzt, und daher wird auch der Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx}$, so wie $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder P das Entgegengesetzte von dem Werthe für dieselben Ordinaten als positiv betrachtet.

Oder man lege eine neue Abscissenlinie der anfänglichen parallel in dem Abstande c, größer als eine negative Ordinate y absolut genommen, und setze die Ordinaten zu der neuen Abscissenlinie, $z=c+y$. Alsdann ist z positiv, wo jene y negativ ist, und $\frac{d^2z}{dx^2}$ zeigt eine entgegengesetzte Lage des Bogens an als $\frac{d^2y}{dx^2}$ angiebt.

10. Für positive y ist eine krumme Linie nach der Axe der Abscissen hin concav, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, convex, wo dieser Quotient positiv ist. Denn in jenem Falle wächst die Tangente $\frac{dx}{dy}$ des Winkels der Normale mit der Abscissenlinie, in diesem nimmt sie ab.

Für negative y ist die krumme Linie nach der Abscissenlinie hin concav, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, convex, wo dieser Quotient negativ ist. Denn hier werden die Winkel der Normalen mit der Abscissenlinie negativ, und ein negatives Differential zeigt daher eine absolute Zunahme (Concavität), so wie ein positives eine absolute Verminderung (Convexität) anzeigt.

11. Man kann beide Regeln zusammenziehen in folgende: Wo die Ordinate und der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleichnamig sind, da ist die Curve gegen die Abscissenlinie convex; wo beide ungleichnamig sind, da ist sie concav.

13. Exempel. I. Die krumme Linie sey eine Parabel, deren Gleichung ist $ax = yy$. Hieraus ist die Differentialgleichung, $a\,dx = 2y\,dy$, und die vom zweyten Grade, $0 = 2dy^2 + 2y\,d^2y$, oder $0 = \frac{a^2dx^2}{4y^2} + y\,d^2y$, also $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{4y^3}$. Dieser Quotient und die Ordinaten sind ungleichnamig und daher ist die ganze Linie gegen die Axe concav.

13. Exempel. II. Die krumme Linie sey eine Hy-

perbel; die Abscissenlinie werde von dem Mittelpuncte aus auf der einen Asymptote genommen; die Ordinaten seyn der andern Asymptote parallel, so ist die Gleichung, $xy = ab$. Weil die normalen Ordinaten den schief liegenden proportional sind, so gilt die obige Regel auch für die letztern. Es ist $y\,dx + x\,dy = 0$, und ferner $dy\,dx + dx\,dy + x\,d^2y = 0$. Daraus ist $\frac{d^2y}{dx^2} = + \frac{2y}{x^2}$. Die Hyperbel ist gegen ihre Asymptote durchaus convex.

14. Exempel III. Die allgemeinste Gleichung für den Kreis mit rechtwinklichten Coordinaten ist $(x - b)^2 + (y - c)^2 = a^2$, wo a der Halbmesser ist. Hieraus wird erhalten, $(x - b)\,dx + (y - c)\,dy = 0$, und aus dieser Gleichung die folgende,

$$dx^2 + dy^2 + (y - c)\,d^2y = 0.$$

Mittelst der Substitution des Werthes von dy durch dx wird

$$\left(1 + \frac{(x - b)^2}{(y - c)^2}\right) dx^2 = -(y - c)\,d^2y.$$

Also ist, mit Zuziehung der ursprünglichen Gleichung,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{a^2}{(y - c)^3}.$$

Die Linie c ist der Abstand des Mittelpunctes von der Abscissenlinie, auf der Seite der positiven Ordinaten. Liegt der ganze Kreis auf dieser Seite der Abscissenlinie, so ist der Bogen concav, wo $y > c$, und convex, wo $y < c$ ist. Wird der Kreis von der Abscissenlinie geschnitten, so ist der Bogen concav, wo $y > c$; convex, wo y positiv und kleiner als c ist; concav für negative y. Man sieht hier sehr gut, wie es gleichgültig ist, ob die Abscissen positiv oder negativ genommen werden.

15. Exempel. IV. Es sey $y = ax - bx^2 + cx^3$, so ist $dy = a\,dx - 2bx\,dx + 3cx^2\,dx$, und $d^2y = (-2b + 6cx)\,dx^2$, also $\frac{d^2y}{dx^2} = 6cx - 2b$.

Wo dieser Quotient mit y gleichnamig ist, da ist die Curve gegen die Abscissenlinie convex; wo sie ungleichnamig sind, concav. Da für hinlänglich große positive (negative) x die Ordinate y positiv (negativ) bleibt, so sind beide Schenkel der Curve gegen die Abscissenlinie zuletzt convex, und bleiben es. Wo $6cx - 2b = 0$ ist, da ist ein Wechsel des Convexen und Concaven, weil für zwey x, deren eines größer, das andere kleiner als $\frac{2b}{6c}$ oder $\frac{b}{3c}$ ist, die Werthe des Quotienten entgegengesetzt werden, vorausgesetzt, daß y seine Beziehung nicht ändere.

Wenn die Curve ihre Abscissenlinie dreymahl schneidet, so wechselt in den Durchschnittspuncten Convex und Concav nur in Beziehung auf die Abscissenlinie; das Concave und Convexe nach derselben Gegend hin bleibt. Aber in dem Puncte der Curve, für welchen $x = \frac{b}{3c}$ ist, geschieht ein Wechsel des Concaven und Convexen nach derselben Gegend hin genommen.

16. Der Punct der Curve, wo der Wechsel des Concaven und Convexen geschieht in Rücksicht auf eine und dieselbe Gegend, bey fortschreitender Folge der Ordinaten, heißt ein Wendungspunct (punctum flexus contrarii). Für denselben ist $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Zwey in der stetigen Reihe der berührenden einander nächste fallen hier in eine gerade Linie. Denn für eine gerade Linie ist $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Die Curve und ihre berührende haben hier drey unendlich nahe Ordinaten gemein. Die Curve liegt hier auf beiden Seiten der berührenden.

17. Wenn die Ordinaten aus einem gegebenen Puncte gezogen werden, so ist zu bestimmen, nach welcher Gegend

hin derjenige Punct liegt, dem sich der Durchschnitt zweyer Normalen immer mehr nähert, je näher sie einander kommen, das ist, nach welcher Gegend hin der Mittelpunct des Krümmungskreises liegt, s. Krümmungskreis.

Concentrisch oder **homocentrisch** sind Kreise, die aus einem gemeinschaftlichen Mittelpuncte beschrieben sind. Wenn die Durchmesser sich verhalten wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : etc. so verhalten sich die innerste Kreisfläche und die Kreisringe wie 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : etc. s. Armilla.

Conchoide des Nikomedes, **Muschellinie**, ist eine Linie vom vierten Grade, die eine Asymptote mit zwey Paaren unendlicher Schenkel hat, auch einen Knoten schürzen, oder eine Spitze haben kann. Ihre Construction ist folgende:

Es sey XAX (Fig. 78. Tab. V.) eine gerade Linie, und C ein gegebener Punct außer derselben. Von C aus werde CAB auf diese senkrecht gezogen, und auf dieser werden AB und AD einer gegebenen Linie gleich genommen. Durch C ziehe man irgend eine Linie CM, welche AX in R schneide, und nehme auf derselben von R aus $RM = AB$, wie auch $RN = AD = AB$, so sind M, N Puncte in der Conchoide. Auf diese Art kann man eine beliebige Anzahl Puncte der Linie bestimmen, und diese aus freyer Hand durch einen Zug verbinden. Die Linie mBM heißt die o b e r e C o n c h o i d e, die Linie nDN die untere; der Punct C heißt der Pol der Conchoide; die gerade XAX ihre Basis.

Die Conchoide läßt sich auch durch stetige Bewegung eines Stifts beschreiben. Man setze zwey Liniale CA und XAX rechtwinklicht zusammen. Das erstere bekomme in C einen Stift, das andere eine Rinne. Man nehme noch ein Linial CM, welches über C hinaus reiche, und gebe diesem nach beiden Enden hin einen Einschnitt, damit es sich bey der Drehung um den Stift C der Länge nach verschieben könne. In M, N, R befestige man drey

Stifte, in den Entfernungen RM, RN, die der gegebenen Linie wie AB ist, gleich sind. Der Stift R ist bestimmt, sich in der Rinne über XAX zu bewegen, und die Stifte in M, N dienen die krumme Linie zu beschreiben. Nämlich indem das Linial CM von A nach M hin um C gedreht wird, verschiebt es sich zugleich nach CM hin, weil der Stift R genöthigt ist auf AX zu bleiben. Folglich beschreiben die Stifte M, N die Conchoide.

Nikomedes, ein griechischer Geometer, der in dem zweyten Jahrhundert vor Ch. Geb. gelebt haben mag, hat die Conchoide erdacht, um durch ihre Hülfe das berühmte Problem aufzulösen, wie zwischen zwey gegebenen Linien zwey stetige Proportionalen zu finden seyn. Wie er sie dazu angewandt hat, welches in der That künstlich ist, zeigt Pappus in Collect. mathem. L. III. prop. 5; und Eutocius in Comment. in Archimedem de sphaera et cyl. L. II. Daraus Reimer in Hist. probl. de duplic cubi, p. 169. Nikomedes hat die Conchoide auch gebraucht, einen geradlinichten Winkel in drey gleiche Theile zu theilen. Sein Verfahren kennen wir nicht mehr, da seine Schrift über die Conchoide verloren gegangen ist. Wie es geschehen kann, s. in dem Artikel, Winkeltheilung. Die Alten haben von der Conchoide nur den obern Theil mBM betrachtet, welcher jenseits der Asymptote, von dem Pol C aus gerechnet, liegt.

Die Conchoide gebraucht Newton zur geometrischen Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade, de aequationum constructione lineari, in Arithm. univ. p. 115. ff. Er wählt sie, weil sie in Absicht der Construction nach dem Kreise die einfachste unter allen krummen Linien ist, wenn sie gleich, algebraisch betrachtet, von einem höhern Grade ist, als die Kegelschnitte.

Vignola hat die Conchoide zur Verjüngung der Säulenschäfte angewandt, wie es scheint, ohne zu wissen, daß die Alten sie gekannt haben. Er zeichnet nur einzelne Puncte, die er durch einen freyen Zug verbindet. Blondel zeigte hernach, daß die Verjüngungs-Linie die Con-

choide der Alten sey, und machte den Baumeistern das Instrument sie zu zeichnen, welches Nikomedes ersonnen hatte, bekannt. Cours d'Architecture par d' Aviler, p. 116. edit. 1750.

Die Conchoide ist zur Messung der Fässer angewandt. Müller, ein Ingenieur und Visirer zu Gröningen nahm an, daß die Linie, nach welcher die Faßdauben gekrümmt sind, der obern Conchoide MBm nahe komme, so daß ein Faß durch die Umdrehung des Theils MBm um den Theil Pp der Linie XAX erzeugt werde, wo AB den Halbmesser des Fasses durch das Spuntloch, und PM = pm der Halbmesser der Böden ist. Müllers Versuch den Inhalt der Fässer durch Anwendung der Muschellinie zu finden. Aus dem Holländ. Leipzig 1784. Erinnerungen wegen der fehlerhaften Rechnung hat Oberreit gemacht im Leipziger Magazin für die Mathematik, 1787. II. VII.

Die Gleichung für die Conchoide ist leicht gefunden. Es sey AB = a; CA = b; AP = x; PM = y, so daß die positiven Ordinaten y für die obere Conchoide MBm gelten. Man ziehe CM, so ist CA : AR = PM : PR; und daraus CA + PM : AR + PR = PM : PR. Also ist $PR = \frac{xy}{b+y}$ Da RM = a,

so ist $\frac{x^2 y^2}{(b+y)^2} + y^2 = a^2$,

und die geordnete Gleichung für die Conchoide ist

$$\begin{aligned} y^4 + 2by^3 + x^2y^2 &- 2a^2by - a^2b^2 = 0. \\ -a^2 &\,\text{„} \\ +b^2 &\,\text{„} \end{aligned}$$

Eine Ordinate an der untern Conchoide QN sey = z, die Absciffe AQ = u; so ist $QR = \frac{uz}{b-z}$, und $\frac{u^2 z^2}{(b-z)^2} + z^2 = a^2$. Die Gleichung zwischen u und

z ist in der zwischen x und y begriffen, wenn y negativ genommen wird.

Für jede Absciſſe hat die Ordinate y entweder zwey oder vier Werthe. Sie hat wenigstens zwey Werthe, da die Linie CM sich so lange drehen kann, bis daß sie der AX parallel ist. Alsdann ist x unendlich groß, und $y = 0$. Die Abscissenlinie AX ist die Asymptote der obern und untern Conchoide. Diese nähern sich immer mehr einer konischen gleichseitigen Hyperbel. Denn die Gleichung, welcher sich ihre Gleichung immer mehr nähert, ist $x^2 y^2 = a^2 b^2$ oder $xy = ab$, das ist die für eine Hyperbel, deren Abscissen auf einer ihrer Asymptoten und die Ordinaten parallel mit der andern genommen werden. Diese macht also mit jener einen rechten Winkel. Die Hyperbel ist daher eine gleichseitige, an welcher das Quadrat der halben Axe $= 2ab$ ist.

Die Gleichung für die Conchoide kann auch vier Ordinaten für dieselbe x geben, nämlich, wenn a größer als b ist. Dies ist der Fall in der Conchoide (Fig. 79) wo AC kleiner als AB ist. Hier reicht in dem Anfange der Abscissen die Ordinate in dem untern Theile der Conchoide über C hinaus bis D. In der Lage CF der sich drehenden Linie ist $EF = EC$. Für alle Lagen zwischen CB und CF fällt der Endpunct der die untere Conchoide beschreibenden Linie über C hinaus, und beschreibt daselbst den Bogen DGC, so wie bey entgegengesetzter Drehung von B nach F ein gleicher Bogen DHC beschrieben wird. Bey fortgesetzter Drehung über F hinaus beschreibt der nach C hin liegende Punct den Zweig CN bis ins Unendliche; so wie auf der andern Seite der Zweig Cn beschrieben wird. Die untere Conchoide schürzt bey C einen Knoten. Bey der Drehung nach der einen Seite wird der Theil DGCN, bey der Drehung nach der andern, der Theil DHCn beschrieben. Es sey KH die Ordinate, welche den Bogen DHC in H berührt, so sind für eine Abscisse, die kleiner als AK ist, vier Ordinaten vorhanden, die positive PM an der obern Conchoide;

und drey negative P m, eine an dem Zweige C N, und zwey an der Ovale. Eben so auf der andern Seite von A D. Die Succession der Vorzeichen in der Gleichung für y zeigt eine einzige positive Wurzel an, da nur ein Wechsel vorhanden ist, das dritte Glied mag das Vorzeichen + oder — haben.

Der Punct C des Knotens ist ein Doppelpunct, da er zu zwey Zweigen G C N und H C n gehört. Allein, wenn auch A C größer ist als A D, wie in Fig. 78. wodurch die Ovale mit dem Knoten wegfällt, so bleibt der Pol C doch ein doppelter, zu der Curve gehöriger (conjugirter) Punct. Denn die Gleichung für die Conchoide wird für $x = o$ folgende, $y^4 + 2by^3 + (b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = o$. Diese hat die Wurzeln, $+a$; $-a$; $-b$; $-b$. Also ist A C eine zu der Abscisse $x = o$ gehörige Ordinate, eben so gut, wie A B und A D.

Wenn $a = b$ genommen wird, so fällt die Ovale in einen Punct in eine Spitze, zusammen, die ein dreyfacher Punct ist. Denn die Gleichung ist nun für $x = o$ folgende, $y^4 + 2ay^3 - 2a^3y - a^4 = o$. Diese hat eine positive Wurzel, $+a$, und drey negative, jede $= -a$. Sie ist ein Product aus $y - a$ in $(y + a)^3$.

Aus der zuerst gefundenen Form der Gleichung für die Conchoide folgt $x = \pm \frac{(b + y)\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$. Die Construction der Curve zeigt, daß die gerade B D sie in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, daher zu einer Ordinate, positiven oder negativen, zwey gleiche entgegengesetzte x gehören. Für positive y erfordert ein positives x das Vorzeichen +; für negative y in Fig. 78. und an dem Bogen C N in Fig. 79. das untere Vorzeichen; an der Ovale aber das obere, weil an dieser die Ordinaten größer als b sind.

Die Zeichnung giebt zu erkennen, daß die Conchoide Fig. 78.) in B und D, so wie die obere, in Fig. 79. bey

B gegen die Abscissenlinie concav ist. Da aber diese Linie sich einer Hyperbel nähert, je weiter sie fortgesetzt wird, so muß sie gegen die Abscissenlinie convex werden. Es ist die Frage, wo der Übergang vom Concaven zum Convexen geschieht. In dem Artikel, Concav und Convex, (II.) ist gezeigt, daß eine Curve gegen die Abscissenlinie convex oder concav ist, nachdem der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit der Ordinate gleichnamig oder ungleichnamig ist, daher, wo dieser $= 0$ wird, und seine Beziehung auf die Ordinaten wechselt, der Übergang von dem einen zu dem andern geschieht, (eb. das. 16.).

Aus der Gleichung $x = \frac{(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}$

oder $x = (\frac{b}{y} + 1)\sqrt{(a^2-y^2)}$ folgt $\frac{dx}{dy}$

$= -\frac{a^2b+y^3}{y^2\sqrt{(a^2-y^2)}}$, oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2\sqrt{(a^2-y^2)}}{a^2b+y^3}$

Die Differentiation dieses Quotienten sich zu erleichtern, setze man $y^2\sqrt{(a^2-y^2)} = t$, und $a^2b+y^3 = u$,

so ist $\frac{d^2y}{dx} = -\frac{udt-tdu}{u^2}$, und $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$\frac{t}{u^2}\cdot\frac{dt}{dy} - \frac{t^2}{u^3}\cdot\frac{du}{dy}$; oder $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t}{u^2}(\frac{dt}{dy} - \frac{t}{u}\cdot\frac{du}{dy})$

Nun ist $\frac{dt}{dy} = \frac{2a^2y-3y^3}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, und $\frac{du}{dy} = 3y^2$.

also $\frac{dt}{dy} - \frac{t}{u}\cdot\frac{du}{dy} = \frac{2a^2y-3y^3}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$

$-\frac{3y^4\sqrt{(a^2-y^2)}}{a^2b+y^3} = \frac{a^2y(2a^2b-3by^2-y^3)}{(a^2b+y^3)\sqrt{(a^2-y^2)}}$

und $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2y^3(2a^2b - 3by^2 - y^3)}{(a^2b + y^3)^3}$.

In B, wo $y = + a$ ist, ist dieser Quotient $= - \frac{a}{(a+b)^2}$; in D, wo $y = - a$, ist derselbe $= + \frac{a}{(b-a)^2}$ oder $= + \frac{a}{(a-b)^2}$ In beiden Puncten ist daher die krumme Linie concav gegen die Basis. In dem Knoten, wo $y = - b$, ist jener Quotient $= - \frac{2a^2b}{(a^2-b^2)^2}$, daher die krumme Linie hier convex ist.

Es sey $y^3 + 3by^2 - 2a^2b = 0$, so sind die Wurzeln dieser Gleichung die Ordinaten in den Wendungspuncten. Denn die Werthe dieser Gleichung werden sich entgegengesetzt, wenn y größer und kleiner als eine der Wurzeln genommen wird. Die Gleichung kann drey mögliche Wurzeln, oder nur eine haben. Wenn sie drey mögliche Wurzeln hat, so sind darum nicht drey Wendungspuncte auf derselben Seite von der Axe CAB vorhanden. Denn die Wurzeln der Gleichung können keine Ordinaten an der Conchoide seyn, wenn sie nicht kleiner als a sind. Nun ist das Product der drey Wurzeln $= 2a^2b$, also größer als $2a^3$, und auch als a^3, wenn b größer als a ist, wie in Fig. 78. In diesem Falle ist also eine Wurzel der Gleichung größer als a. Ist $b < a$, wie in Fig. 79, so müßte $2a^2b$ kleiner als a^3, also $2b < a$ seyn, wenn jede der drey Wurzeln kleiner als a ist. Wir wollen sehen, ob bey dieser Bedingung drey mögliche Wurzeln vorhanden sind.

Man setze $y = z - b$, das ist, man lege die Abscissenlinie durch C parallel mit der anfänglichen, so verwandelt sich die für y gefundene Gleichung in diese, $z^3 - 3b^2z + 2b(b^2 - a^2) = 0$ Wenn diese Glei-

chung drey mögliche Wurzeln hat, so ist $4(3b^2)^3$ größer oder so groß als $27(2b(b^2 - a^2))^2$, (Gleichung III. 13.), das ist, b^4 größer oder so groß als $(b^2 - a^2)^2$, oder als $b^4 - 2a^2b^2 + a^4$. Daher ist $2a^2b^2 >$ oder $= a^4$, das ist $2b^2 >$ oder $= a^2$. In dem Falle, da $b > a$ ist, hat demnach die Gleichung immer drey mögliche Wurzeln, aber nur zwey derselben sind, wie schon bemerkt ist, Ordinaten an der Conchoide. Sie muß drey mögliche Wurzeln haben, weil zwey Wendungspuncte auf jeder Seite von CB vorhanden sind, also zwey Wurzeln möglich sind, welches die dritte auch möglich macht. In dem Falle, $b < a$, muß, wenn jede der drey Wurzeln kleiner als a seyn soll, $2b < a$ seyn, also $2ab < a^2$. Da aber bey drey möglichen Wurzeln $2b^2 >$ oder $= a^2$, also noch mehr $2ab >$ oder $= a^2$ ist, so widerspricht die eine Bedingung der andern.

Man setze $y = z - a$, oder lege die Abscissenlinie durch D parallel mit der anfänglichen. Die Gleichung y verwandelt sich in diese,

$$z^3 - 3(a - b)z^2 + 3a(a - 2b)z - a^2(a - b) = 0.$$

Ist b größer als a, so sind alle drey Wurzeln möglich, und wegen der Succession der Vorzeichen $+ + - +$ in diesem Falle sind zwey Wurzeln positiv, und eine ist negativ, (Gleichung, III. 9.). Die letztere ist keine Ordinate. In dem Falle, $b < a$, giebt die allgemeine Bedingung für drey mögliche Wurzeln, $2b^2 >$ oder $= a^2$, daß $2ab > a^2$ oder $2b > a$ sey. Die Succession der Vorzeichen in der Gleichung ist $+ - - -$; daher hat die Gleichung nur eine positive Wurzel als Ordinate an dem einzigen Wendungspuncte auf einer Seite von DB. Die beiden negativen Wurzeln sind keine Ordinaten.

Der Grund, daß die zwey Wendungspuncte durch eine Gleichung vom dritten Grade angezeigt werden, liegt darin, daß sowohl zwey Wendungspuncte als einer an derselben Seite von CB möglich sind, daher konnten die zu-

gehörigen Ordinaten nicht durch eine quadratische Gleichung gefunden werden, da diese entweder zwey oder gar keinen Wendungspunct geben würde. Cramer in der Anal. des lignes courbes p. 516. sagt aus Übereilung, daß die drey Wurzeln der Gleichung $y^3 + 3by^2 - 2a^2 b = 0$ die Ordinaten zu den Wendungspuncten geben.

Wenn $a^2 b + y^3 = 0$, oder wenn $y = -\sqrt[3]{a^2 b}$ ist so ist der Quotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ unendlich groß. Dieses findet nur Statt, wenn b kleiner als a ist, weil y nicht größer als a seyn kann. Für eben diesen Werth von y ist der Quotient $\frac{dx}{dy} = 0$, das ist, die Tangente des Winkels der berührenden oder der Curve mit der Ordinate ist Null, oder dieser Winkel ist Null. Das geschieht (Fig. 79.) in H und G, wo die Ordinate zugleich berührende ist. In diesen Puncten schließt sich der convexe Bogen an den concaven, wie in den Falle, da $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ ist, aber beide liegen an derselben Seite der berührenden. Daher sind H und G nicht als Wendungspuncte zu betrachten. Beide Bogen gehören nicht zu derselben Folge der Ordinaten, sondern zu zwey verschiedenen.

Aufgabe. Die obere Conchoide drehe sich um die Asymptote als Axe, es wird der Inhalt des runden Körpers gesucht, der zwischen dem von AB und PM beschriebenen Kreisflächen liegt.

Der Inhalt sey $= Z$, so ist $dZ = \pi y^2 dx$; (s. Cubirung). Da $dx = -\frac{(a^2 b + y^3) dy}{y^2 \sqrt{(a^2 - y^2)}}$ ist,

so ist $dZ = -\frac{\pi (a^2 b + y^3) dy)}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$.

Es ist $\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y)^2}} = \text{Ang. sin}\,\frac{y}{a}$, und $\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ $= -\frac{1}{3}(2a^2 + y^2)\sqrt{(a^2 - y^2)}$. (Integralformel, 28. 40.)

also

$$Z = \text{Const.} - \pi a^2 b\, \text{Ang sin}\,\frac{y}{a} + \tfrac{1}{3}\pi(2a^2 + y^2)\sqrt{(a^2 - y^2)}$$

Da $Z = 0$ für $y = a$, so ist $\text{Const} = \frac{1}{2}\pi^2 a^2 b$, und

$$Z = \pi a^2 b\left(\tfrac{1}{2}\pi - \text{Ang. sin}\,\frac{y}{a}\right) + \tfrac{1}{3}\pi(2a^2 + y^2)\sqrt{(a^2 - y^2)}$$

oder

$$Z = \pi a^2 b\, \text{Ang. cos}\,\frac{y}{a} + \frac{\pi(2a^2 + y^2)xy}{3(b + y)}.$$

Der Inhalt des ganzen ins Unendliche ausgestreckten conchoidischen Körpers, auf der einen Seite der von AB beschriebenen Kreisfläche, ist $= \pi a^2 (\frac{1}{2}\pi b + \frac{2}{3} a)$.

Müllers Verfahren, den Inhalt eines conchoidischen Fasses zu finden, ist sehr unbequem und zugleich fehlerhaft. Er weiß die Integration nicht zu bewerkstelligen, und nimmt deswegen Guldins Regel vom Schwerpuncte zu Hülfe. Er erlaubt sich $b = a$ zu setzen, da doch b durch die beiden Durchmesser und die Länge des Fasses bestimmt ist. Oberreits Methode der Integration im Leipz. Magaz. 1787 ist auch unbequem, da er sich ganz unnöthiger Weise der Reihen bedient, wodurch seine Rechnung fast vier Seiten anfüllt, ohne ein vollständiges Resultat zu geben.

Exempel. Von einem conchoidischen Fasse sey der Halbmesser des Bauches, $a = 15$ Zoll, des Bodens $= y = 13$ Zoll. Die halbe Länge des Fasses, $x = 21,875$ Zoll. Da $b + y = \frac{xy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ so ist $b + y = 38,001$, und $b = 25,001$. Ferner

ist Ang. $\cos\frac{y}{a} = 29^\circ\ 5'\ 5\frac{1}{2}$ in Graden, daraus in Theilen das Halbmessers als der Einheit $= 0,522229$. Auch ist $\log \pi = 0,4971499$. Also ist . . . .

πa^2 Ang. $\cos\frac{y}{a} = 9230$, und . . . .

$\frac{1}{3}\pi(2a^2 + y^2)\sqrt{(a^2 - y^2)} = 4851$, so daß $Z = 14081$ Cubikzoll, und der Inhalt des ganzen Fasses $= 28162$ Czoll. Müller findet nach seiner Rechnung 26874 Czoll. mit einem hier sehr unbrauchbaren Decimalbruche von 8 Ziffern. Diese sind nach der Berechnung des Leipziger Übersetzers $= 511$ Leipziger Kannen, eine Kanne zu 52, 318 . . Cubz. Rheinl. gerechnet. Der mit Wasser gemessene Inhalt des Gefäßes betrug 504 Kannen, das ist 25368 Cubz. Die conchoidische Figur, richtig angewandt, giebt also beträchtlich zu viel, wenn gleich Müllers fehlerhafte Rechnung nur 7 Kannen zu viel giebt. Oberreit findet für den Inhalt dieses Gefäßes 539 Kannen. Nach meiner Rechnung sind es 538, 3 Kannen.

Man schiebe auf der geraden Linie AX (Fig. 80.) die große Axe EF einer Ellipse EGFH fort, und ziehe in irgend einer Lage derselben aus dem unveränderten Puncte C durch den Mittelpunct der Ellipse K die gerade CKP, welche die Ellipse in P und N schneidet, so sind P und N Puncte einer elliptischen Conchoide. Sie wird, wie man sieht, eben so durch die Ellipse erzeugt, wie die alte Nikomedische Conchoide durch einen Kreis. Wenn CA senkrecht auf AX ist, und $AB = AD =$ der halben kleinen Axe der Ellipse genommen werden, so sind B und D Puncte dieser Conchoide, die man ihre Scheitelpuncte nennen mag. Die Linie BD theilt so wohl die obere als untere Conchoide in zwey gleiche und ähnliche Hälften.

Die Axe einer Parabel werde auf einer Linie AX fortgeschoben, und in irgend einer Lage derselben werde aus

einem bestimmten Puncte C durch einen gegebenen Punct der Axe eine gerade Linie gezogen, so sind deren Durchschnitte mit der Parabel Puncte einer parabolischen Conchoide,

Auf ähnliche Art entsteht eine hyperbolische Conchoide. Man sehe von diesen conchoidischen Gattungen, Rabuel Commentarie sur la Géométaire de Descartes, p. 123.

Anstatt der geraden Linie XAX kann man zur Basis jede krumme Linie nehmen, und die auf ähnliche Art, wie für eine geradlinichte Basis, beschriebene Linie ist ebenfalls eine höhere Gattung von Conchoide. Zur Übung in der analytischen Geometrie diene eine Conchoide mit einer circularen Basis.

Es ist über dem Durchmesser CA (Fig. 81.) ein Kreis beschrieben, der als Basis dient; der Pol ist in C, auf dem einen Endpuncte des Durchmessers CA; die gegebene Linie zur Beschreibung der Conchoide sey AB = AD. Man ziehe irgend eine Chorde des Kreises CP, und nehme auf derselben und ihrer Verlängerung sowohl PN als PM = AB, so ist M ein Punct auf der äußern Conchoide, und N ein Punct auf der innern. Man kann hier den Bogen AP als Abscissenlinie, und PM, PN als constante Ordinaten an der Conchoide betrachten.

Es sey CA = a; AB = AD = b; CM = y; der Winkel BCM = φ. Man nehme noch die Chorde CE = Ce = b, und setze CAE oder CAe = α, so ist $a \sin \alpha = b$. Da $CP = a \cos \varphi$, so ist $y = a \cos \varphi + b$. Aus dieser Gleichung läßt sich der ganze Zug der in einander verschlungenen äußern und innern Conchoide herleiten. Für die Werthe des Winkels φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ (oder 90 Gr.) gehört der Bogen BMG von B bis in G auf der CF, die senkrecht auf AC ist. Es ist CG = b. Der Bogen CG wird beschrieben, wenn die sich um C drehende Ordinatenlinie zwischen CF und CH,

der Verlängerung von EC fällt, wie CQ. Es sey BCQ $= \frac{1}{2}\pi + \omega$. so ist cos φ = cos BCQ $= -\sin\omega$, und $y = b - a\sin\omega$. Man verlängere CQ rückwärts bis an den Kreis in q, so ist ACq $= \pi - (\frac{1}{2}\pi + \omega) = \frac{1}{2}\pi - \omega$, und Cq $= a\cos(\frac{1}{2}\pi - \omega) = a\sin\omega$. Nimmt man qO $= b$, so ist CO $= b - a\sin\omega$, also O ein Punct der Curve. Wenn bey fortgesetzter Drehung CQ auf CH fällt, so ist $\omega = \alpha$, also, da EC $= a\sin\alpha$ ist, $y = b - a\sin\alpha = 0$. Nun ist die halbe äußere Conchoide vollendet, und der beschreibende Punct geht in die innere Conchoide über. Die Ordinatenlinie sey in CR, und FCR $= \omega$, kleiner als ein Rechter. Es ist nun $y = b - a\sin\omega$, eine negative Größe. Man verlängere CR rückwärts bis an den Kreis in p, und nehme pn $= b$, so ist Cp $= a\sin\omega$, und Cn $= a\sin\omega - b$. Zugleich ist Cn $= y$, sowohl was die Quantität, als was die Lage betrifft. Die Negation von y zeigt an, daß die Richtung der Ordinate und der sich drehenden Linie CR einander entgegengesetzt sind. Wenn die letztere in CI, die auf CF senkrechte fällt, so ist $\omega = \frac{1}{2}\pi$, und $y = b - a, = -(a - b)$. Nun ist CD $= a - b$, also als Ordinate ist CD $= y$. Wenn ω zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi - \alpha$ fällt, wie der W. FCr, so entsteht dieselbe Folge der Ordinaten von A nach P bis c hin, wie auf der andern Seite von A nach p bis E. Ist FCh $= \pi - \alpha$, so ist $\varphi = \frac{2}{3}\pi - \alpha$, also cos $\varphi = -\cos(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = -\sin\alpha$, und $y = b - a\sin\alpha$, das ist $y = 0$. Nun ist die innere Conchoide vollendet. Wenn ω größer als $\pi - \alpha$ ist, so ist $\sin\omega$ kleiner als $\sin\alpha$, und $y = b + a\cos\varphi = b + a\cos(\frac{1}{2}\pi + \omega) = b - a\sin\omega$ ist positiv. Nun fällt die Ordinate wieder in die Richtung der sich drehenden Linie, und beschreibt den Bogen Cg bis an g auf der Cf, die senkrecht auf CA ist. Ist ω größer als zwey Rechte, so wird $\sin\omega$ negativ, also $-a\sin\omega$ positiv, oder $a\cos\varphi$ ist positiv, da φ über drey Rechte beträgt. Es wird nun, bis daß φ = vier Rechten ist, der Bogen gmB der äußern Conchoide be-

schireben, an welchem die Ordinaten, wie C m positiv sind.

Die Quadratur dieser Conchoide ist leicht. Es sey der Sector BCM = Z, so ist $dZ = \frac{1}{2} yy d\varphi$ (s. Quadratur.), das ist

$$dZ = (\tfrac{1}{2} b^2 + ab \cos\varphi + \tfrac{1}{2} a^2 \cos\varphi^2) d\varphi$$
$$= (\tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{4} a^2 \cos 2\varphi + ab \cos\varphi) d\varphi.$$

Daraus ist

$$Z = (\tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2)\varphi + \tfrac{1}{8} a^2 \sin 2\varphi + ab \sin\varphi,$$

ohne eine Constans. Wenn die Ordinatenlinie aus der Lage CB in die CI gekommen ist, so hat die Ordinate selbst die halbe äußere Conchoide BMGC, und die halbe innere CnD beschrieben. Die beiden Flächenräume BMGCB und CnDC zusammen sind $= (\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2)\pi$, das ist der Fläche des Kreises CE A e C und des Doppelten des über dem Durchmesser b beschriebenen Kreises.

Den Flächenraum der äußern halben Conchoide zu erhalten, setze man $\varphi = \frac{1}{2}\pi + \alpha$, wodurch $y = 0$ wird, weil $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ ist. Diese Area ist $= (\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2)(\frac{1}{2}\pi + \alpha) - \frac{1}{8} a^2 \sin 2\alpha + ab \cos\alpha$. Die Area der innern halben Conchoide DCND zu finden betrachte man ihre Ordinaten nur absolut für sich, so ist $y = a \cos.\varphi - b$, und für $y = 0$ ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \alpha$. Setzt man nun in der Formel für ein unbestimmtes Z, $-b$ für b, und $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ für φ, so ist diese Area $= (\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2)(\frac{1}{2}\pi - \alpha) + \frac{1}{8} a^2 \sin 2\alpha - ab \cos\alpha$. Die Summe der beiden Arearum ist die vorher gefundene.

Roberval hat sich schon mit dieser Conchoide auf einer circularen Basis beschäftigt. Er nennt sie le Limaçon de Pascal. Er hat die Summe je zweyer Sectoren wie BCM und DCN gefunden, und daher die Summe der Räume BMCB, DNCD.

De la Hire hat eine weitläufige Abhandlung über die Conchoide auf irgend einer Basis geliefert, in den Mem. de l' Acad. des Sc. 1708, worinn er sie nach allen Prädicamenten untersucht. Er mußte noch die Gründe seiner Methode beyfügen.

Wenn die gegebene Linie dem Durchmesser a gleich genommen wird, so ist die Linie die in einem vorhergehenden Artikel schon betrachtete Cardioide. Die innere Conchoide fällt hier weg. Diese Linie ist geometrisch rectificabel. Denn es sey der Bogen vom Scheitel an $= s$, so ist $ds^2 = y^2 d\varphi^2 + dy^2$. Es ist $y = a\,(1 + \cos\varphi)$, also $dy = -a \sin\varphi\, d\varphi$. Daher $ds^2 = 2a^2 (1 + \cos\varphi) d\varphi^2 = 4a^2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi^2 . d\varphi^2$, und $ds = 2a \cos \tfrac{1}{2}\varphi . d\varphi$, daher $s = 4a \sin \tfrac{1}{2}\varphi$, ohne eine Constans. Die Länge der einen Hälfte von dem Scheitel (B in Fig. 81.) bis zu dem Pol ist $= 4a$, da der Winkel φ für diesen Bogen $= \pi$ oder zwey Rechten gleich ist. De la Hire meint, daß sie nur aus dieser Hälfte allein bestehe.

Concrete Zahl ist einerley mit einer benannten Zahl wie 4 Thaler.

Congruenz, Deckung, ist die völlige Übereinstimmung zweyer Figuren, so daß ihre Gränzen, wenn sie gehörig auf einander gelegt werden, zusammen fallen. Dieses Aufeinanderlegen (applicatio) ist eine intellectuelle Vergleichung nach Art des Aufeinanderlegens zweyer materiellen Figuren, wodurch man prüft, ob sie gleich oder ungleich sind. S. Euklides I. 4. 8.

Conische Linie, s. Kegelschnitte.

Conjugirt, verbunden, heißen in der Geometrie der krummen Linien, gewisse zusammen gehörige gerade oder krumme Linien.

I. Conjugirte Durchmesser in der Ellipse und Hyperbel sind diejenigen beiden, deren jeder parallel ist mit den Chorden, die der andere halbirt. Die Durchmesser in diesen Linien gehen alle durch ihren Mittelpunct.

Conjugirte Axe ist in der Ellipse die kleine Axe, welche der kleinste aller Durchmesser ist. Sie ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der großen Axe (der Querare, axis transversus) und dem Parameter. In der Hyperbel heißt die mittlere Proportionale zwischen der Querare (zwischen den Scheitelpuncten der Hyperbel) und dem Parameter auch die conjugirte Axe. Sie kann größer seyn als jene. Als Ordinate betrachtet hat sie keinen möglichen Werth, weil sie die Hyperbel nicht schneidet, wenn sie senkrecht auf die Querare oder Hauptaxe durch den Mittelpunct gesetzt wird.

II. Conjugirte Ovale ist ein ganz abgesonderter Theil einer krummen Linie, welchen eine in sich zurückkehrende krumme Linie bildet. Dergleichen kommt nur bey krummen Linien des zweyten und höherer Grade vor. Die conjugirten Ovalen gehören, ihrer Absonderung ungeachtet, zu der krummen Linie, weil ihre Ordinaten mit den Ordinaten der übrigen Zweige durch eine gemeinschaftliche Gleichung bestimmt werden. Bey den höhern krummen Linien sind für eine Abscisse mehr als zwey Ordinaten möglich. Sind zwey stetige Folgen von Ordinaten zwischen denselben Endordinaten enthalten, so bilden diese beiden Folgen eine abgesonderte Ovale. Nämlich es sey für $x = p$ die gemeinschaftliche Ordinate zweyer stetigen Folgen $= P$, für $x = q$ seyn die Ordinaten verschieden, aber für $x = r$ seyn sie wieder gleich, und $= R$, so entsteht eine Ovale, wofern die Ordinaten in beiden Folgen sich auf entgegengesetzte Art verändern. Die Ovale mag auch einen Zweig der krummen Linie berühren, wenn aus einer andern Folge eine einzige Ordinate mit einer jener beiden Folgen übereinkommt. In dem Artikel, Linien der dritten Ordnung, kommen Beyspiele von Ovalen vor. Man sehe auch die Abbildungen bey Newtons Enumeratio linearum tertii ordinis.

III. Conjugirter Punct ist ein abgesonderter zu einer krummen Linie gehöriger Punct. Wenn in den beiden Folgen von Ordinaten, welche eine Ovale bilden, durch die Verän-

derung ihrer Relation gegen die Abscissen, die äußersten sich immer näher kommen, so zieht sich die Ovale immer mehr zusammen, und wird ein Punct, wenn die beiden äußersten Ordinaten zusammen fallen. Die Ordinate an einem conjugirten Puncte ist ein möglicher Werth der Ordinate y für eine Abscisse x, ohne daß sich eine stetige Folge von mehreren Ordinaten für größere oder kleinere x daran anschließt.

IV. Conjugirte Hyperbeln sind zwey verbundene Hyperbeln, deren jede zwischen den Asymptoten der andern beschrieben ist, und die einerley conjugirte Axen, aber in umgekehrter Ordnung haben, so daß die Hauptaxe der einen (die durch die Scheitelpuncte der beiden entgegengesetzten Hyperbeln gehende) die conjugirte der andern ist. Es sey a die halbe Hauptaxe der einen, b die halbe conjugirte, x die Abscisse von dem Mittelpuncte aus auf der Hauptaxe genommen, y die Ordinate, so ist für diese die Gleichung, $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$. Für die andere ist b die halbe Hauptaxe, und a die halbe conjugirte. Die Abscisse auf jener sey t, die Ordinate u, so ist ihre Gleichung $b^2 u^2 = a^2 t^2 - b^2 a^2$. Setzt man in der letztern x anstatt u, und y statt t, so erhält man die Gleichung $b^2 x^2 = a^2 y^2 - a^2 b^2$, oder $a^2 y^2 = b^2 x^2 + a^2 b^2$, in welcher die zweyte Hyperbel einerley Abscissenlinie mit der ersten hat. Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so erhält man zwar eine einzelne Gleichung, $a^4 y^4 = b^4 x^4 - a^4 b^4$, in welcher die Werthe von y als Ordinaten theils zu der einen, theils zu der andern Hyperbel gehören. Beide machen aber doch nicht eine einzige krumme Linie aus, eben deswegen, weil die Gleichung sich in zwey rationale zerlegen läßt.

Cono-Cuneus, ein Körper, dessen Grundfläche ein Viertelkreis ist, und der zwey ebene Seitenflächen hat, eine ein Rechteck, die andere ein Dreyeck, und nebst diesen noch eine gekrümmte Seitenfläche, wie es aus der Zeichnung (Fig. 82. Tab. V.) bestimmter erhellen wird. Es ist ACB der Quadrant eines Kreises. Auf

die Ebene desselben ist das Rechteck ACED senkrecht gestellt, dessen Grundlinie der Halbmesser AC, die Höhe willkührlich ist. Zieht man BE, so ist das Dreyeck BCE die zweyte ebene Seitenfläche. Man ziehe irgend eine MP in dem Quadranten parallel mit CB, und PN parallel mit CE bis an N auf DE, dann MN, so ist die Linie MN in der krummen Seitenfläche.

Der Körper unterscheidet sich von einem senkrechten Viertelkegel dadurch, daß die geraden Linien auf der krummen Seitenfläche, wie MN nicht nach einem und demselben Puncte E, sondern jede nach einem andern Puncte N der Linie DE laufen; von einem Keile dadurch, daß die Grundfläche nicht ein Rechteck, wie bey jenen, sondern ein Viertelkreis ist. Von der cylindrischen Fläche ist die krumme Seitenfläche dadurch verschieden, daß die geraden Linien an derselben sich an einer geraden Linie endigen, und daß sie gegen die Grundfläche verschiedentlich geneigt sind. Der Winkel, welchen MN mit der Grundfläche macht, ist der Winkel NMP, dessen Tangente $= \frac{NP}{MP}$ ist. Es ist zu bemerken, daß die Ebene des bey P rechtwinklichten Dreyecks NPM auf die Grundfläche senkrecht steht, weil MP mit BC, und NP mit EC parallel ist, also die Ebene NPM mit der Ebene ECB parallel ist, die senkrecht auf ACB steht.

Wallis hat diesen Körper erdacht, und eine lange Abhandlung darüber geschrieben, die in seinen Werken, vol. II. p. 683 — 699 befindlich ist. Er betrachtet darin die Figur der Schnitte dieses Körpers. Es scheint nicht, daß man weitern Gebrauch davon machen könne.

Consequens terminus rationis, das zweyte Glied, oder das Hinterglied eines Verhältnisses.

Construction ist in der Geometrie die Anwendung der Hülfsgrößen, um den Erweis eines Lehrsatzes zu

führen, oder die Auflösung einer Aufgabe zu erhalten, als die Ziehung bestimmter oder unbestimmter gerader Linien, Verlängerung der gegebenen, Beschreibung einer krummen Linie, Legung einer Ebene in Beziehung auf eine andere Ebene, oder auf eine gerade Linie, Schneidung eines Körpers durch eine Ebene, Bewegung einer Linie, eines gegebenen Winkels, einer Figur, und was sonst von dergleichen Mittel angewandt werden mag. Wenn Größen verglichen werden sollen, so ist es gewöhnlich nöthig, Mittelgrößen einzuführen, z. B. bey dem pythagoräischen Lehrsatz. Bey Auflösung der Aufgaben müssen mit den gegebenen Größen andere verbunden werden, die zu den gesuchten führen. Man sehe den Artikel: Analysis als Methode, oder auch nur die Anfangslehren der Geometrie.

Eine geometrische Construction im engern Sinne genommen wendet nur die gerade Linie, den Kreis und die Kegelschnitte nebst der Ebene an. Im weitern Umfange dürfen ihr auch andere krumme Linien zugestanden werden, so fern diese durch eine Bewegung einer Linie oder Figur stetig beschrieben werden können, wie z. B. bey der Verdoppelung des Würfels oder der Dreytheilung eines Winkels. Dergleichen Linien sind die Cissoide und die Conchoide. Man nennt solche Constructionen auch mechanische. Man kann sie aber mit Recht noch als geometrisch ansehen, wenn jeder Punct der beschriebenen krummen Linie durch eine eigentliche geometrische Construction angegeben werden kann. Das ist nicht der Fall bey der Quadratrix des Dinostratus, bey welcher man die Lage des sich drehenden Halbmessers für jede Stelle des sich bewegenden Punctes auf dem fixen Halbmesser nicht angeben kann.

Eine instrumentale Construction, die gewöhnlich eine mechanische genannt wird, dient zu wirklichen Darstellungen materieller Größen, z. B. bey Abzeichnungen von Feldern, Gegenden, Gebäuden, Maschinen.

Dee Construction algebraischer Gleichungen ist die Darstellung ihrer Wurzeln durch die zu den Durchschnitten zweyer Linien gehörigen Ordinaten für eine

gemeinschaftliche Abscissenlinie, oder durch die dazu gehörigen Abscissen. Diese geschieht entweder zur leichtern Erfindung der Wurzeln, oder um der Methode selbst willen, oder um die Relation und Succession der Wurzeln deutlicher zu machen. S. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.

Die **Construction analytischer Gleichungen**, das ist, der Gleichungen zwischen zwey oder drey veränderlichen Größen, ist die geometrische Darstellung der zusammen gehörigen Größen unter ihnen durch die Coordinaten an einer krummen Linie oder an zweyen, oder an einer Fläche. Jede Relation zwischen zwey veränderlichen x und y kann durch die Coordinaten einer krummen Linie in einer Ebene gleichsam abgebildet, und oft sehr anschaulich gemacht werden. Eine Relation zwischen drey veränderlichen x, y, z kann durch die Coordinaten zweyer krummen Linien in einer Ebene vorgestellt werden, wenn an diesen für eine gemeinschaftliche Abscisse x die Ordinaten der einen wie y, der andern, wie z sich gegen x verhalten. Dieses aber in dem Falle, wenn zwey Gleichungen zwischen diesen verbundenen Größen gegeben sind, so daß für eine derselben, wie x, sowohl y als z gefunden werden kann. Ist die Gleichung zwischen x, y, z nur eine einzige, so ist es eine krumme Fläche, welche durch ihre Coordinaten die Relation darstellt. Die Construction analytischer Gleichungen hat ihren Werth, wenn sie durch die Verhältnisse der Linien und Winkel, durch die Bewegung eines Punctes oder einer Linie nach einem gewissen Gesetze die Entstehung der Gleichung angiebt, und die Relation der veränderlichen Größen für alle Werthe derselben sinnlich macht. Wenn sich dieses aber auch so nicht zeigen läßt, so ist es doch sehr oft nützlich, die Coordinaten nach einem Maaßstabe unter dem angenommenen Winkel derselben zu zeichnen, da gewöhnlich aus einem Theile einer krummen Linie oder wenigen Puncten derselben ihr ganzer Lauf zu erkennen ist, wodurch denn auch die mannichfaltigen Verhältnisse der veränderlichen Größen in der abgebildeten Glei-

chung, besonders die verschiedenen Folgen der einen in Beziehung auf die andern, anschaulich gemacht werden.

Die Construction der Differentialgleichungen ist eine Integration durch Hülfe krummer Linien. Es sey $dz = X dx$, wo X eine Function von x ist. Man construire eine krumme Linie, deren Coordinaten x und X sind, wobey man irgend eine Linie zur Einheit für die Längen, ihr Quadrat zur Einheit für die Flächen annimmt. Dann ist z der Flächenraum zwischen den Coordinaten x und X und dem zugehörigen Bogen der Curve, mit Beyfügung der Constans, wo diese erforderlich ist.

Allgemeiner sey $X dx = Y dy$, wo X eine Function von x, und Y von y ist. Man setze zwey gerade Linien unter einem rechten oder andern Winkel zusammen, nehme von dem Durchschnitte an, auf der einen die Abscissen x, auf der andern die Abscissen y, und construire zwey krumme Linien, eine mit den Ordinaten X zu den Abscissen x, die andere mit den Ordinaten Y zu den Abscissen y. Nimmt man an beiden Curven zwey gleiche Flächenräume, so sind die Abscissen zu denselben zwey zusammengehörige x und y in der Gleichung $V dx = Y dy$, weil wegen der gleichen Flächenräume auch ihre Differentiale gleich sind. Vollendet man das Parallelogramm von den Abscissen x und y der Curven, so giebt der Durchschnitt der mit ihnen parallelen Seiten einen Punct der Curve, deren Coordinaten x und y sind. Durch diese wird nun die Differentialgleichung aufgelöset oder construirt. Exempel findet man in Jo. Bernoulli Lect. Hospit. X.

Die Construction der Curve setzt voraus, daß man die beiden Curven, deren Ordinaten X und Y sind, quadriren, und für jeden Flächenraum der einen die Abscisse zu einem eben so großen Flächenraum an der andern angeben könne. Kann man dieses bewerkstelligen, so kann man auch die Gleichung zwischen x und y analytisch finden, und braucht der Curve mit den Coordinaten x und y nicht, es müßte denn sich eine merkwürdige Art ihrer Entstehung aus den beiden andern dadurch ergeben. Lassen sich diese nicht quadriren, so wird die Curve für x und y nur construirt,

concessis quadraturis, welches bloß zeigt, was man müßte angeben können, um aus der Differentialgleichung die endliche Gleichung zwischen x und y zu finden. Dieses Verfahren wird jetzt nicht gebraucht.

Joh. Bernoulli zeigte schon 1694 eine allgemeine Methode an, alle Differentialgleichungen vom ersten Grade zu construiren, auch wenn die veränderlichen Größen sich nicht von einander sondern lassen, wie wenn X und Y in der angeführten Gleichung Functionen von x und y zugleich sind und bleiben. Allein es ist dieses nur ein Entwurf, der schwerlich auszuführen seyn möchte. S. Jo. Bernoulli Opp. T. I. nr. 20.

Ehedem pflegte man analytische Beweise und Auflösungen in geometrische Constructionen zu verwandeln, wie in Newtons Principien der Naturwissenschaft durchgehends geschehen ist. Man fügte den analytischen Auflösungen immer die geometrische Construction bey. Die geometrische Methode sah man als die vollkommenere an. Es ist wahr, daß diese oft ungemein viel Scharfsinn erfordert, und vortrefflich zur Übung des mathematischen Fassungsvermögens dient. Sie wird aber doch bey sehr schweren Untersuchungen unzulänglich, und ist auch mehr in der abstracten Speculation, als in der Anwendung brauchbar, wie es bey der Berechnung der gegenseitigen Störungen der Weltkörper der Fall ist. Gegenwärtig hat man die geometrische Methode fast ganz verlassen. In großen Werken, die die Bewegung betreffen, findet man nicht eine einzige Zeichnung.

Einige neue Philosophen haben auch die analytische Zusammensetzung der Größen eine Construction genannt. Man wird aber in der Mathematik sich von den Philosophen keine Neuerungen in den Begriffen machen lassen.

Zur Construction analytischer Zusammensetzungen von Größen muß man die Elemente derselben geometrisch darzustellen wissen.

Wenn die einzelnen Buchstaben Linien bedeuten, so ist ab ein Rechteck von den Seiten a, b; also aa das Quadrat von der Seite a; ferner abc ein rechtwinklichtes

Parallelepipedum, dessen Seiten a, b, c sind, also aaa oder a^3 der Würfel von der Seite a.

Es ist $\frac{bc}{a}$ die vierte Proportionallinie zu den drey Linien a, b, c. Man zeichne einen beliebigen Winkel, trage von dem Scheitel aus auf den einen Schenkel die Linien a, b, auf den andern die Linie c, ziehe durch die Endpuncte von a und c eine Linie, und mit dieser durch den Endpunct von b eine Parallele, so schneidet diese auf dem andern Schenkel die vierte Proportionallinie ab.

Es ist $\frac{bb}{a}$ die dritte Proportionallinie zu a und b. Sie wird auf dieselbe Art wie die vierte zu drey verschiedenen gefunden. Ist b kleiner als a, so wird sie gefunden, wenn man über a als Durchmesser einen Kreis beschreibt, in diesen die Chorde b von dem einen Endpuncte des Durchmessers trägt, und von dem zweyten Endpuncte der Chorde eine senkrechte auf den Durchmesser zieht. Diese schneidet auf dem Durchmesser von jenem Endpuncte an die verlangte Linie ab.

Wenn $aa + bb = cc$ ist, so ist c die Hypotenuse des rechtwinklichten Dreyecks, worin a, b die Katheten sind. Daher wird $c = \sqrt{(aa + bb)}$ gefunden.

Ist $aa - bb = cc$, so wird c durch die Construction eines rechtwinklichten Dreyecks gefunden, worin a die Hypotenuse und b die eine der Katheten ist. Oder man beschreibe über dem Durchmesser a einen Halbkreis, trage von dem einem Endpuncte aus die Linie b an den Umfang, und ziehe durch den andern Endpunct von a an den Punct in dem Umfange, eine gerade Linie, so ist diese die Linie, c. — Oder man beschreibe über dem Durchmesser $a + b$ einen Halbkreis; trage auf denselben von dem einen Endpuncte aus die Linie 2b, errichte durch deren Endpunct eine senkrechte, so ist die Chorde des Bogens zwischen dem zweyten Endpuncte des Durchmessers

und dieser senkrechten = c. — Oder man beschreibe mit dem Halbmesser a einen Halbkreis, trage auf demselben von dem Mittelpuncte aus die Linie b, errichte durch deren Endpunct eine senkrechte bis an den Umfang des Kreises, so ist diese = c.

Es sey $\frac{cde}{ab} = f$, so ist das Verhältniß e : f das zusammengesetzte aus den beiden a : c und b : d, oder das Verhältniß der Rechtecke ab ; cd. Um es durch zwey Linien darzustellen, suche man zuerst die vierte Proportionallinie zu a, c, e, welche E sey; dann die vierte zu b, d; E, so ist diese = f.

Es sey $\frac{defg}{abc} = h$, so ist das Verhältniß g : h das zusammengesetzte aus a : d; b : e; c : f, oder das Verhältniß der rechtwinklichten Parallelepipeden abc : def. Oder man suche die vierte Proportionallinie zu a, d, g, welche sey G; dann die zu b, e, G, welche sey H; endlich die zu c, f, H, so ist diese = h.

Es sey $b^2 = ac$, so wird b auf zweyerley Weise durch bekannte Eigenschaften des Kreises gefunden, s. Kreis.

Es sey $b^3 = a^2 c$, man soll durch Construction finden. Dieses ist die bey den Alten berühmte Aufgabe, zwischen zwey gegebenen Größen a, c die beiden mittlern geometrisch proportionalen zu finden. Denn b ist die auf a zunächst folgende. Die Progression ist $a : b : \frac{bb}{a} : \frac{bbb}{aa}$.

S. Delische Aufgabe.

Contiguum, an einander liegend. Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, heißen anguli contigui.

Continuum das stetige, oder unmittelbar verbundene. 1) Eine Größe heißt eine stetige, ein Continuum, wenn ihre Theile alle so zusammenhängen, daß

wo der eine aufhört, gleich der andre anfängt. 2) Ein stetiger Bruch (fractio continua) ist, dessen Nenner einen Bruch wiederum mit einem Bruche in desselben Nenner u. s. w. enthält, es sey, daß dieses ohne Ende fortgeht, oder aufhört. S. Kettenbruch. 3) Eine proportio continua ist, worin die beiden mittlern Glieder sich gleich sind. 4) Eine progressio continua, worin jedes Glied sowohl das vorhergehende als nachfolgende Glied der gleichen Verhältnisse unter zwey nächsten Gliedern ist.

Contra-Diameter ist eine Axe der Abscissen in einer krummen Linie von einer solchen Gestalt, daß zu gleichen entgegengesetzten Abscissen gleiche und entgegengesetzte Ordinaten gehören. Sie theilt die krumme Linie in gleiche und ähnliche Theile, wie ein Diameter, aber mit dem Unterschiede, daß die ähnlichen Theile entgegengesetzte Lagen haben, da der Theil, der in dem Winkel der positiven Coordinaten liegt, dem in dem Winkel der negativen befindlichen gleich und ähnlich ist. Eine solche Linie ist die, deren Gleichung ist $y^3 + axy^2 + bx^2y + cx^3 + dy + ex = 0$, oder folgende der vierten Ordnung mit der Gleichung, $y^4 + axy^3 + bx^2y^2 + cx^3y + dx^4 + ey^2 + fxy + gxx + h = 0$. Wenn man in diesen Gleichungen $+x$ mit $-x$, und $+y$ mit $-y$ vertauscht, so bleiben in der letztern alle Vorzeichen dieselben, und in der erstern werden sie alle entgegengesetzt, daher sich alle Glieder eben so gegen einander aufheben, wie in jenen Gleichungen. Bragelongne hat die Benennung, Contre-Diamétre, aufgebracht. Mém. de l'Acad. des Sc. 1732. Cramer Anal. des lign. courb. §. 73.

Contra-geometrische Proportion ist die Relation zwischen drey Größen, a, b, c, da $a - b : b - c = c : b$, oder auch diese, da $a - b : b - c = b : a$ ist. In der stetigen geometrischen Proportion $a : b : c$ ist $a - b : b - c = a : b = b : c$.

Contra-harmonische Proportion ist die Relation zwischen drey Größen a, b, c, da $a - b : b - c = c : a$ ist, z. B. 12, 10, 6. In einer harmonischen Proportion A, B, C, ist $A - B : B - C = A : C$, z. B. 12, 8, 6. In jener ist das mittlere Glied $b = \frac{aa + cc}{a + c}$ in dieser ist $B = \frac{2AC}{A + C}$.

Bey den alten Arithmetikern trifft man auch eine von ihnen so genannte contra-arithmetische Proportion an, nämlich, $a - b : a - c = c : b$; auch folgende, die sie arithmetisch-geometrische Proportionen nannten. I. $a - b : a - c = c : a$; II. $b - c : a - c = c : a$; III. $b - c : a - c = c : b$. Diese Benennungen sind veraltet und unnütz, wenn gleich die Relationen vorkommen können.

Convergirend, annähernd. 1) Gerade Linien, die sich in einem Puncte schneiden, sind nach der Gegend dieses Punctes hin convergirend. 2) Eine Reihe ist convergirend, wenn ihre Glieder in ihrer Folge nach einander immerfort kleiner werden. Die Summe der Glieder nähert sich alsdann immer mehr dem Werthe der Größe, welche die Summe der ganzen ins Unendliche fortgesetzten Reihe ist. 3) Eine convergirende Hyperbel ist eine Hyperbel des zweyten Grades, an welcher zwey Schenkel, die sich ihre hohle Seite zukehren, eine gemeinschaftliche Asymptote haben. Dergleichen ist die krumme Linie, deren Gleichung ist, $xyy + ay = b$. S. Newtoni enumer. lin. tertii ordinis, Fig. 68. 69.

Conversio rationis ist, wenn in einem Verhältnisse A : B das Vorderglied mit dem Überschusse desselben über das Hinterglied verglichen wird, oder die Ableitung des Verhältnisses $A : A - B$ aus $A : B$. Lorenz übersetzt es: Das Verhältniß wird zurückkehrend.

Conversio eines Satzes ist etwas logisches, wenn eine Bedingung und Folge vertauscht werden. Z. B. der Satz sey dieser: wenn zwey sich schneidende gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, so ist der äußere Winkel an der Seite, wo sie sich schneiden, größer als der innere entgegengesetzte an derselben Seite. Der umgekehrte, oder die conversa ist, wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß der äußere Winkel größer als der innere entgegengesetzte an derselben Seite jener Linie ist, so schneiden sich die beiden Linien an eben dieser Seite.

Conus, s. Kegel.

Convex, s. Concav.

Coordinaten einer krummen Linie von einfacher Krümmung sind zwey stetige Folgen gerader Linien, von welchen die eine Folge auf einer gegebenen geraden Linie in oder neben der krummen Linie von einem gegebenen Puncte an genommen, und die andere Folge mit jener unter einem unveränderlichen Winkel, rechten oder schiefen, verbunden wird. Die Relation dieser Linien bestimmt die Natur der krummen Linie. Für die Geometrie ist die analytische Darstellung des ganzen Zuges einer krummen Linie sehr wichtig, weil aus den Eigenschaften der Gleichung die Eigenschaften der krummen Linie hergeleitet werden können, und bey der Verbindung zweyer oder mehrerer Linien die Lage derselben gegen einander, ihre Durchschnitts- und Berührungspuncte durch die Verbindung ihrer Gleichungen sich bestimmen lassen.

Wenn die krumme Linie eine gedoppelte Krümmung hat, d. i. wenn sie nicht in derselben Ebene bleibt, desgleichen auch zur Bestimmung der Gestalt einer krummen Fläche, werden drey stetige Folgen von Coordinaten gebraucht. Man stelle sich drey Ebenen vor, die sich jede die andere schneiden. Mit den Durchschnitten je zweyer werden die Linien der drey Folgen parallel gezogen. Der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der drey Durchschnittslinien ist der Anfangspunct, von welchem an die Linien der einen

Folge auf der zugehörigen Durchschnittslinie genommen werden.

Es seyn (Fig. 83. Tab. VI.) AX, AY, AZ, die drey Durchschnittslinien der Ebenen XAY, ZAX, ZAY, und A ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunct. Diese drey Linien heißen die Axen der Coordinaten. Es sey LMN eine krumme Linie von doppelter Krümmung oder eine Linie auf einer krummen Fläche, die kein Durchschnitt derselben mit einer Ebene ist. Durch einem Punct derselben M ziehe man mit der Axe AZ die parallele MQ, welche die Ebene XAY in Q treffe; durch Q ziehe man QP parallel mit der Axe AY bis an die Axe AX in P, so sind MQ, QP, AP die zu M gehörigen Coordinaten. Für jeden Punct der krummen Linie oder Fläche stelle man sich solche drey Coordinaten vor, so machen diese drey stetige Folgen aus. Die Linien der auf AX genommenen Folge nennt man die Abscissen, die Folgen der PQ und QM die zugehörigen Ordinaten. Wenn die Axen senkrecht auf einander stehen, so heißen die Coordinaten orthogonale, normale, rechtwinklichte Coordinaten. Die Relation der drey Coordinaten wird durch eine Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen mit den erforderlichen unveränderlichen ausgedrückt.

Wenn die krumme Linie in derselben Ebene liegt, so sind (Fig, 84. Tab. VI.) nur zwey Axen der Coordinaten AX, AY, nöthig Von jedem Puncte M einer krummen Linie LMN wird eine Linie MP parallel mit der einen Axe AY bis an die andere AX in P gezogen. So sind AP, PM jede eine Linie aus den beiden Folgen der Coordinaten. Zieht man MR parallel mit AX bis an AY in R, so sind AR, RM ebenfalls ein Paar Coordinaten. Die Linie AP heißt die Abscisse, PM die Ordinate; oder auch, es ist AR die Abscisse, und MR die Ordinate.

Es ist oft nöthig, die Lage der Cordinaten zu ändern, entweder um die Gleichung einfacher zu machen, oder um Eigenschaften der krummen Linie zu entdecken. Das Verfahren hierzu ist folgendes.

Es sey für eine einfach krumme Linie (Fig. 85.) AX die Axe der Abscissen, AY die Axe der Ordinaten; AP und PM seyn die Coordinaten für den Punct M. Aus der Gleichung zwischen diesen soll eine Gleichung für die Coordinaten AQ, QM, deren Axen AT, AU sind, gefunden werden. Der Anfang der Abscissen AQ bleibe in A.

Durch einen beliebigen Punct B auf AX ziehe man CB parallel mit AY, welche AT in C, und AU in D schneide. Die Verhältnisse der Seiten in den beiden Dreyecken ABC, ABD sind gegebene. Man ziehe QS parallel mit AX, und QR parallel mit AY. Es ist . .
AC : AB = AQ : AR, und . . . .
AD : AB = QM : QS (= RP), wegen der gleichwinklichten Dreyecke BAD, SQM. Ferner ist . .
AC : CB = AQ : QR (= PS) und . . . . ,
AD : DB = QM : MS. Man setze die Verhältnisse der Linien AC : AB : BC : AD : DB = m : n : p : q : r; ferner AP = x; PM = y; AQ = t; QM = u, so ist

$$AR = \frac{n}{m}t \;;\quad RP = \frac{nu}{q},$$

$$PS = \frac{pt}{m} \;;\quad MS = \frac{ru}{q};$$

$$\text{also}\quad x = \frac{nt}{m} + \frac{nu}{q}, \text{ und } y = \frac{pt}{m} - \frac{ru}{q}.$$

Das Vorzeichen — vor dem zweyten Theil von y entsteht daher, daß BC und BD entgegengesetzte Lage haben.

Die gefundenen Werthe von x und y setzt man in die Gleichung für dieselben, so erhält man eine Gleichung zwischen t und u.

Wenn der Anfangspunct der Abscissen verändert wird, so werden die Coordinaten t, u jede um eine gegebene Linie verändert.

Exempel. Es sey M ein Punct einer Hyperbel, AX liege in der großen Axe, und PM sey eine normale Ordinate, A der Mittelpunct der Hyperbel. Die beiden Axen AT, AU seyn die Asymptoten. In diesem Falle

ist $m = q$; $p = r$, also $x = \frac{n}{m}(t+u)$; . . .

$y = \frac{p}{m}(t-u)$. Man nehme B in dem Scheitel, so

ist AB die halbe Haupt-Axe $= a$; und BC die halbe zugeordnete $= b$, so daß $n = a$; $p = b$; . . . $m = \sqrt{(aa+bb)}$ ist. Die Gleichung der Hyperbel ist $b^2(x^2 - a^2) = a^2 y^2$. Die Substitution giebt

$$b^2 . \frac{nn}{mm}(t+u)^2 - b^2 a^2 = a^2 . \frac{pp}{mm}(t-u)^2,$$

und nach der Division mit $nn = aa$, und $bb = pp$, auch Multiplication mit m^2,

$$(t+u)^2 - m^2 = (t-u)^2.$$

das ist,

$$4tu = m^2 = aa + bb.$$

Da eine krumme Linie mit einfacher Krümmung auch durch die Bewegung einer veränderlichen geraden Linie um einen festen Punct beschrieben werden kann, so sind diese veränderliche Linie, und die zugehörigen Winkel von einer gegebenen Linie an genommen auch Coordinaten.

Die Gleichung für eine krumme Linie mit doppelter Krümmung kann auch zwey Winkel und eine veränderliche gerade Linie zu Coordinaten haben. Man setze in (Fig. 83.) daß die drey Richtungs-Ebenen auf einander senkrecht stehen, so daß die Ebene des Dreyecks MAQ, dessen Seiten die Linie MA von dem Puncte M der Curve nach dem gegebenen Puncte A, die senkrechte MQ auf die Ebene XAY, und AQ, die Linie von A nach MQ in eben dieser Ebene, sind, senkrecht auf XAY sey. Durch

den Winkel XAQ, den Winkel QAM und die Linie AM wird der Ort des Punctes M bestimmt. Die Winkel XAQ, QAM, und die gerade AM sind Coordinaten für die krumme Linie LMN oder eine krumme Fläche. In der Astronomie heißen sie Länge, Breite und Abstand eines Weltkörpers von A, wenn die Ebene XAY die Ebene der Ekliptik ist, oder Rectascension, Declination und Abstand, wenn XAY die Ebene des Äquators ist.

Corollarium, Zusatz, ist eine unmittelbare oder leichte Folgerung (consectarium) aus einem bewiesenen Satze, oder der Auflösung einer Aufgabe; insbesondere die Anwendung eines allgemeinen Satzes auf einen besondern Fall.

Cosa, res, ist bey den alten italienischen Algebraisten, was wir Wurzel einer Gleichung nennen.

Cosecante, die Secante des Complements eines Winkels. Wenn $\frac{u}{a}$ die Secante eines Winkels φ ist, so ist $\frac{u}{\sqrt{(u^2 - a^2)}} = \operatorname{cosec}\varphi$. Gunter, ein englischer Mathematiker (gest. 1626), hat diese abgekürzte Benennung, so wie die ähnlichen, Cosinus, Cotangente, eingeführt, wie man aus dem Vorberichte zu seinem Canon triangulorum sieht. In seinen Schriften gebraucht er zugleich die Ausdrücke, Sinus und Tangente des Complements. Von Co-Sinus bemerkt es Kepler. Tabul. Rudolph. praecepta. C. 8. In Cavalerii Trigonometria heißt die Cosecante Secans secunda.

Cosinus, der Sinus des Complements eines Winkels. Wenn $\frac{x}{a}$ der Sinus eines Winkels φ ist, so

ist $\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{a} = \cosin \varphi$. Im 16ten Jahrhundert gebrauchten einige für Cosinus die Benennung sinus rectus secundus. Rhäticus und Vieta nennen Cosinus Basis, und den Sinus Perpendiculum, in Beziehung auf den Radius.

Coß, Regel Coß, hieß bey den deutschen Arithmetikern lange Zeit die Algebra. Die Italiener, welche die Algebra in Europa einführten, hatten sie regola oder arte de la cosa genannt. S. Cosa.

Cosische Zahlen sind Potenzen und Wurzeln in der Sprache der alten Algebraisten, die selbst Cossisten hießen. Cossische Zeichen sind die Symbole dieser Größen. Cossischer Algorithmus, die Rechnung nach den vier Speciebus mit diesen Größen wenn sie numerische Factoren haben.

Co-sinus versus ist der Sinus versus des Complements eines Winkels.

Cotangente ist die Tangente des Complements eines Winkels. Wenn $\frac{t}{a} = \tang \varphi$, so ist . . . $\frac{a}{t} = \cotang \varphi$. Rhäticus und Vieta nennen die Cotangente Basis und die Tangente Perpendiculum, in Beziehung auf die Secante. Cavaleri nennt sie in seiner Trigonometrie Tangens secunda.

Cotesischer Lehrsatz ist der von Cotes erfundene Satz, eine Eigenschaft des Kreises betreffend, wodurch die Factoren der Binomien $r^n - a^n$ und $r^n + a^n$ geometrisch dargestellt werden.

Ein mit dem Halbmesser OA beschriebener Kreis (Fig. 86 und 87 Tab. VI.). werde in eine gerade Anzahl

Nn

gleicher Theile getheilt. Aus einem Puncte P des Halbmessers werden an die Theilungspuncte gerade Linien gezogen. Die Anzahl der Theile in dem Umfange sey $= 2n$, der Halbmesser $= r$, der Abstand $OP = a$, so ist $r^n - a^n = PA \times PC \times PE \times PG \times$ etc. bis zum nten Factor; und $r^n + a^n = PB \times PD \times PF \times PH \times$ etc. bis zum nten Factor. Der Satz gilt auch, wenn P außerhalb des Kreises auf der verlängerten OA liegt. Es ist alsdann $a^n - r^n$ anstatt $r^n - a^n$ zu setzen.

Der Beweis des Satzes beruht auf der analytischen Zerlegung der Formeln $r^n - a^n$, und $r^n + a^n$ in Doppelfactoren, jene mit dem einfachen $r - a$, diese mit dem einfachen $r + a$, wenn n ungerade ist. In dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra (S 162.) ist gefunden, daß die Formeln $r^n - a^n$, und $r^n + a^n$ Doppelfactoren von der Form $r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2$, an der Zahl $\frac{1}{2}n$, oder $\frac{1}{2}(n - 1)$, haben, wo φ die Form $\frac{2k\pi}{n}$ für die Formel $r^n - a^n$, und die Form . . $\frac{2k+1}{n}\pi$ für die Formel $r^n + a^n$ hat. Das dortige x ist hier r. Man ziehe an jeden Theilungspunct den Halbmesser, wie CO an C, so ist . . . .
$PC^2 = OC^2 - 2OC \times OP. \cos COP + OP^2$, wo das zweyte Glied additiv ist, wenn COP zwischen einem und drey Rechten ist, wegen der negativen Beschaffenheit des Cosinus in diesem Falle. Man bezeichne jede der Linien, wie PC, durch z, und jeden Winkel, wie COP, durch φ, so ist $z^2 = r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2$. Dieser Werth von z^2 ist gleich einem der Doppelfactoren von $r^n - a^n$, wenn z eine der Linien PA, PC, PE, etc. bedeutet, die an Theilungspuncte mit einer ungeraden Stellenzahl gezogen sind. Denn da der W. $AOB = \frac{\pi}{n}$ ist, so ist .

$AOC = \frac{2\pi}{n}$; $AOE = \frac{4\pi}{n}$; $AOG = \frac{6\pi}{n}$; u. s. f.

so daß φ die Form $\frac{2k\pi}{n}$ hat, die für die Formel $r^n - a^n$ gehört. Nimmt man für z eine der Linien PB, PD, PF, etc. zu Theilungspuncten mit geraden Stellenzahlen, so ist z^2 einer der Doppelfactoren der Formel $r^n + a^n$. Denn es ist $AOB = \frac{\pi}{n}$; $AOD = \frac{3\pi}{n}$; $AOF = \frac{5\pi}{n}$, etc. welche Winkel die Form $\frac{2k+1}{n}\pi$ haben, die für die Formel $r^n + a^n$ gehört. Die Anzahl der Factoren z ist n, wie in den beiden Formeln. Die Factoren sind, ausser den beiden $r - a$ und $r + a$, paarweise gleich groß vorhanden, indem jedem z^2 in der Zeichnung ein quadratischer Factor der Formel entspricht. In der Gleichung $r^n - a^n = 0$, hat r sowohl $+ a$ als $- a$ zu Werthen, wenn n gerade ist, also hat die Formel $r^n - a^n$ die Factoren $r - a$ und $r + a$. Eben diese sind für z die Werthe PA und PG auf dem Durchmesser (Fig. 87.). Für ein ungerades n erhält in eben dieser Gleichung r nicht den Werth $-a$, und die Formel nicht den Factor $r + a$, so wie auch für z kein zweyter Werth, ausser $PA = r - a$, auf den Durchmesser selbst fällt. Die Formel $r^n + a^n$ hat für ein gerades n keinen Factor $r - a$ oder $r + a$, so wie in diesem Falle auch kein Werth von z auf dem Durchmesser durch A liegt. Für ein ungerades n ist der Factor $r + a$ vorhanden, und z hat einen Werth, der auf dem Durchmesser genommen wird, wie PF (Fig. 86).

Der Punct P kann auch über A hinaus gesetzt werden. Es bleibt, wie vorher, $zz = rr - 2ra \cos\varphi + aa$. Die Formel $r^n + a^n$ hat diesen Doppelfactor, ohne Unterschied, ob r oder a das größere von beiden sey.

Cotes war ein vorzüglicher Mathematiker in England, der im 34sten Jahre seines Alters, 1716, starb. Newton bedauerte seinen frühzeitigen Tod mit den Worten: Wenn Cotes länger gelebt hätte, würden wir noch

von ihm etwas gelernt haben. Smith, der Herausgeber einiger nachgelassenen Schriften von Cotes, unter dem Titel, Harmonia mensurarum, 1722, hat den Lehrsatz daselbst pag. 114. mitgetheilt, aber ohne Beweis. Pemberton hat in einer epistola ad amicum de Cotesii inventis, 1722 einen Beweis davon gegeben, der aber durch seine Weitläuftigkeit ermüdet. Walmessley, der jenes Werk neu bearbeitet unter dem Titel: Analyse des mesures, des rapports et des angles, ou Reduction des Integrales aux logarithmes et aux Arcs de Cercle, 1753, herausgegeben hat, giebt daselbst pag. 82 ff. einen Beweis, in welchem aber noch manches zu ergänzen ist. Joh. Bernoulli hat einen leichtern Beweis aufgesetzt, der in seinen Werken T. IV. p. 67 zu finden ist. Diesen habe ich abgekürzt und zugleich allgemeiner gemacht, in meiner analytischen Trigonometrie S. 96. ff. vorgetragen. Der hier gegebene Beweis gründet sich auf die analytische Zerlegung der Formeln $x^n - a^n$ und $x^n + a^n$, welche durch Hülfe der Rechnung mit unmöglichen Größen aus den Formeln für den Sinus und Cosinus des Vielfachen eines Winkels hergeleitet ist. Diese Art der Rechnung gewährt immer beträchtliche Abkürzungen, wenn gleich darin Formen von Größen aufgenommen werden, die ihr eigenes Gesetz, von dem für die andern Größen geltenden Gesetze verschiedenes, haben. Es ist gut, merkwürdige Beyspiele von diesem Rechnungs-Verfahren zu erhalten.

Moivre erweiterte den Cotesischen Lehrsatz auf die dreytheiligen Functionen von der Form . . . . . $r^{2n} - 2a^n r^n . \cos.\alpha + a^{2n}$. Miscellanea Analytica p. 22. 23. Eine Construction dieser Factoren ist folgende.

Es werde mit dem Halbmesser $AO = r$ (Fig 88.) ein Kreis beschrieben. Auf diesem nehme man den Bogen

$AM = \alpha$, und $AB = \frac{1}{n}\alpha$, hier $\frac{1}{3}AM$. Von B

aus tragen man die Bogen BC, CD, DE, EF, etc. jede $\frac{2\pi}{n}$, oder theile den Umfang von B aus in n gleiche Theile. Auf OA (oder auf der Verlängerung über A hinaus) nehme man OP = a, und ziehe PB, PC, PD, PE, PF, etc. so ist das Product $PB^2 \times PC^2 \times PD^2 \times PE^2 \times PF^2 \times etc. = r^{2n} - 2a^n r^n \cos\alpha + a^{2n}$, so daß die Anzahl jener Quadrate = n ist.

Denn man ziehe an einen der Theilungspuncte, wie C, den Halbmesser OC, so ist $PC = OC^2 - 2OC \times OP \times \cos COP + OP^2$, das ist $PC^2 = r^2 - 2ar\cos\frac{2\pi + \alpha}{n} + a^2$, für den ersten Theilungspunct C nach B. Setzt man jede der Linien, wie PC ist, z, so ist . . . . . $z^2 = r^2 - 2ar\cos\frac{2k\pi + \alpha}{n} + a^2$. Es ist in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, VII. S. 163. gezeigt, daß dieses die Form der quadratischen Factoren der Function $r^{2n} - 2a^n r^n . \cos\alpha + a^{2n}$ ist. Man sondere nur den Factor a^{2n} ab, und setze $\frac{r}{a} = x$, um die dortige Formel zu erhalten. Also ist z^2 ein Factor dieser Function. Da der aus P gezogenen Linien Anzahl = n ist, so ist das Product ihrer Quadrate die Function, als welche auch n quadratische Factoren hat.

Man kann auch die Theilungspuncte des Umfanges von B aus abwechselnd nach der einen und der andern Seite tragen. So wird F der zweyte, D der dritte, E der vierte Theilungspunct, in dem Falle der Figur. In diesem erhält man dieselbe Lage für die Linie PF, man mag von A über B hinaus den Bogen $\frac{8\pi + \alpha}{5}$, oder nach entgegengesetzter Seite den Bogen $\frac{2\pi - \alpha}{5}$ tragen; gleich-

falls für PE dieselbe Lage, man mag von A aus nach jener Seite hin den Bogen $\frac{6\pi + \alpha}{5}$, oder nach dieser den Bogen $\frac{4\pi - \alpha}{5}$ tragen. Allgemein, der Bogen $\frac{2k\pi + \alpha}{n}$ von A über B hinaus genommen, und $\frac{2(n-k)\pi - \alpha}{n}$ nach der andern Seite hin, geben als gegenseitige Complemente der ganzen Peripherie dieselbe Lage für die aus P gezogene Linie.

Anstatt die einfache Peripherie des Kreises in n gleiche Theile zu theilen kann man auch jedes Vielfache derselben in n gleiche Theile theilen. Es sey AM $= \alpha$; BC, oder CD, oder DE u. s. f. $= \frac{2k\pi}{n}$, wo k eine ganze Zahl ist, so ist AC $= \frac{2k\pi + \alpha}{n}$; AD $= \frac{4k\pi + \alpha}{n}$; AE $= \frac{6k\pi + \alpha}{n}$, u. s. f. und die Werthe des

$$\text{Cos}\ \frac{AM}{n}\ \text{sind}\ \cos AB;\ \cos AC;\ \cos AD;\ \cos AE;$$

etc. da, wenn ein Winkel α, der durch seinen Cosinus gegeben wird, in n gleiche Theile zu theilen ist, der Cosinus des nten Theils ist $\cos. \frac{\alpha}{n}$; $\cos \frac{2\pi + \alpha}{n}$; $\cos \frac{4\pi + \alpha}{n}$, u. s. f. Aus allen diesen Cosinus kann man die verschiedenen, in welcher Ordnung man will, herausnehmen.

Um die Entstehung der Formel $PB^2 \times PC^2 \times PD^2 \times$ etc. $= r^{2n} - 2a^n r^n \cos \alpha + a^r$ auch unabhängig

von der Rechnung des Unmöglichen einzusehen, wollen wir sie in zwey Beyspielen, für ein ungerades und für ein gerades n, durch bloße goniometrisch-algebraische Rechnung herausbringen.

Es sey erstlich $n = 5$, und die Peripherie sey in fünf gleiche Theile, BC, CD, DE, EF, FB, getheilt. Nun ist

$$PB^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{\alpha}{n}$$

$$PC^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{2\pi + \alpha}{n}$$

$$PD^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{4\pi + \alpha}{n}$$

$$PE^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{6\pi + \alpha}{n}$$

$$PF^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{8\pi + \alpha}{u}$$

Das Aggregat dieser Cosinus sey $= A$; das Aggregat ihrer Binionen, Ternionen, Quaternionen, und das Product aller seyn B, C, D, E. Es ist $PB^2 \times PC^2 \times PD^2 \times PE^2 \times PF^2 = (r^2 + a^2)^5 - (r^2 + a^2)^4 . 2arA + (r^2 + a^2)^3 . 4a^2r^2 . B - (r^2 + a^2)^2 . 8a^3r^3 . C \ldots + (r^2 + a^2) . 16a^4r^4 . D - 32a^5r^5 . E$. Ferner ist wenn x einen jede dieser Cosinus bedeutet, (Goniometrie, IV. 69.)

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos\alpha = 0.$$

Hier ist das Aggregat der Wurzeln $x = 0$. Das Aggregat ihrer Binionen $= -\frac{20}{16}$; der Ternionen $= 0$; der Quaternionen $= +\frac{5}{16}$, das Product aller $= + \frac{\cos\alpha}{16}$ (Gleichung, VI. 6.). Folglich ist $A = 0$; $B = -\frac{20}{16}$

$C = 0$; $D = +\frac{5}{16}$; $E = \frac{1}{16}\cos\alpha$. Demnach ist das Product $PB^2 \times \ldots \times PF^2 = (r^2 + a^2)^5 - 5a^2r^2(r^2 + a^2)^3 + 5a^4r^4(r^2 + a^2) - 2a^5r^5\cos\alpha$, $= r^{10} + a^{10} - 2a^5r^5\cos\alpha$, wie nach der aufgestellten Formel.

Zweytens sey $n = 6$, und die Peripherie sey in sechs gleiche Theile getheilt. Die Quadrate der aus einem Puncte P des Durchmessers wie vorher an die Theilungspuncte gezogenen Linien sind I. $r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{\alpha}{6}$;

II. $r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{2\pi + \alpha}{6}$ . . . . . .

VI. $r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{10\pi + \alpha}{6}$. Die Gleichung für die Cosinus dieser Winkel ist

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - (1 + \cos\alpha) = 0.$$

Die Summe der Unionen, der Ternionen und der Quinionen der Wurzeln dieser Gleichung oder jener Cosinus ist $= 0$. Die Summe der Binionen ist $= -\frac{48}{32} = B$; der Quaternionen $= +\frac{18}{32} = D$; das Product aller sechs $= -\frac{1 + \cos\alpha}{32} = F$. Nun ist das Product von den Quadraten der sechs aus P an die Theilungspuncte gezogenen Linien $= (r^2 + a^2)^6 + (r^2 + a^2)^4 . 4a^2r^2 . B + (r^2 + a^2)^2 . 16a^4r^4 . D + 64a^6r^6 . F$, und durch die gefundenen Werthe von B, D, F ist dieses Product $= (r^2 + {}^2)^6 - 6a^2r^2(r^2 + a^2)^4 + 9a^4r^4(r^2 + a^2)^2 - 2a^6r^6(1 + \cos\alpha)$. Entwickelt ist dasselbe $= r^{12} - 2a^6r^6\cos\alpha + a^{12}$.

Da die Producte von den Quadraten der aus P an den Umfang gezogenen Linie nach einem und demselben Gesetze gemacht werden, was auch die Zahl n für einen Werth habe, und da ferner die Coefficienten von x in der Gleichung für $\cos\alpha$, woraus die Combinationen in jenem Producte gebildet sind, auch ein bestimmtes Gesetz der Formation aus n beobachten, so darf man aus den beiden Entwickelungen des Products für $n = 5$ und $n = 6$ schließen, daß überhaupt die Quantität von n nur die Potenzen von r und a bestimme, und daher alles bis auf die drey Glieder $r^{2n} - 2a^n r^n \cos\alpha + a^{2n}$ sich aufhebe, so daß die gefundene Form des Products allgemein ist. — Daß a noch größer als r seyn dürfe, ergiebt die geführte Rechnung durch die Formeln für PB^2, PC^2, etc.

Wenn $AM = 0$, also auch $AB = 0$ gesetzt wird, so ist $\cos\alpha = +1$, und das Product von den Quadraten der aus P gezogenen Linien ist $= r^{2n} - 2a^n r^n + a^{2n} = (r^n - a^n)^2$, also ist das Product jener Linien $= r^n - a^n$.

Setzt man $AM = \pi$, dem halben Umfange, also $AB = \frac{\pi}{n}$ so ist $\cos\alpha = -1$, und das Product der Quadrate, $PB^2 \times PC^2 \times$ etc. $= r^{2n} + 2a^n r^n + a^{2n} = (r^n + a^n)^2$, also das Product $PB \times PC \times$ etc. $= r^n + a^n$.

So erhält man die beiden zuerst betrachteten Fälle, deren Unterschied aus der beide begreifenden Anordnung einleuchtender wird.

Setzt man $AM = \frac{1}{2}\pi$, so ist $AB = \frac{\pi}{2n}$, und $PB^2 \times PC^2 \times$ etc. $= r^{2n} + a^{2n}$.

Das hier angewandte Verfahren bey der Entwickelung des Products $PB^2 \times PC^2 \times$ etc. hat einiges ähnliche mit dem von Thomas Simpson gebrauchten, in den Essays on several subjects in speculative and mix'd Mathematicks. London 1740. pag. 113 seqq.

gleicher Theile getheilt. Aus einem Puncte P des Halbmessers werden an die Theilungspuncte gerade Linien gezogen. Die Anzahl der Theile in dem Umfange sey $= 2n$, der Halbmesser $= r$, der Abstand $OP = a$, so ist $r^n - a^n = PA \times PC \times PE \times PG \times$ etc. bis zum nten Factor; und $r^n + a^n = PB \times PD \times PF \times PH \times$ etc. bis zum nten Factor. Der Satz gilt auch, wenn P außerhalb des Kreises auf der verlängerten OA liegt. Es ist alsdann $a^n - r^n$ anstatt $r^n - a^n$ zu setzen.

Der Beweis des Satzes beruht auf der analytischen Zerlegung der Formeln $r^n - a^n$, und $r^n + a^n$ in Doppelfactoren, jene mit dem einfachen $r - a$, diese mit dem einfachen $r + a$, wenn n ungerade ist. In dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra (S. 162.) ist gefunden, daß die Formeln $r^n - a^n$, und $r^n + a^n$ Doppelfactoren von der Form $r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2$, an der Zahl $\frac{1}{2}n$, oder $\frac{1}{2}(n-1)$, haben, wo φ die Form $\frac{2k\pi}{n}$ für die Formel $r^n - a^n$, und die Form . . $\frac{2k+1}{n}\pi$ für die Formel $r^n + a^n$ hat. Das dortige x ist hier r. Man ziehe an jeden Theilungspunct den Halbmesser, wie CO an C, so ist . . . . $PC^2 = OC^2 - 2\,OC \times OP.\cos COP + OP^2$, wo das zweyte Glied additiv ist, wenn COP zwischen einem und drey Rechten ist, wegen der negativen Beschaffenheit des Cosinus in diesem Falle. Man bezeichne jede der Linien, wie PC, durch z, und jeden Winkel, wie COP, durch φ, so ist $z^2 = r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2$. Dieser Werth von z^2 ist gleich einem der Doppelfactoren von $r^n - a^n$, wenn z eine der Linien PA, PC, PE, etc. bedeutet, die an Theilungspuncte mit einer ungeraden Stellenzahl gezogen sind. Denn da der W. $AOB = \frac{\pi}{n}$ ist, so ist . $AOC = \frac{2\pi}{n}$; $AOE = \frac{4\pi}{n}$; $AOG = \frac{6\pi}{n}$; u. s. f.

so daß φ die Form $\frac{2k\pi}{n}$ hat, die für die Formel $r^n - a^n$ gehört. Nimmt man für z eine der Linien PB, PD, PF, etc. zu Theilungspuncten mit geraden Stellenzahlen, so ist z^2 einer der Doppelfactoren der Formel $r^n + a^n$. Denn es ist $AOB = \frac{\pi}{n}$; $AOD = \frac{3\pi}{n}$; $AOF = \frac{5\pi}{n}$, etc. welche Winkel die Form $\frac{2k+1}{n}\pi$ haben, die für die Formel $r^n + a^n$ gehört. Die Anzahl der Factoren z ist n, wie in den beiden Formeln. Die Factoren sind, ausser den beiden $r - a$ und $r + a$, paarweise gleich groß vorhanden, indem jedem z^2 in der Zeichnung ein quadratischer Factor der Formel entspricht. In der Gleichung $r^n - a^n = 0$, hat r sowohl $+a$ als $-a$ zu Werthen, wenn n gerade ist, also hat die Formel $r^n - a^n$ die Factoren $r - a$ und $r + a$. Eben diese sind für z die Werthe PA und PG auf dem Durchmesser (Fig. 87.). Für ein ungerades n erhält in eben dieser Gleichung r nicht den Werth $-a$, und die Formel nicht den Factor $r + a$, so wie auch für z kein zweyter Werth, ausser $PA = r - a$, auf den Durchmesser selbst fällt. Die Formel $r^n + a^n$ hat für ein gerades n keinen Factor $r - a$ oder $r + a$, so wie in diesem Falle auch kein Werth von z auf dem Durchmesser durch A liegt. Für ein ungerades n ist der Factor $r + a$ vorhanden, und z hat einen Werth, der auf dem Durchmesser genommen wird, wie PF (Fig. 86).

Der Punct P kann auch über A hinaus gesetzt werden. Es bleibt, wie vorher, $zz = rr - 2ra\cos\varphi + aa$. Die Formel $r^n + a^n$ hat diesen Doppelfactor, ohne Unterschied, ob r oder a das größere von beiden sey.

Cotes war ein vorzüglicher Mathematiker in England, der im 34sten Jahre seines Alters, 1716, starb. Newton bedauerte seinen frühzeitigen Tod mit den Worten: Wenn Cotes länger gelebt hätte, würden wir noch

von ihm etwas gelernt haben. Smith, der Herausgeber einiger nachgelassenen Schriften von Cotes, unter dem Titel, Harmonia mensurarum, 1722, hat den Lehrsatz daselbst pag. 114. mitgetheilt, aber ohne Beweis. Pemberton hat in einer epistola ad amicum de Cotesii inventis, 1722 einen Beweis davon gegeben, der aber durch seine Weitläuftigkeit ermüdet. Walmesslen, der jenes Werk neu bearbeitet unter dem Titel: Analyse des mesures, des rapports et des angles, ou Reduction des Integrales aux logarithmes et aux Arcs de Cercle, 1753, herausgegeben hat, giebt daselbst pag. 82 ff. einen Beweis, in welchem aber noch manches zu ergänzen ist. Joh. Bernoulli hat einen leichtern Beweis aufgesetzt, der in seinen Werken T. IV. p. 67 zu finden ist. Diesen habe ich abgekürzt und zugleich allgemeiner gemacht, in meiner analytischen Trigonometrie S. 96. ff. vorgetragen. Der hier gegebene Beweis gründet sich auf die analytische Zerlegung der Formeln $x^n - a^n$ und $x^n + a^n$, welche durch Hülfe der Rechnung mit unmöglichen Größen aus den Formeln für den Sinus und Cosinus des Vielfachen eines Winkels hergeleitet ist. Diese Art der Rechnung gewährt immer beträchtliche Abkürzungen, wenn gleich darin Formen von Größen aufgenommen werden, die ihr eigenes Gesetz, von dem für die andern Größen geltenden Gesetze verschiedenes, haben. Es ist gut, merkwürdige Beyspiele von diesem Rechnungs-Verfahren zu erhalten.

Moivre erweiterte den Cotesischen Lehrsatz auf die dreytheiligen Functionen von der Form . . . . . $r^{2n} - 2a^n r^n . \cos.\alpha + a^{2n}$. Miscellanea Analytica p. 22. 23. Eine Construction dieser Factoren ist folgende.

Es werde mit dem Halbmesser $AO = r$ (Fig 88.) ein Kreis beschrieben. Auf diesem nehme man den Bogen

$AM = \alpha$, und $AB = \frac{1}{n}\alpha$, hier $\frac{1}{3}AM$. Von B

aus tragen man die Bogen BC, CD, DE, EF, etc. jede $\frac{2\pi}{n}$, oder theile den Umfang von B aus in n gleiche Theile. Auf OA (oder auf der Verlängerung über A hinaus) nehme man $OP = a$, und ziehe PB, PC, PD, PE, PF, etc. so ist das Product $PB^2 \times PC^2 \times PD^2 \times PE^2 \times PF^2 \times$ etc. $= r^{2n} - 2a^n r^n \cos\alpha + a^{2n}$, so daß die Anzahl jener Quadrate $= n$ ist.

Denn man ziehe an einen der Theilungspuncte, wie C, den Halbmesser OC, so ist $PC^2 = OC^2 - 2OC \times OP \times \cos COP + OP^2$, das ist $PC^2 = r^2 - 2ar \cos\frac{2\pi + \alpha}{n} + a^2$, für den ersten Theilungspunct C nach B. Setzt man jede der Linien, wie PC ist, z, so ist . . . . . $z^2 = r^2 - 2ar\cos\frac{2k\pi + \alpha}{n} + a^2$. Es ist in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, VII. S. 163. gezeigt, daß dieses die Form der quadratischen Factoren der Function $r^{2n} - 2a^n r^n.\cos\alpha + a^{2n}$ ist. Man sondere nur den Factor a^{2n} ab, und setze $\frac{r}{a} = x$, um die dortige Formel zu erhalten. Also ist z^2 ein Factor dieser Function. Da der aus P gezogenen Linien Anzahl $= n$ ist, so ist das Product ihrer Quadrate die Function, als welche auch n quadratische Factoren hat.

Man kann auch die Theilungspuncte des Umfanges von B aus abwechselnd nach der einen und der andern Seite tragen. So wird F der zweyte, D der dritte, E der vierte Theilungspunct, in dem Falle der Figur. In diesem erhält man dieselbe Lage für die Linie PF, man mag von A über B hinaus den Bogen $\frac{8\pi + \alpha}{5}$, oder nach entgegengesetzter Seite den Bogen $\frac{2\pi - \alpha}{5}$ tragen; gleich=

falls für PE dieselbe Lage, man mag von A aus nach jener Seite hin den Bogen $\frac{6\pi + \alpha}{5}$, oder nach dieser den Bogen $\frac{4\pi - \alpha}{5}$ tragen. Allgemein, der Bogen $\frac{2k\pi + \alpha}{n}$ von A über B hinaus genommen, und $\frac{2(n-k)\pi - \alpha}{n}$ nach der andern Seite hin, geben als gegenseitige Complemente der ganzen Peripherie dieselbe Lage für die aus P gezogene Linie.

Anstatt die einfache Peripherie des Kreises in n gleiche Theile zu theilen kann man auch jedes Vielfache derselben in n gleiche Theile theilen. Es sey $AM = \alpha$; BC, oder CD, oder DE u. s. f. $= \frac{2k\pi}{n}$, wo k eine ganze Zahl ist, so ist $AC = \frac{2k\pi + \alpha}{n}$; $AD = \frac{4k\pi + \alpha}{n}$; $AE = \frac{6k\pi + \alpha}{n}$, u. s. f. und die Werthe des

$\cos \frac{AM}{n}$ sind $\cos AB$; $\cos AC$; $\cos AD$; $\cos AE$;

etc. da, wenn ein Winkel α, der durch seinen Cosinus gegeben wird, in n gleiche Theile zu theilen ist, der Cosinus des nten Theils ist $\cos. \frac{\alpha}{n}$; $\cos \frac{2\pi + \alpha}{n}$; $\cos \frac{4\pi + \alpha}{n}$, u. s. f. Aus allen diesen Cosinus kann man die verschiedenen, in welcher Ordnung man will, herausnehmen.

Um die Entstehung der Formel $PB^2 \times PC^2 \times PD^2 \times$ etc. $= r^{2n} - 2a^n r^n \cos \alpha + a^r$ auch unabhängig

von der Rechnung des Unmöglichen einzusehen, wollen wir sie in zwey Beyspielen, für ein ungerades und für ein gerades n, durch bloße goniometrisch-algebraische Rechnung herausbringen.

Es sey erstlich $n = 5$, und die Peripherie sey in fünf gleiche Theile, BC, CD, DE, EF, FB, getheilt Nun ist

$$PB^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{\alpha}{n}$$

$$PC^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{2\pi + \alpha}{n}$$

$$PD^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{4\pi + \alpha}{n}$$

$$PE^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{6\pi + \alpha}{n}$$

$$PF^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{8\pi + \alpha}{u}$$

Das Aggregat dieser Cosinus sey $= A$; das Aggregat ihrer Binionen, Ternionen, Quaternionen, und das Product aller seyn B, C, D, E. Es ist $PB^2 \times PC^2 \times PD^2 \times PE^2 \times PF^2 = (r^2 + a^2)^5 - (r^2 + a^2)^4 . 2arA + (r^2 + a^2)^3 . 4a^2r^2 . B - (r^2 + a^2)^2 . 8a^3r^3 . C \ldots + (r^2 + a^2) . 16a^4r^4 . D - 32a^5r^5 . E$. Ferner ist, wenn x einen jede dieser Cosinus bedeutet, (Goniometrie, IV. 69.)

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos\alpha = 0.$$

Hier ist das Aggregat der Wurzeln $x = 0$. Das Aggregat ihrer Binionen $= -\frac{20}{16}$; der Ternionen $= 0$; d[er]

Quaternionen $= +\frac{5}{16}$, das Product aller $= +$ c[os]

(Gleichung, VI. 6.). Folglich ist $A = 0$; $B = -$ [...]

$C = 0$; $D = + \frac{5}{16}$; $E = \frac{1}{16} \cos \alpha$. Demnach ist das Product $PB^2 \times \ldots \times PF^2 = (r^2 + a^2)^5 - 5a^2r^2(r^2 + a^2)^3 + 5a^4r^4(r^2 + a^2) - 2a^5r^5 \cos \alpha$, $= r^{10} + a^{10} - 2a^5r^5 \cos \alpha$, wie nach der aufgestellten Formel.

Zweytens sey $n = 6$, und die Peripherie sey in sechs gleiche Theile getheilt. Die Quadrate der aus einem Puncte P des Durchmessers wie vorher an die Theilungspuncte gezogenen Linien sind I. $r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{\alpha}{6}$;

II. $r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{2\pi + \alpha}{6}$ . . . . . .

VI. $r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{10\pi + \alpha}{6}$. Die Gleichung für die Cosinus dieser Winkel ist

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - (1 + \cos \alpha) = 0.$$

Die Summe der Unionen, der Ternionen und der Quinionen der Wurzeln dieser Gleichung oder jener Cosinus ist $= 0$. Die Summe der Binionen ist $= -\frac{48}{32} = B$; der Quaternionen $= + \frac{18}{32} = D$; das Product aller sechs $= - \frac{1 + \cos \alpha}{32} = F$. Nun ist das Product von den Quadraten der sechs aus P an die Theilungspuncte gezogenen Linien $= (r^2 + a^2)^6 + (r^2 + a^2)^4 . 4a^2r^2 . B + (r^2 + a^2)^2 . 16a^4r^4 . D + 64a^6r^6 . F$, und durch die gefundenen Werthe von B, D, F ist dieses Product $= (r^2 + {}^2)^6 - 6a^2r^2(r^2 + a^2)^4 + 9a^4r^4(r^2 + a^2)^2 - 2a^6r^6(1 + \cos \alpha)$. Entwickelt ist dasselbe $= r^{12} - 2a^6r^6 \cos \alpha + a^{12}$.

Da die Producte von den Quadraten der aus P an den Umfang gezogenen Linie nach einem und demselben Gesetze gemacht werden, was auch die Zahl n für einen Werth habe, und da ferner die Coefficienten von x in der Gleichung für $\cos\alpha$, woraus die Combinationen in jenem Producte gebildet sind, auch ein bestimmtes Gesetz der Formation aus n beobachten, so darf man aus den beiden Entwickelungen des Products für $n = 5$ und $n = 6$ schließen, daß überhaupt die Quantität von n nur die Potenzen von r und a bestimme, und daher alles bis auf die drey Glieder $r^{2n} - 2a^n r^n \cos\alpha + a^{2n}$ sich aufhebe, so daß die gefundene Form des Products allgemein ist. — Daß a noch größer als r seyn dürfe, ergiebt die geführte Rechnung durch die Formeln für PB^2, PC^2, etc.

Wenn $AM = 0$, also auch $AB = 0$ gesetzt wird, so ist $\cos\alpha = +1$, und das Product von den Quadraten der aus P gezogenen Linien ist $= r^{2n} - 2a^n r^n + a^{2n} = (r^n - a^n)^2$, also ist das Product jener Linien $= r^n - a^n$.

Setzt man $AM = \pi$, dem halben Umfange, also $AB = \frac{\pi}{n}$ so ist $\cos\alpha = -1$, und das Product der Quadrate, $PB^2 \times PC^2 \times$ etc. $= r^{2n} + 2a^n r^n + a^{2n} = (r^n + a^n)^2$, also das Product $PB \times PC \times$ etc. $= r^n + a^n$.

So erhält man die beiden zuerst betrachteten Fälle, deren Unterschied aus der beide begreifenden Anordnung einleuchtender wird.

Setzt man $AM = \frac{1}{2}\pi$, so ist $AB = \frac{\pi}{2n}$, und $PB^2 \times PC^2 \times$ etc. $= r^{2n} + a^{2n}$.

Das hier angewandte Verfahren bey der Entwickelung des Products $PB^2 \times PC^2 \times$ etc. hat einiges ähnliche mit dem von Thomas Simpson gebrauchten, in den Essays on several subjects in speculative and mix'd Mathematicks. London 1740. pag. 113 seqq.

Die trigonometrisch-algebraische Rechnung daselbst ist noch nicht genug geschmeidig, wie es zu der Zeit, da das Buch geschrieben ward, noch nicht anders seyn konnte.

Der Beweis, welchen Krafft in den Comm. Petrop. novis, Tom. I. pag. 134, vorgetragen, beruhet bloß auf Induction von drey Fällen bey der Eintheilung des Umfanges in 4, 6, 8 gleiche Theile, und ist zur Erläuterung des Bernoullischen Beweises bestimmt. Der hier zuletzt von mir gegebene ist davon ganz verschieden.

Cubatur, s. Cubirung.

Cubikcubische Wurzel, radix cubo-cubica, ist die Wurzel vom sechsten Grade aus einer Zahl, z. B. 2 aus 64; 3 aus 729. Sie wird bezeichnet durch $\sqrt[6]{a}$ oder $a^{\frac{1}{6}}$. Sie wird durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes für gebrochne Exponenten, oder durch eine Annäherungs-Methode gefunden. S. Wurzel.

Cubikcubische Zahl, Cubo-Cubus, ist die sechste Potenz einer Zahl, oder das Product aus einem Cubus in sich selbst. Sie wird bezeichnet durch a^6, wenn a die Wurzel ist.

Cubik-Einheit ist der Cubus oder Würfel, womit in der praktischen Geometrie die Körper gemessen werden. Diese ist der Würfel derjenigen Linie, womit die Längen gemessen werden. Ist die Längen-Einheit ein Fuß, ein Zoll, eine Linie (der zehnte oder zwölfte Theil eines Zolles, oder eine Klafter, eine Ruthe, eine Meile, so ist die Cubik-Einheit ein Cubikfuß, Cubik-(Zoll, Linie, Klafter, Ruthe, Meile). Die Cubik-Einheiten verhalten sich wie die Cubikzahlen der Längen-Einheiten. Wird der Fuß in 10 Zolle, der Zoll in 10 Linien getheilt, so enthält ein Cubikfuß 1000 Cubikzoll, und der Cubikzoll 1000 Cubiklinien. Die Cubik-Einheiten von gleichnamigen Längen-Einheiten verhalten sich ebenfalls wie die

Cubikzahlen der letztern. Z. B. Wenn der alte Pariser Fuß und der Rheinländische sich verhalten wie 30 : 29, so verhalten sich der Pariser und Rheinl. Cubikfuß wie 27000 : 24389. Wenn sich die altfranzösische Lieue und die geographische Meile verhalten wie 3 : 5, so verhalten sich die Cubik-Einheiten wie 27 ; 125.

Cubik-Tafeln sind Tafeln, worin die Cubi oder Würfelzahlen der ganzen Zahlen nach ihrer Folge angegeben werden. Dergleichen sind, Joh. Pauli Buchneri tabula radicum, quadratorum et cuborum ad radicem 12000 extensa. Norib. 1701. Sie sind voller Fehler. Joh. Ludolfi Tetragonometria tabularia, Jenae 1712 enthält die Würfel der Zahlen bis 10000, die Quadrate bis zu der Wurzel 100000. In des mathematischen Lexici (des vermehrten Wolfischen) zweytem Theil, Leipzig 1742, sind die Quadrate und Würfel aller Zahlen von 1 bis 10000 verzeichnet. Diese scheinen correct zu seyn. In Vega's logarithmischen und trigonometrischen Tafeln, Band II. sind sie auch enthalten.

Die Richtigkeit der Angaben kann man bequem durch die Neunerprobe erfahren, vorausgesetzt, daß nicht zwey entgegengesetzte Druckfehler zugleich vorhanden sind. Die Probezahl heiße der Überschuß der Summe der Ziffern über ein Vielfaches von Neun. So gehören zusammen:

Probezahl für die Wurzel	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8.
Probezahl für die Würfel	0,	1,	8,	0.	1,	8,	1,	0,	8,

Z. B. von der Zahl 2821 ist der Würfel 22449 633661. Jene hat zur Probezahl 4, diese 1.

Die Verfertigung der Cubiktafeln geschieht durch Addition der Glieder der Differenzreihen. Es ist in der Buch-

stabenrechnung (21,) gezeigt, daß die dritten Unterschiede der Würfel, deren Wurzeln eine arithmetische Progression mit dem Unterschiede d ausmachen, die beständige Zahl $6d^3$ sind. In dem gegenwärtigen Falle sind die dritten Unterschiede = 6. Die zweyten Unterschiede sind daher, von Anfange an, die arithmetische Reihe 12, 18, 24, etc. Daraus und dem Anfangsgliede 7, entsteht die arithmetische Reihe der zweyten Ordnung 7, 19, 37, 61, etc. und daraus die Reihe der Würfel 1, 8, 27, 64, 125, etc. als eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung.

Cubikwurzeln aus den ersten 1000 Zahlen bis auf Zehnmillionentheile berechnet, finden sich in Schulzens und in Vega's Tafeln.

Die Cubiktafeln erleichtern die Ausziehung der Wurzeln, weil man durch sie den ersten Theil der Wurzel in drey oder vier Ziffern findet. Z. B. von der Zahl 14907 ist die Cubikwurzel 24, 61 . . . weil 14907000000 zwischen die Würfel von 2461 und 2462 fällt, also jene Zahl zwischen die Würfel von 24, 61 und 24, 62.

Cubikwurzel aus einer Zahl ist einer von den drey gleichen Factoren einer Zahl. Die gemeinste Art, die Cubikwurzel aus einer Zahl zu ziehen, ist folgende. 1) Die gegebene ganze Zahl wird in Classen getheilt, den Anfang mit der niedrigsten rechter Hand gemacht. In der höchsten Classe linker Hand mögen zwey oder nur eine Ziffer bleiben. Die Wurzel bekommt so viele Ziffern als Classen vorhanden sind. 2) Man suche die einziffrige Zahl, deren Wurzel der Zahl in der höchsten Classe am nächsten kommt, und kleiner ist, wenn sie nicht etwa dieselbe seyn sollte. Diese Zahl ist der erste Theil der Wurzel. Sie heiße A. Ihren Würfel ziehe man ab von der Zahl in der höchsten Classe. 3) Zu dem Reste setze man die Ziffern der zweyten Classe, und dividire die Zahl, welche aus dem Reste in der ersten Classe nebst der höch-

sten Ziffer der zweyten besteht, durch das Dreyfache des Quadrats von **A**, oder 3 **A A**, der Quotient ist der zweyte Theil der Wurzel, **B**, wenn sich die gleich zu erwähnenden beiden Theile an ihren Stellen noch abziehen lassen. Sonst ist B um Eins kleiner als jener Quotient. 4) Das Product 3 **A A B** setze man mit der niedrigsten Ziffer unter die höchste Ziffer der zweyten Classe, darauf die niedrigste Ziffer des Products 3 **A A B** unter die mittelste Ziffer derselben Classe, und endlich den Würfel von **B**, oder **B B B** mit der niedrigsten Ziffer unter die letzte Ziffer eben dieser Classe. Alle drey Producte ziehe man von der in den beiden ersten Classen übrig gebliebenen Zahl ab. 5) Zu dem Reste nehme man die drey Ziffern der dritten Classe von der linken Hand gerechnet. Nun verfährt man, um die dritte Ziffer der Wurzel, **C**, zu finden, eben so wie für **B**. Anstatt **A** hat man nun **A + B**. Es wird also der Rest der beiden ersten Classen nebst der ersten Ziffer der dritten durch $3(A + B)^2$ dividirt; der Quotient ist **C**, mit der Einschränkung bey nr. 3. Die Producte $3(A + B)^2 C$; $3(A + B)C^2$ und **C C C** werden auf dieselbe Art wie in nr. 4 hingesetzt, und abgezogen. So wird fortgefahren, bis daß man zu der Classe der Einer kommt.

Exempel.		Zahl		Wurzel
	7 8	9 5 3	7 4 6	4 2 9
	6 4			
48)	1 4	9 5 3		
	9	6 . .		
		4 8 .		
		8		
5 2 9 2)	4	8 6 5	7 4 6	
	4	7 6 2	8 . .	
		1 0 2	0 6 .	
			7 2 9	
Rest			1 5 7	

Die gegebene Zahl ist um 157 größer als der Würfel von 429.

Die Probezahl von dem Cubus der gefundenen Wurzel plus der Probezahl des Restes ist der Probezahl der vorgegebenen Zahl gleich, oder derselben um 9 vergrößert. Hier ist 0 + 4 = 4.

Diese Zerlegung einer Zahl in drey gleiche Factoren beruht auf der Zusammensetzung derselben (Synthesis) aus ihren gleichen Factoren. S. Cubus.

Um die Wurzel, wenn sie sich nicht unter den ganzen Zahlen findet, in Decimaltheilen zu erhalten, hängt man so viele Ternen von Nullen an, als man Decimalziffern suchen will, und verfährt ganz auf die vorher gewiesene Weise.

Denn so wie der Cubus eines Bruchs der Cubus des Zählers dividirt durch den des Nenners ist, so ist auch die Cubikwurzel aus einem Bruche die Cubikwurzel aus dem Zähler dividirt durch die aus dem Nenner. Die Anhängung

der Nullen ist eine Multiplication mit 1000, oder 1000 000, u. s. f. Dagegen muß man sich eben diese Multiplicatoren auch als Divisoren des Products gedenken, und aus diesen die Wurzel ziehen.

Exempel.

78953746 ‖ 429,02

$429^3 = 78953589$

157 | 000 | 000

552123) 110 | 424 | 6 . .

51 | 48 .

8

Rest 46 | 523 | 912

Aus diesem Exempel ersieht man zugleich, wie man sich durch Cubiktafeln die Arbeit abkürzen kann. Der Cubus von 429 ist unmittelbar aus einer solchen Tafel genommen.

Die vorher angeführte Probe giebt $8 + 5 = 4 + 9$.

Wenn die Zahl, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, Decimaltheile enthält, so muß die Abtheilung in Classen bey dem Komma, oder den Einern, angefangen, und nach beiden Seiten hin fortgesetzt werden. Wenn in der letzten Classe der Decimaltheile zwey oder eine Ziffer fehlen, so werden dafür Nullen gesetzt. Z. B. in der Zahl 3879,7835, welche so abgetheilt und ergänzt wird: 3|879,|783|500. Die Zahl mit den Decimaltheilen ist anzusehen als der Zähler eines Bruchs, dessen Nenner die Einheit mit dreymahl so viel Nullen ist, als Classen rechter Hand des Komma sind. Die Wurzel aus jener ganzen Zahl ist durch die Wurzel aus dem Nenner zu dividiren. In dem Exempel ist die Wurzel 15,71 . . .

Das gemeine Verfahren wird aber bald beschwerlich. Leichter ist die Annäherungs-Methode, welche auch bey Auflösung algebraischer Gleichungen gebraucht wird. Ein Beyspiel wird sie hinlänglich lehren.

Es sey die Cubikwurzel aus 2 bis auf die zehnte Decimalstelle zu finden. Die Tafeln zeigen, daß sie ein weniges kleiner ist als 1,26. Man setze $\sqrt[3]{2} = 1,26 - u$, so ist

$$2 = 2,000376 - 4,7628\,u + 3,78\,u^2 - u^3,$$

also

$$4,7628\,u = 0,000376 + 3,78\,u^2 - u^3.$$

Das gegebene Glied durch den Factor von u dividirt giebt zum Quotienten 0,00007894515. Also ist u nahe 0,00008, und $3,78\,u^2$ nahe $\overset{-9}{24}$, wo die -9 über 4 ihre Stelle nach dem Komma bezeichnet. Das zweyte Glied jener Gleichung hat also erst auf die 8te Decimalstelle von u Einfluß, so daß u bis auf die 7te Decimalstelle richtig ist, oder $u = 0,0000789$, also . .

$3,78\,u^2 = \overset{-12}{23530}$, und die Ergänzung von . . .

$u = +\overset{-11}{494}$, so daß $u = 0,00007895009$, und

$\sqrt[3]{2} = 1,25992104991$, fast übereinstimmig mit dem in dem Artikel, Binomischer Lehrsatz, (16.) Exempel III. gefundenen Werthe.

Eine bequeme Näherungsformel ist folgende, deren Beweis in dem Artikel, Wurzel, gegeben wird. Es sey N die Zahl, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, und a ein naher Werth der Wurzel, welchen man durch Hülfe der Logarithmen finden mag, oder durch die Cubiktafeln erhält. Wenn nun $N = a^3 + b$ ist, so ist nahe

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{b}{3a^3 + b}\,a + \frac{2}{81} \cdot \frac{b^3}{a^9}\,a.$$

Ist a^3 größer als N; so ist b negativ. Setzt man für a die nach dieser Formel gefundene Wurzel, so weit man sie für richtig hält, so wird b gegen a viel kleiner, und die Wurzel wird viel genauer gefunden.

Exempel. Die Cubikwurzel aus 2 zu finden. Man suche statt dieser die Cubikwurzel aus 2.64 oder aus 128. Hier ist $a^3 = 125$, und $b = 3$; also der erste Theil der Formel $= 5$; der zweyte $= 0,03968254 \ldots$; der dritte $= 0,00000171 \ldots$ und $\sqrt[3]{128} = 5,0396842 \ldots$, also $\sqrt[3]{2} = 1,2599210 \ldots$ übereinstimmig mit der Rechnung. S. 336.

Lagny gab zur Ausziehung der Cubikwurzel die beiden Formeln an: $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$, und . . . $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{b}{3a})}$. Man sehe Halleys Abhandlung über die Annäherung zu den Wurzeln einer Gleichung bey Newtons Arithm. univers. ed. Gravesandi, p. 246.

Die Formel des binomischen Lehrsatzes für gebrochne Exponenten giebt den Werth der Wurzeln bis zu jeder verlangten Gränze, auch für den Quotienten der Einheit durch die Wurzel dividirt. Sie erfordert zur schnellern Convergenz oft einige Vorbereitung, die bey Näherungsformeln auch nöthig zu seyn pflegt.

Cubikwurzel aus dem Binomium $A + \sqrt{B}$ ist einer der drey gleichen Factoren desselben von eben der Form, wofern es einen solchen giebt. Die Erfindung dieser Wurzel hängt von der Auflösung einer cubischen Gleichung ab.

Es sey $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = (p + \sqrt{q}) \cdot \sqrt[3]{\alpha}$, so ist $A = p^3\alpha + 3pq\alpha$; und $\sqrt{B} = (3p^2\sqrt{q} + q\sqrt{q})\alpha$, weil die Irrationale $\sqrt{B}$ nur einer Größe von derselben

Form gleich seyn kann. Daher ist auch
$A - \sqrt{B} = (p - \sqrt{q})^3 \alpha$, eben so wie $A + \sqrt{B} = (p + \sqrt{q})^3 \alpha$ ist. Die Multiplication beider Gleichungen giebt $A^2 - B = (p^2 - q)^3 \alpha^2$. Folglich ist $\frac{A^2 - B}{\alpha^2}$ ein Cubus mit einer rationalen Wurzel, wenn p und q rational sind. Ist $A^2 - B$ ein solcher Cubus, so setze man $\alpha = 1$; ist jenes nicht, so hat man α so zu nehmen, daß $\frac{A^2 - B}{\alpha^2}$ eine rationale Cubikwurzel erhalte.

Man setze $\frac{A^2 - B}{\alpha^2} = n^3$, so ist $n = p^2 - q$, und $q = p^2 - n$. Diesen Werth von q setze man in dem Werthe von A, so wird erhalten

$$A = 4p^3\alpha - 3np\alpha.$$

Hat diese Gleichung eine rationale Wurzel, so läßt sich die Cubikwurzel aus $A + \sqrt{B}$, worin A und B rational sind, durch eine Größe von derselben Form, $(p + \sqrt{q})\sqrt[3]{\alpha}$, die nur, wenn es nöthig ist, die Cubikwurzel aus α enthält, darstellen. Die Gleichung hat, wegen ihrer Coefficienten, nur eine mögliche Wurzel, wie es die Sache selbst ergiebt.

Exempel. Die Cubikwurzel aus $2 \pm \sqrt{5}$ ist $= \frac{1}{2}(\pm\sqrt{5})$. Die Cubikwurzel aus $5 \pm 3\sqrt{3}$ ist $= (1 \pm \sqrt{3}.\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Stifel giebt in seiner Ausgabe von der Coß Christophs Rudolphs (S. 815.), zwey Regeln zur Ausziehung der Cubikwurzeln aus einem Binomium von obiger Form, und noch eine für den Fall, da beide Theile irrationale Quadratwurzeln sind. Er hat sie aus der Synthesis eines Cubus, dessen Wurzel eine solche Form hat, hergeleitet. Zum Beyspiel, wie algebraische Regeln in jener Zeit vorgetragen wurden, setze ich die erste mit

Stifels eigenen Worten her. Das gegebene Binomium ist $45 \pm \sqrt{1682}$. „Subtrahir die quadrata der zweyer teyl von einander (als 1682 von 2025) und auſs dem reſiet extrahir radicem cubicam (als auſs 343 kompt 7) und zu der cubicwürtzel ſuch ein Zal, die zu ihr addiret gebe ein quadrat zal (als zu 7 addir 2. facit 9) doch alſo das die ſelbige addirete zal müge dividiren das quadrat deſs Surdiſchen teyls, das ein quadrat zal komme (als 2 dividiret 1682 alſo) ſo iſt denn radix quadrata deſs aggregats, der erſte teyl der cubic würtzel (als $\sqrt{9}$ das iſt 3) und radix quadrata der gefundnen zal iſt der kleyner teyl (als $\sqrt{2}$.) iſt alſo die gantze radix gefunden."

Cubirung der Körper (Cubatio) iſt die Vergleichung ihres Inhalts mit einem gegebenen Körper, als mit einem Würfel, einem Cylinder, einer Kugel von beſtimmter Größe.

Prismen, Pyramiden, Cylinder und Kegel zu cubiren lehrt die Elementar-Geometrie. Das Verhältniß eines Prisma zu einem Würfel wird zuſammengeſetzt aus dem Verhältniſſe ihrer Grundflächen und Höhen. Eine Pyramide iſt der dritte Theil eines Prisma, deſſen Grundfläche ſo groß iſt als die Grundfläche jener, und das gleiche Höhe mit ihr hat. Cylinder laſſen ſich unmittelbar nur mit Cylindern vergleichen, doch auch mit Prismen oder einem Würfel, wenn man ſich die Kreisfläche in ein Dreyeck oder Quadrat verwandelt gedenkt. Ein Kegel iſt der dritte Theil eines Cylinders mit derſelben Grundfläche und Höhe.

Archimedes war es, der die Kugel, das Sphäroid und das paraboliſche Konoid, auch ihre Abſchnitte zu cubiren lehrte. Sein ſcharfſinniges Verfahren zeigen ſeine beiden Bücher von der Kugel und dem Cylinder, und das Buch von den Konoiden und Sphäroiden. Vor der Erfindung der ietzigen Infiniteſimal-Rechnung wurden mancherley Körper cubirt, und zwar durch Summirungen von Reihen der Potenzen, wenn die parallelen Schnitte ſich wie Potenzen ihrer Abſtände von dem Scheitel verhielten, oder in Theile zerlegt werden konnten, die ſich wie Potenzen ver-

halten. So verfuhren Cavaleri und Wallis. Die neuere Infinitesimal-Rechnung ist auf diese Arten von Körpern nicht eingeschränkt, und bedient sich auch keiner Summirung.

In der Ebene der krummen Linie AMS (Fig. 89. Tab. VI.) ist die gerade Linie AX gezogen. Eine unbestimmte Abscisse auf derselben ist $AP = x$, die zugehörige normale Ordinate $PM = y$. Indem sich AS um AX dreht, beschreibt die ebene Figur APM einen runden Körper, dessen Inhalt aus der Gleichung zwischen den Coordinaten gefunden werden soll. Man nehme noch ein Paar Coordinaten AQ, QN, und setze $AQ = x + \Delta x$; $QN = y + \Delta y$. Der von APM durch eine volle Umdrehung beschriebene Körper sey $= Z$, der von AQN beschriebene $= Z + \Delta Z$, die von PM und QN beschriebenen Kreisflächen sind πyy und $\pi (y + \Delta y)^2$, der zwischen beiden enthaltene Abschnitt ist ΔZ. Nun ist $\Delta Z > \pi yy . \Delta x$, und $\Delta Z < \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$; wenn nämlich NQ größer als MP ist, sonst umgekehrt. Oder: $\frac{\Delta Z}{\Delta x} > \pi yy$, und $\frac{\Delta Z}{\Delta x} < \pi (y + \Delta y)^2$. Der Differential-Quotient, der von den Veränderungen Δx, Δy, ΔZ, unabhängig ist, ist $\frac{dZ}{dx} = \pi yy$.

Demnach ist das Differential eines runden Körpers $dZ = \pi yydx$, und $Z = \pi \int yydx$, wo das Integralzeichen keine Summe bedeutet. Es ist also nur nöthig, yy durch x auszudrucken, oder auch dx durch dy mit einer Function von y verbunden.

I. Es sey AM eine Parabel, deren Gleichung ist $ax = yy$. Also ist $dZ = \pi axdx$, und $Z = \frac{1}{2} \pi xyy$. Die Const. ist hier, wie allemahl, Null, wenn in allen Theilen des Integrals die Abscisse x enthalten ist. Das Konoid ist halb so groß als der Cylinder, dessen Halbmesser die Ordinate PM, und Höhe die Abscisse AP ist.

Es verhält sich zu dem Kegel über derselben Grundfläche von derselben Höhe wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$.

II. Es sey wieder um AMS eine Parabel. Sie drehe sich um die durch den Scheitel A auf AX senkrechte AR, wodurch ein kegelartiger Körper mit einer concaven Oberfläche entsteht, dessen Grundfläche der von MR, einer mit AP parallelen Linie, als Halbmesser beschriebene Kreis ist. Hier ist $dZ = \pi xx dy$, wenn die Ordinate MR durch x und die Abscisse AR durch y bezeichnet werden, um die Symbolen der Linien nicht zu ändern. Für x^2 der gehörige Werth gesetzt, ist $dZ = \frac{\pi y^4}{aa} dy$; also $Z = \frac{\pi y^5}{5aa} = \frac{1}{5}\pi xxy$. Dieses Konoid verhält sich zu dem Kegel über derselben Grundfläche und von derselben Höhe wie 3 : 5.

Anders: es ist $\sqrt{ax} = y$ oder $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, also $\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = dy$, und $dZ = \frac{1}{2}\pi a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$. Daher $Z = \frac{1}{5}\pi a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}\pi x^2 y$.

III. Es sey AMS (Fig. 90.) eine Hyperbel, deren Scheitel A, Mittelpunct C ist, die Abscissenlinie liegt in der Verlängerung von CA. Die halbe Hauptaxe sey $= a$; die Nebenaxe $= b$; die Coordinaten $AP = x$, und $PM = y$. Die Gleichung für die Hyperbel ist:

$\frac{bb}{aa}\, 2ax + xx) = yy$. Also ist . . . . .

$dZ = \frac{\pi bb}{aa}(2ax + xx) dx$; Folglich . . .

$Z = \frac{\pi bb}{aa}(ax^2 + \frac{1}{3}x^3) = \frac{\pi bbx}{3aa}(3ax + xx)$

$= \frac{\pi xy^2}{3} + \frac{\pi bbxx}{3a}$. Der erste Theil ist der von

dem Dreyecke APM beschriebene Kegel, der zweyte Theil also der Körper, welchen das Segment AM beschreibt.

Es verhält sich der konoidalische Abschnitt zu dem Kegel, wie $3a + x : 2a + x$. So vergleicht Archimedes beide Körper.

IV. Es sey CR senkrecht auf AC, und MQ parallel mit AC. Die Hyperbel drehe sich um CR. Es soll der Inhalt des von der Figur CAMQ beschriebenen, cylinderartigen Körpers (Cylindroides) gefunden werden. Es sey $QM = CP = u$, $CQ = MP = y$, so ist $b^2u^2 = a^2y^2 + a^2b^2$, und $dZ = \pi u^2 dy$ . . .

$$= \frac{\pi aa}{bb}(y^2 + b^2)dy, \text{ also ist } Z = \frac{\pi aa}{bb}(\tfrac{1}{3}y^3 + b^2y)$$

$$= \frac{\pi aay}{3bb}(y^2 + 3b^2) = \tfrac{2}{3}\pi a^2 y + \tfrac{1}{3}\pi u^2 y.$$ Der erste Theil ist Zweydrittheil des Cylinders, welchen das Rechteck CALQ um CQ beschreibt, der zweyte Theil gleich dem von dem Dreyeck CQM beschriebenen Kegel.

Oder $Z = \pi a^2 y + \frac{1}{3}\pi y(u^2 - a^2)$, wo der erste Theil der von dem Rechteck CALQ beschriebene Cylinder ist.

V. Es ist AMS (Fig. 91.), eine Hyperbel, CT eine ihrer Asymptoten, um welche sich der Schenkel AS drehet. Man suche den Inhalt des von AEPM beschriebenen Körpers, wo AE und MP senkrecht auf die Asymptote stehen. Es sey durch A auf AC, die senkrechte BAb, welche die Asymptote CT in B, und die andere Asymptote Ct in b schneide, so ist $AB = b$. Die Linie CB sey $= 2c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Man ziehe AD parallel mit Ct, so ist $CD = \frac{1}{2}CB = c$, und auch $AD = c$. Ferner ziehe man MQ parallel mit AD, so ist aus der Natur der Hyperbel: $CD \times AD = CQ \times QM$.

Der Winkel BCb sey $= \alpha$, so ist $QM = \frac{PM}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$;

Ferner $PQ = \frac{PM}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{y}{\text{tang}\,\alpha}$. Jene Gleichung verwandelt sich also in diese: $c^2 = (x - \frac{y}{\text{tang}\,\alpha})\frac{y}{\sin\alpha}$, oder, $c^2 . \sin\alpha^2 = xy\sin\alpha - y^2\cos\alpha$. Es ist $c . \sin . \alpha = AD . \sin ADE = AE$. Setzt man $AE = e$, so ist

$$e^2 = xy\sin\alpha - y^2\cos\alpha;$$

$$\frac{e^2}{y\sin\alpha} + \frac{y\cos\alpha}{\sin\alpha} = x.$$

Das Differential des von AEPM beschriebenen Körpers Z ist $dZ = \pi y^2 dx$, also $dZ =$ . . . . $\pi\left(\frac{y^2\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{e^2}{\sin\alpha}\right) dy$. Folglich $Z = \text{Const.} - \frac{\pi y}{3\sin\alpha}(3e^2 - y^2\cos\alpha)$. Es ist $Z = 0$, wenn $y = AE = e$ ist. Daher ist . . . . .

$$\text{Const.} = \frac{\pi e^3(3 - \cos\alpha)}{3\sin\alpha}, \text{ und}$$

$$Z = \frac{\pi}{3\sin\alpha}((3 - \cos\alpha)e^3 - 3e^2y + y^3\cos\alpha).$$

Der ganze ins Unendliche fortgesetzte Körper, dessen Axe die Asymptote von E an ist, ist $= \frac{\pi(3 - \cos\alpha)}{3\sin\alpha} e^3$, oder die Constans.

Für die gleichseitige Hyperbel, an welcher $AB = AC$; $\alpha = 90°$, und $c = e$ ist, ist $Z = \pi c^2(c - y,)$ und der ganze Körper von E an ist $= \pi c^3$.

Torricelli hat diesen Körper schon betrachtet, und nennt ihn solidum hyperbolicum acutum. Eine ausführliche Untersuchung desselben steht in seinen Operibus geometricis. Er vergleicht den Inhalt des

Stückes PMST mit einem Cylinder und einem Kegel.

Es ist Solidum PMST $= \frac{\pi}{3 \sin \alpha}(3 e^2 y - y^3 \cos \alpha)$ $= \pi y^2 (x - y \cot \alpha) - \frac{1}{3} \pi y^2 . y \cot \alpha$. Der erste Theil ist ein Cylinder, der zweyte ein Kegel.

VI. Es sey SAS (Fig. 92.) der Schnitt eines parabolischen Konoids durch die Axe AX, also eine Parabel; und MN der Durchschnitt der Ebene SAS mit einer andern schneidenden Ebene, auf welche SAS senkrecht ist. Der Durchschnitt der durch MN gelegten Ebene mit der Oberfläche des Konoids ist eine Ellipse, deren große Axe $=$ MN, und kleine $=$ MP $+$ NQ ist, wenn MP und NQ senkrechte auf AX sind, (s. Konoid). Durch die Mitte O von MN ziehe man eine Parallele BZ mit der Axe AX, so halbirt diese alle mit MN parallele Chorden. Der Parameter zu dem Durchmesser BZ sey $= b$; BO $= t$, OM $=$ ON $= u$, so ist $bt = uu$, (s. Parabel). Die Fläche der Ellipse verhält sich zu der Fläche des Kreises mit dem Durchmesser MN, wie ihre kleine Axe zu der großen, also wie MP $+$ NQ : MN. Der Winkel BOM sey $= \varphi$, so ist dieses Verhältniß $= \sin \varphi : 1$. Die Fläche der Ellipse ist also $\pi u^2 \sin \varphi$. Der Abschnitt des Konoids, zwischen dem Scheitel des Durchmessers B und dem Schnitt durch MN, sey Z, so ist die Veränderung ΔZ desto näher dem Parallelepipedum $\pi u^2 \sin \varphi . \sin \varphi \Delta t$, wo $\sin \varphi \Delta t$ die Höhe desselben ist, je kleiner Δt genommen wird, und es ist die Gränze des Quotienten $\frac{\Delta Z}{\sin \varphi \Delta t} = \pi u^2 \sin \varphi$, oder $dZ = \pi u^2 \sin \varphi^2 dt$.

Da $bt = u^2$ ist, so ist $dZ = \pi b t \sin \varphi^2 dt$, also $Z = \frac{1}{2} \pi b t^2 \sin \varphi^2$, oder $Z = \frac{1}{2} \pi t u^2 \sin \varphi^2$. Man bilde sich über dem elliptischen Schnitte durch MN einen Cylinder und einen Kegel, deren Axen den Winkel BOM mit der Grundfläche machen, und gebe der Axe die Länge BO oder t, so ist das schiefe Konoid

über jener Grundfläche die Hälfte des elliptischen Cylinders, und $\frac{2}{3}$ des elliptischen Kegels. Denn der Cylinder ist $= \pi u^2 \sin\varphi \times t \sin\varphi$, wo der erste Factor die Grundfläche, der zweyte die Höhe ist. Der Kegel ist $\frac{1}{3}$ des Cylinders.

VII. Es sey SAS (Fig. 93.) der Schnitt eines hyperbolischen Konoids durch die Axe, also eine Hyperbel, und MN der Durchschnitt der Ebene SAS mit einer andern schneidenden Ebene, auf welche SAS senkrecht ist. Der Durchschnitt der durch MN gelegten Ebene mit der Oberfläche des Konoids ist hier eine Ellipse, da der Schnitt eine ringsum begränzte Figur ist. (s. Konoid). Die große Axe derselben ist MN. Der Werth derselben so wie der Werth der kleinern Axe werden durch die beiden Axen der Hyperbel, und durch AP, PM, und den Winkel MRA des Schnittes mit der Axe gegeben (s. e. das.). Das Verhältniß der beiden Axen ist für alle parallele Schnitte dasselbe. Nämlich, wenn die beiden Axen der Hyperbel sind, 2a und 2b, und der Winkel MRA des Schnittes mit AX $= \varphi$, die große Axe des elliptischen Schnittes $= 2f$, die kleine $= 2g$, so ist $\sin\varphi^2 - \frac{bb}{aa}\cos\varphi^2 = \frac{gg}{ff}$. Diesen Quotienten bezeichne man durch m^2. Durch die Mitte O von MN, und durch den Mittelpunct der Hyperbel C ziehe man die Linie COZ, so ist diese ein Durchmesser für alle mit MN parallele Chorden (s. Ellipse), der Scheitelpunct ist B. Die Gleichung zwischen den Coordinaten BO und OM oder ON ist eine ganz ähnliche, wie die für Abscissen auf dem Hauptdurchmesser für normale Coordinaten. Es sey CB $= \alpha$, der halbe conjugirte Durchmesser $= \beta$; BO $= t$, OM $= u$, so ist $u^2 = \frac{2\beta\beta}{\alpha} t + \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} t^2$. Es ist 2u die große Axe des elliptischen Schnittes in dem Konoid, und die kleine $= mu$, wo m den vorhergehenden angeführten Werth

hat. Die Fläche des elliptischen Schnittes ist $\pi m u^2$, da πu^2 die Fläche des Kreises mit dem Halbmesser u ist.

Nun sey der Abschnitt des Konoids zwischen B und der durch M N gelegten, auf SAS senkrechten Ebene $= Z$, und der Winkel $BOM = \omega$, so ist $dZ = \pi m u^2 . \sin\omega . dt =$

$$\pi m \sin\omega \left(\frac{2\beta\beta}{\alpha} t + \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} t^2 \right) dt \text{ also}$$

$$Z = \pi m t \sin\omega \left(\frac{\beta\beta}{\alpha} t + \frac{\beta\beta}{3\alpha\alpha} t^2 \right).$$

$$\text{Da } \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} = \frac{u^2}{2\alpha t + t^2} \text{ ist, so ist}$$

$$Z = \tfrac{1}{3} \pi m u^2 t \sin\omega . \frac{3\alpha + t}{2\alpha + t}.$$

Der Inhalt eines Kegels, über dem elliptischen Schnitte als Grundfläche, mit der Axe BO, und dem Neigungswinkel BOM derselben gegen die Grundfläche ist $= \frac{1}{3}\pi m u^2 t \sin\omega$. Es verhält sich also der schiefe Abschnitt des hyperbolischen Konoids zu diesem Kegel wie $3\alpha + t : 2\alpha + t$. Archimedes hat schon eben diese Vergleichung gemacht, in dem Buche von Konoiden und Sphäroiden, 28. Satz. Die Vergleichung des schiefen Abschnitts eines parabolischen Konoids mit einem Kegel, der dieselbe Grundfläche und Höhe mit dem Abschnitte hat, macht er das. im 24sten Satze.

Die Cubirung der Kugel und der Sphäroiden und ihrer Abschnitte, in den Artikeln: Kugel und Sphäroid.

VIII. Zur Übung diene noch die Cubirung der Cissoide. Die Cissoide AMDM (Fig. 71. Tab. V.) drehe sich um den Durchmesser des Kreises AB als Axe. Man sucht den von dem Trilineum APM beschriebenen Körper.

Es ist die Absciſſe $AP = x$, die Ordinate

PM = y, und die Gleichung für dieselben, $x^3 = (a-x)y^2$, also $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$. Diese gebrochne Function verwandle man (Integralformel. Anmerk. bey 7.) in diese, $\frac{a^3}{a-x} - x^2 - ax - a^2$, so daß $y^2 dx = \frac{a^3 dx}{a-x} - x^2 dx - ax dx - a^2 dx$. Nun ist $\int y^2 dx = \text{Const.} - a^3 \log. \text{nat.} \frac{a-x}{\text{const.}} - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} ax^2 - a^2 x$. Dieses Integral ist = o, wenn $x = o$ ist. Daher ist die algebraische Const. = o, und in der Zahl zu dem Logarithmen ist Const. = a. Also ist der cissoidalische Körper, $Z = \int \pi y^2 dx = \pi (a^3 \log \frac{a}{a-x} - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} a x^2 - a^2 x)$.

Wenn x = a gesetzt wird, so giebt die Formel den Inhalt des von der ins Unendliche sich erstreckenden Figur ABTm um AB beschriebenen Körpers. Dieser ist unendlich, da $\log \frac{a}{o} = \log$ infin. eine unendlich große Größe ist. Sie ist unter allen Unendlichen die kleinste.

IX. Den Körper zu cubiren, der durch die Umdrehung eines Kreissegments um seine Chorde entsteht.

Es sey AB eine Chorde in dem Kreise, der aus C mit dem Halbmesser CD beschrieben ist; dieser sey auf AB senkrecht, und schneide sie in E, das kleinere Segment drehe sich um AB. Man ziehe FCG parallel mit AB, und NPM senkrecht auf beide. Es sey $CD = a$, $CE = b$; $EB = c$; $EP = x$, $PM = y$, so ist $(b+y)^2 + x^2 = a^2$. Das Solidum

zwischen dem Kreise mit ED und dem unbestimmten mit PM sey Z, so ist $dZ = \pi yy\,dx$. Nun ist $(b+y)\,dy = -x\,dx$, also ist

$$dZ = -\frac{\pi(b+y)y^2\,dy}{\sqrt{(a^2-(b+y)^2)}}.$$

Man setze $b+y=z$, d. i. $NM = z$, so ist $y^2 = z^2 - 2bz + b^2$, und

$$dZ = -\frac{\pi(z^3-2bz^2+b^2z)\,dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}}.$$

Es ist (Integralformel 40, 39.)

$$\int\frac{z^3dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = Const. - \tfrac{1}{3}(2a^2+z^2)\sqrt{(aa^2-z^2)};$$

$$\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = Const. + \tfrac{1}{2}a^2 \,Ang\sin\frac{z}{a} \ldots\ldots - \tfrac{1}{2}z\sqrt{(a^2-z^2)}$$

$$\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = C - \sqrt{(a^2-z^2)}.$$

Folglich ist

$$Z = Const. + \pi(\tfrac{1}{3}z^2 - bz + \tfrac{2}{3}a^2 + b^2)\sqrt{(a^2-z^2)} + \pi a^2 b\,Ang\sin\frac{z}{a}.$$

Da $Z = 0$ für $z = a$, so ist $Const. = -\frac{1}{2}\pi^2 a^2 b$. Den ganzen Körper M, der durch die Umdrehung von ADBA um AB entsteht, zu erhalten, setze man $z=b$ für $y=0$, und multiplicire auf beiden Seiten mit 2,

so ist $M = \frac{2}{3}\pi(2aa+bb)c - 2\pi a^2 b\,Ang.\cos\frac{b}{a}$.

Es ist nämlich $a^2 - b^2 = c^2$, und $\frac{1}{2}\pi - Ang.\sin\frac{b}{a}$

$= Ang.\cos\frac{b}{a}$.

X. Man kann dasselbe noch bequemer folgendergestalt finden. Da $(b+y)^2 = b^2 + 2by + y^2$ ist, so ist $b^2 + 2by + y^2 + x^2 = a^2$, also $y^2 = a^2 - b^2 - x^2 - 2by$, und

$$y^2 dx = (a^2 - d^2) dx - x^2 dx - 2 dy dx;$$

$$\int y^2 dx = (a^2 - b^2) x - \tfrac{1}{3} x^3 - 2b \int y dx.$$

wo Const. = o, und $\int y dx$ die Area EPMD ist. Für $x = c$ ist der algebraische Theil des Integrals $= (a^2 - b^2) c - \tfrac{1}{3} c^3 = \tfrac{2}{3} c^3$. Für eben diesen Werth von x ist $\int y dx =$ Sect. BCD — ΔBCE

$= \tfrac{1}{2} a^2 \text{ Arc. cos } \frac{b}{a} - \tfrac{1}{2} bc$, wo Arc. cos. $\frac{b}{a}$ zu dem Halbmesser, der der Einheit gleich ist, gehört. Demnach ist, für $x = c$,

$$Z = \pi \left(\tfrac{2}{3} c^3 + b^2 c - a^2 b \text{ Arc. cos } \frac{b}{a}\right)$$

$$= \pi \left(\tfrac{2}{3} a^2 + \tfrac{1}{3} b^2\right) c - \pi a^2 b \text{ Arc. cos } \frac{b}{a},$$

und der ganze Körper

$$M = \tfrac{2}{3} \pi (2a^2 + b^2) c - 2\pi a^2 b \text{ Arc. cos. } \frac{b}{a},$$

wie vorher. Die Ausdrücke Ang. cos $\frac{b}{a}$, und Arc. cos. $\frac{b}{a}$ sind ganz gleichgültig.

Kepler hat schon den Inhalt dieses Körpers gefunden in der Stereometria doliorum. Hernach hat Cavaleri auf eine andere Art denselben herausgebracht, in der Geometria indivisibilibus continuorum, pag. 100. Man sehe Montucla hist. des Mathém. T. II. p. 30, 40. Die Dissertation von Pfleiderer: Kepleri methodus solida quaedam sua dimetiendi illustrata. Tubingae 1795.

Cavaleri vergleicht den Körper, welchen das Kreis-

Segment beschreibt, mit dem Cylinder, dessen Halbmesser ED und Höhe AB ist. Der Inhalt dieses Cylinders ist $= 2\pi (a-b)^2 c$. Man nehme eine Linie f, so daß $(a-b)c$ area $EDB = b : f$, so verhält sich jener Körper zu dem Cylinder, wie $2(a+b-3f) : 3(a-b)$. Dieses ist das Verhältniß, welches Cavaleri a. a. O. angiebt.

Die Cubirung der Conchoide s. in dem Artikel: Conchoide.

Cubisch, was eine Beziehung auf einen Cubus oder eine Cubikwurzel hat.

Cubische Gleichung ist, worin die unbekannte Größe bis auf die dritte Potenz steigt. Ihre Auflösung in dem Artikel: Gleichung. III.

Cubische Hyperbel ist eine Linie vom dritten Grade, deren Gleichung ist $xy^2 = a^3$. Sie hat zwey Asymptoten, parallel mit den Richtungen der Coordinaten, wie die gemeine Hyperbel, wenn diese durch die Gleichnng $xy = a^2$ dargestellt wird; aber beide Theile der cubischen Hyperbel liegen in den Nebenwinkeln der Asymptoten, nicht in den Scheitelwinkeln. Die Ordinaten y nähern sich der Asypmtote auf der Abscissenlinie unendlich weniger als die Ordinaten an der gemeinen Hyperbel, da an jener ist $y = \frac{a^3}{xy}$, an dieser $y = \frac{a^2}{x}$. Nimmt man x für die Ordinate, so nähert sich diese der mit den y parallelen Asymptote unendlich mehr als die Ordinaten an der gemeinen Hyperbel sich der Asymptote auf der Abscissenlinie nähern. Die krumme Linie ist die 65ste Species bey Newton. Man gebraucht sie, um einen geringern oder größern Grad der Annäherung einer krummen Linie an ihre Asymptote, als die gemeine Hyperbel giebt, durch sie darzustellen, indem man sie selbst als Asymptote jener, welche ihr aber sehr nahe kommt, betrachtet.

Cubische Parabel ist eine Linie vom dritten Grade. Es sind zwey Arten derselben. Die Gleichung

für die erste ist $aax = y^3$, für die zweyte $axx = y^5$. An jenen sind für entgegengesetzte gleiche Abscissen x die Ordinaten y gleich und entgegengesetzt; an dieser sind sie gleich und gleichnamig. Jene liegt theils über, theils unter der Abscissenlinie; diese mit beiden Schenkeln auf derselben Seite der Abscissenlinie. Für die Apollonische Parabel ist $ax = y^2$. Da an der erstern Gattung der cubischen ist $\frac{a}{y} \cdot ax = y^2$, so sind ihre unendliche Ordinaten gegen die an der gemeinen Parabel unendlich klein. Da an der zweiten cubischen Parabel ist $\frac{x}{y} \cdot ax = y^2$, und ein unendliches x gegen y unendlich groß ist, so sind die unendlichen Ordinaten gegen die an der gemeinen Parabel unendlich groß. Man kann dadurch in manchen Fällen die Beschaffenheit der Schenkel einer krummen Linie für unendliche Coordinaten ausdrucken, wo es durch die gemeine Parabel nicht geschehen kann. Wallis nennt die cubische Parabel der ersten Gattung Paraboloeides cubicalis, die von der zweyten, Paraboloeides semicubicalis. (Opp. Vol. 1. p. 350; 551.) Diese zweite heißt auch die Neilische Parabel. Sie ist die erste krumme Linie, deren Rectification gefunden ist. Die erstere hat Wallis ganz falsch vorgestellt, da er ihre beiden Schenkel an entgegengesetzten Seiten der Abscissen nach derselben Gegend hin sich erstrecken läßt. Von der zweiten hat er nur einen Schenkel gezeichnet.

Newton nennt die krumme Linie, deren Gleichung ist, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, eine cubische Parabel. Sie begreift die obige erstere in sich, wenn x und y vertauscht werden. Newt. enum. lin. tert. ord. XXVIII.

Cubische Elliptois nennen einige die krumme Linie, deren Gleichung ist $ay^3 = bx^2(a - x)$. Diese aber weicht ganz von der Form einer Ellipse ab, da sie zwei unendliche Schenkel hat. Wolfii elementa Analys. Finit. §. 522.

Cubo-Cubus ist der Cubus eines Cubus, oder die sechste Potenz einer Zahl.

Cubus, Würfel, ist erstlich ein Körper, der zwischen sechs gleichen Quadraten als Seitenflächen eingeschlossen ist, die gewöhnliche Einheit zur Vergleichung und Messung der Körper. Zweitens ist es ein Product aus drei gleichen Factoren. Ein solcher Factor sey $= a$, so ist der Cubus $= aaa$, oder a^3. Weil der geometrische Cubus einen kleinern so oft enthält, als die Cubikzahl des Quotienten der Seiten die Einheit, so ist daher das Product dreyer Factoren ein Cubus, ein Würfel, eine Würfelzahl genannt. Im Deutschen möchte man Cubus für das arithmetische Product behalten, und den geometrischen Körper Würfel nennen, da man Cubiren, Cubikwurzel, Cubiktafeln, im arithmetischen Verstande nimmt. Nur ist es ungewöhnlich im Plural die Cuben zu sagen, und lateinisch zu flectiren ist unbequem.

Die Wurzel sey zweytheilig, $= a + b$, so ist $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Hierauf beruht die Synthesis oder Zusammensetzung des Cubus einer Zahl aus ihren dekadischen Theilen. Soll z. B. der Cubus von 47862 gemacht werden, so nimmt man zuerst den Cubus von 47, wo $a = 40$ und $b = 7$ ist. Dann setzt man den Cubus von $470 + 8$ aus seinen Theilen zusammen ($a = 470$; $b = 8$); dann den Cubus von $4780 + 6$, ferner den Cubus von $4786 + 2$, u. s. w. wenn noch mehr Ziffern vorhanden sind. Jedesmahl werden zu dem gefundenen Cubus die Producte $3a^2b$; $3ab^2$; b^3 gesetzt, von welchen die niedrigste Ziffer eine Stelle niedriger steht, als die niedrigste der vorhergehenden, und so auch $3a^2b$ in Absicht auf a^3, wenn nämlich die Zahl a als schlechte Einer, nicht als Zehner betrachtet wird. In eben der Ordnung, wie die Theile des Cubus zusammengesetzt sind, werden sie bey der Ausziehung der Wurzel wieder abgezogen.

Die Wurzel habe die Form, $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + gz^6 +$ etc. so ist der Cubus =

$$a^3 + 3a^2bz + (3a^2c + 3ab^2)z^2$$
$$+ (3a^2d + 6abc + b^3)z^3$$
$$+ (3a^2e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2c)z^4$$
$$+ (3a^2f + 6abe + 6acd + 3b^2d + 3bc^2)z^5$$
$$+ (3a^2g + 6abf + 6ace + 3ad^2$$
$$+ 3b^2e + 6bcd + c^3)z^6$$
$+$ etc.

Die Combinationen in den Coefficienten von z stehen in der 2ten bis 4ten Spalte der Tafel, S. 461. Wenn $z = \frac{1}{10}$ ist, und b, c, d, etc. ganze Zahlen unter 10 sind, so ist $a + bz + cz^2 +$ etc. eine ganze Zahl mit einem anhangenden Decimalbruche. S. Polynomischer Lehrsatz, und combinatorische Analysis, 35.

Dieser Formel kann man sich bequem bedienen, die Cubikwurzel aus einer Zahl auszuziehen. Die Zahl sey N; die der Cubikwurzel nächste, kleinere, ganze Zahl sey a. Ist diese bekannt, so sind die Coefficienten von z alle gegeben, daher die Coefficienten b, c, d etc. in der Wurzel nach einander gefunden werden. Der Cubus werde der Kürze wegen durch $a^3 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 +$ etc. bezeichnet.

Exempel. Die Cubikwurzel aus 128 zu ziehen. Der nächst kleinere Cubus ist $125 = 5^3$, also $a = 5$; $A = 30$; B, C, etc. $= 0$. oder $A = 0$; $B = 300$; $C = 0$, etc. Da $3a^2b$ oder $75b = 30$ ist, so nehme man $A = 0$, und $b = 0$. Nun ist $3a^2c = 300$, also $c = +4$. Ferner ist C oder $3a^2d = 0$, also, $d = 0$. Weiter ist D oder $3a^2e + 3ac^2 = 0$, also e negativ, weil c zu groß genommen ist. Man kann die negativen Coefficienten sehr leicht in positive verwandeln. Da $75e = -15 \cdot 16 = -240$, so kann man e entweder -3 oder -4 nehmen. Das

letztere wähle man, um wieder einen positiven Werth für f zu erhalten. Zu dem Ende subtrahire man 60 von D, und addire dagegen 600 zu E, oder setze E = 600. Nun ist, da b und d = 0 sind, $3a^2 f = + 600$, also f = + 8. Noch ist F oder $3a^2 g + 6ace + c^3 = 0$, das ist, 75 g − 480 + 64 = 0, daher g = + 5. Die Cubikwurzel aus 128 ist = 5,040085 . .

$$\frac{-\quad 4}{= 5,039685 \,.\,.}$$, wie nach der

Rechnung S. 336, nur daß die sechste Decimalziffer um Eins, aber nicht völlig, zu groß ist. Dieses Exempel wird dadurch sehr leicht, daß b = 0 ist. In allen Fällen ist diese Methode leichter und kürzer als die, welche in den Lehrbüchern vorgetragen wird.

Man kann, nachdem einige Ziffern der Ergänzung der Wurzel gefunden sind, diese zu der Zahl a setzen, und die nähere Wurzel statt der erstern a gebrauchen. Durch Multiplication oder Division der vorgegebenen Zahl mit 1000 oder einer Potenz davon kann man in a so viele Ziffern, als man will, bringen.

Curva, s. krumme Linie.

Cykloide, Radlinie, (Trochoides, Roulette,) ist eine transscendente krumme Linie, welche von einem Puncte auf dem Umfange eines Kreises beschrieben wird, indem der Kreis auf einer geraden Linie, in der Ebene durch dieselbe und seinen Mittelpunct, mit einer wälzenden Bewegung geführt wird, so daß der Bogen zwischen jenem fixen Puncte, und dem veränderlichen Berührungspuncte mit der geraden Linie immer dem auf dieser Linie zurückgelegten Wege gleich ist. Ein sinnliches Bild giebt ein Nagel eines Wagenrades, der eine Cykloide in der Luft beschreibt. Der Kreis darf nicht vorwärts noch rückwärts gleiten. Nach einem Umlaufe des Kreises ist der auf der geraden Linie zurückgelegte Weg dem Umfange des Kreises gleich.

Es ist nämlich (Fig. 95, Tab. VI.) A a ein Kreis

mit dem Halbmesser K A, welcher die gerade Linie AB in A berührt. In der Ebene KAB werde der Kreis mit einer wälzenden Bewegung um den Mittelpunct auf A B fortgeführt, so daß der Weg KK, den der Mittelpunct K beschreibt, indem der Kreis eine Drehung vollendet, dem Umfange desselben gleich sey. Setzt man A B dem Umfange gleich, so hat der Kreis, wenn er auf B ist, eine Umdrehung gemacht. Der Kreis sey auf irgend einem Puncte N, sein Mittelpunct in G. Setzt man den Bogen N M gleich der geraden A N, so ist der beschreibende Punct in M, und M ein Punct der Cykloide. Es sey D die Mitte von A B, der Mittelpunct des Kreises in C, auf der senkrechten DC, so ist der beschreibende Punct in E auf dem Endpuncte des Durchmessers DCE. Der Punct E heißt der Scheitel der Cykloide, ED die Axe, AB die Basis oder Grundlinie, EeDd der erzeugende Kreis, circulus generator.

Die Cykloide ist eine der merkwürdigsten krummen Linien, wegen ihrer geometrischen sowohl, als wegen ihrer mechanischen Eigenschaften. Sie hat in der Mitte des 17ten Jahrhunderts die Geometer sehr beschäftigt. Vor der Erfindung der neuen Infinitesimal-Rechnung war es sehr schwer, diese Eigenschaften zu entdecken.

In einer Schrift des Cardinals de Cusa (gest. 1464.), worin er von der Quadratur des Kreises handelt, ist eine Figur gezeichnet, die eine Cykloide vorstellen kann, wenn eine Unrichtigkeit in derselben, woran der Abschreiber Schuld seyn kann, verbessert wird. S. Wallis in den Transactionen, Jun. 1697, und Opp. Tom. III. p. 676. Daselbst führt er auch aus einer Schrift des Carolus Bovillus (Charles de Bovelles) an, daß dieser zum Behuf der Quadratur des Kreises einen Kreis auf einer Linie mit einer drehenden Bewegung um den Mittelpunct fortgeführt, und einen Punct des Umfanges eine krumme Linie habe beschreiben lassen. Montucla hat nichts dergleichen gefunden; Kästner auch nicht. Geschichte der Mathem. Th. I. S. 405.

Galilei ist als der erste anzusehen, der die Cykloide geometrisch betrachtet hat. In einem Briefe an Torricelli vom J. 1639 sagt er, daß er diese Linie seit 40 Jahren in Untersuchung gezogen, und sie, wegen ihrer gefälligen Gestalt, zu Gewölbbogen unter Brücken für schicklich erachtet habe; er habe versucht ihren Inhalt zu bestimmen, sey aber nicht damit zu Stande gekommen. Ein französischer Geometer, Roberval, hat im Jahre 1634, nach dem Zeugnisse des Mersenne, den Inhalt der Cykloide mit dem Inhalt des erzeugenden Kreises verglichen, und gefunden, daß jener das dreyfache des letztern ist. Er war zu dieser Untersuchung durch Mersenne veranlaßt, der bey der Betrachtung eines rollenden Rades auf die Entstehung der Cykloide gekommen war, aber jene Aufgabe nicht hatte auflösen können. Roberval hatte Anfangs auch nicht damit fertig werden können. Als Mersenne Robervals Entdeckung dem Descartes meldete, legte dieser eine Aufgabe vor, die berührenden an der Cykloide zu ziehen. Diese war für Roberval zu schwer, aber Fermat lösete sie sehr allgemein auf. Galilei erfuhr um das Jahr 1639 durch Mersenne, daß man sich in Frankreich mit der Cykloide beschäftige, und forderte den Cavaleri auf, den Inhalt der Cykloide zu finden, dem es aber nicht glückte. Nach dem Tode des Galilei (1642) nahmen seine beiden Schüler und Gesellschafter in seinen letzten Jahren die Untersuchung vor. Torricelli fand den Inhalt, Viviani die berührenden. In den geometrischen Werken des erstern (Florentiae 1644) ist ein kleiner Anhang über die Cykloide enthalten, worin drey Beweise des Satzes von dem Inhalt der Cykloide vorgetragen werden Es wird darin auch der andern Gattungen von Cykloiden erwähnt, die ein Punct innerhalb oder außerhalb des sich wälzenden Kreises beschreibt; auch werden Sätze ihren Inhalt und ihre berührenden betreffend mitgetheilt. In Frankreich wollte man Torricelli nicht zugestehen, daß er diese Sätze selbst erfunden hätte. Roberval zeigte sich hierbei sehr leiden-

schaftlich, und Pascal in seiner Histoire de la Roulette zu partheyisch für seinen Landsmann.

Roberval fand nachher den Inhalt der Körper welche die Cykloide durch die Umdrehung um ihre Grundlinie und um ihre Axe beschreibt. Den erstern fand Torricelli auch, den zweyten aber nicht völlig genau.

Im J. 1658 ließ Pascal unter dem Namen, Dettonville, ein Ausforderungs-Schreiben an die Geometer ergehen, worin er ihnen Aufgaben über die Cykloide vorlegte, und dabey zwey Preise aussetzte, einen von 40 Pistolen für denjenigen, der die Auflösungen zuerst einsenden, und 20 Pistolen für denjenigen, der zunächst nach jenem sie einschicken würde. Die Aufgaben waren: zu finden den Inhalt des Abschnittes zwischen dem Scheitel und einer Parallelen mit der Grundlinie; den Schwerpunct dieses Abschnittes; den Inhalt der Körper, die durch die Umdrehung des Abschnitts um die Grundlinie desselben (die Parallele mit der Grundlinie), und um das Segment der Axe von dem Scheitel bis zu dieser Grundlinie entstehen; auch ihre Schwerpuncte; endlich die Schwerpuncte der Theile, worin jene beiden Körper durch eine auf die Drehungsaxe senkrechte Ebene zerschnitten werden. Es liefen nur zwey Preisschriften ein; von dem Jesuiten Lalouere (Lalovera), und dem berühmten Wallis. Die von dem erstern ward für ganz unbefriedigend erklärt; die von Wallis erhielt den Preis auch nicht, weil einige Auflösungen fehlerhaft waren. Die Abhandlung von Wallis über die Cykloide ist in den ersten Theil seiner Werke eingerückt. Wie sie von der Preisschrift verschieden sey, finde ich nicht angezeigt.

Bey dieser Gelegenheit erhielt Pascal noch von einigen vorzüglichen Geometern ihre Entdeckungen über die Cykloide mitgetheilt. Der Ritter Wren in England hatte gefunden, daß die Länge des cykloidalischen Bogens EM von dem Scheitel E an genommen doppelt so groß ist, als die Chorde ER des Bogens ER in dem erzeugenden Kreise ERDE, der von der mit AB parallelen

M Q abgeschnitten wird. Er bestimmte auch die Größe der Oberfläche an den Körpern, die durch Umdrehung der Cykloide um die Grundlinie und um die Axe erzeugt werden. Fermat leistete dieses auch, und theilte zugleich eine allgemeine und schöne Methode zur Complanation der Oberflächen runder Körper mit. Huygens zeigte an, daß er gefunden habe, daß das Segment der Cykloide zwischen dem Scheitel und einer von dem Scheitel um den vierten Theil des Durchmessers entfernten Parallele mit der Grundlinie durch einen geradlinichten Flächenraum sich darstellen läßt. Diese Bemerkung hat, wie Wallis behauptet, auch Wren gemacht.

Pascal gab nun selbst seine Auflösungen der von ihm vorgelegten Aufgaben heraus, unter dem Titel: Lettres de A. Dettonville à Mr. de Carcavi, worin zugleich mehrere seine geometrische Untersuchungen vorkommen.

Huygens entdeckte hernach noch vortreffliche Eigenschaften der Cykloide. Er fand, daß durch die Abwickelung dieser Linie eine ihr gleiche entsteht, und daß ein schwerer Punct, der auf der umgekehrten Cykloide, mit senkrechter Axe, den Scheitel unterwärts, herabfällt, einerley Zeit bis zu dem untersten Puncte, dem Scheitelpuncte, gebraucht, er mag von welchem Puncte es sey, zu fallen anfangen. Wegen dieser Eigenschaft hat die Cykloide den Zunahmen, tautochrona, oder isochrona. Später fand Joh. Bernoulli, daß die Linie, auf welcher ein schwerer Punct von einem gegebenen Puncte zu einem andern gegebenen in einer andern Verticallinie als jener, in der kürzesten Zeit fällt, ein Bogen der Cykloide ist, auf welcher der zweyte Punct der zu unterst gelegte Scheitelpunct ist. Die Cykloide heißt daher brachystochrona. Er bemerkte auch, daß unzählig viele Segmente sich in geradlinichte Figuren verwandeln lassen. Beide Bernoulli (Jakob und Johann) fanden, daß die Brennlinie der Cy-

kloide für Parallelstrahlen mit der Axe, eine Cykloide mit einem erzeugenden Kreise von einem halb so großen Durchmesser als jene ist, (siehe Catacaustica, 12.)

Ein Kreis wälze sich, wie vorher festgesetzt ist, auf einer geraden Linie fort, so daß der zurückgelegte Weg dem Bogen zu dem Drehungswinkel gleich sey, aber der Punct in seiner Ebene, der eine krumme Linie beschreibt, sey innerhalb oder außerhalb des Umfanges, so ist die krumme Linie eine verwandte Gattung von der eigentlichen Cykloide. Liegt der beschreibende Punct innerhalb des ersten Kreises, so ist sie, wie in Fig. 97. eine gedehnte oder geschweifte Cykloide (cycloides prolata, inflexa). Es ist DEF der Kreis, dessen Umfang der Grundlinie AB gleich ist, und e ein Punct innerhalb des Kreises. Dieser beschreibt bey einer Umdredrehung des mit Ce beschriebenen Kreises die Linie aeb, und bey fortgesetzter Wälzung des Kreises DEF auf der verlängerten AB, nach einer wie der andern Gegend, gleiche und ähnliche Portionen einer ins Unendliche sich erstreckenden Linie.

Ist der beschreibende Punct e ausserhalb des sich wälzenden Kreises, DEF, wie in Fig. 98. so beschreibt er eine verkürzte oder verschlungene Cykloide (cycloides curtata, nodata). Auch diese besteht aus unendlich vielen gleichen Theilen, wie aeb, die einen Doppelpunct G haben. In der Figur hat die Hälfte eb nicht ganz Platz gefunden.

Descartes hat schon diese verwandten Gattungen untersucht, und gewiesen, wie die berührenden an ihnen gezogen werden, wie der Wendungspunct an der gedehnten Cykloide, und an der verkürzten der Punct, wo sich die Linie einwärts zu krümmen anfängt, gefunden wird, Epistol. T. III. ep. 57.

Die Cykloide, die hier zuerst beschrieben ist, deren Grundlinie dem Umfange des erzeugenden Kreises gleich ist, heißt im Gegensatze gegen ihre Verwandten Cycloides primaria; sonst schlechtweg Cykloide. Sie besteht

ebenfalls aus unendlich vielen, sich an einander schließenden gleichen Portionen.

Die Cykloiden sind transscendente Linien, da zu einer Abscisse, die auf der Axe ED genommen wird, unendlich viele Ordinaten, parallel mit der Grundlinie, gehören. Die Gleichung für die Coordinaten ist also keine algebraische, die auf irgend einen bestimmten Grad stiege.

In der gedehnten und verkürzten Cykloide wälzt sich der erzeugende Kreis bey jeder ganzen Umdrehung über einer Linie ab, die in jener größer ist, als sein Umfang, in dieser kleiner, obgleich alle Puncte des Kreises sich nach einander auf ab legen. Beide concentrische Kreise DEF und def bringen alle Puncte ihres Umfanges nach einander in dieselbe gerade Linie. Hieraus folgt aber nicht, daß der größere Kreis dem kleinern gleich sey, weil die Linien nicht aus Puncten zusammengesetzt werden müssen. Das Wälzen allein giebt keinen Grund der Gleichheit. Darum ward es bey der eigentlichen Cykloide vorausgesetzt, daß die Grundlinie dem Umfange des erzeugenden Kreises gleich seyn sollte. Der Mittelpunct des wälzenden Kreises kann außer der Bewegung, die von dem Wälzen entsteht, noch eine Bewegung vor- oder rückwärts haben. In dem ersten Falle wird eine gedehnte, in dem andern eine verkürzte Cykloide von einem Puncte seines Umfanges beschrieben. Man setze, daß in Fig. 95. anstatt den Bogen NM der Linie AN gleich zu machen, der Bogen kleiner genommen würde, nur nach einem gegebenen Verhältnisse, so wird von dem Puncte M des wälzenden Kreises eine gedehnte Cykloide beschrieben. Würde aber NM größer als AN, wieder nach einem bestimmten Verhältnisse genommen, so entsteht eine verkürzte Cykloide. Die Schwierigkeit, welche man sich hier machen kann, hat schon Aristoteles in seiner 24sten mechanischen Frage bemerkt, und mehrere Mathematiker haben sie nach ihm zu heben gesucht. Wie Galilei sie gelöset hat, findet man in Kästners Analysis endlicher Größe. §. 601.

Die Cykloide, welche man den Liebling der Mathe-

matiker in 17ten Jahrhundert nennen mag, verdient, daß ihre Eigenschaften hier durch die neuere Infinitesimal-Rechnung entwickelt werden. Sie hat freylich viel an Interesse dadurch verloren, daß diese ihre Untersuchung so leicht macht.

I. In der eigentlichen Cykloide (Fig. 96) sey der Halbmesser des erzeugenden Kreises CD = a; die halbe Grundlinie AD = π a, wenn π den halben Kreisumfang für den Halbmesser als Einheit bezeichnet. Für einen Punct M der krummen Linie seyn die normalen Coordinaten, AP = x; PM = y. Der Mittelpunct des Kreises, auf welchem der Punct M zugleich ist, sey in G, und N der Berührungspunct auf AB, so ist der Bogen MN = AN, nach der Voraussetzung von der Entstehung der Cykloide. Der Winkel MGN sey φ, oder zwey Rechte verhalten sich zu MGN wie $\pi : \varphi$. Also AN = aφ. Man ziehe MF senkrecht auf GN, so ist MF = PN = a sin φ, und MP = FN = a — a cos φ. Folglich ist

$$x = a(\varphi - \sin\varphi),$$

$$y = a(1 - \cos\varphi).$$

Aus diesen Gleichungen φ wegzuschaffen, müßten sin φ und cos φ durch φ ausgedruckt werden, worauf man φ herauszuschaffen hätte. Eine endliche Gleichung würde man aber doch nicht erhalten. Allein diese mühselige Rechnung ist nicht nöthig. Es ist hier, wie mehrmahls der Fall, daß die Relation zweyer Größen mittelst einer dritten, wie hier durch φ, deutlicher dargestellt wird, als durch eine Gleichung zwischen ihnen allein.

II. Man ziehe MQ senkrecht auf die Axe ED, und lasse die Coordinaten EQ = t; QM = u seyn, so ist

$$t = a(1 + \cos\varphi)$$
$$u = a(\pi - \varphi + \sin\varphi);$$

oder, wenn $\pi - \varphi = \omega$ ist,

$$t = a(1 - \cos\omega)$$
$$u = a(\omega + \sin\omega).$$

Es schneide MQ den erzeugenden Kreis ERDE in R, so ist, $MR = a\omega =$ Kreisbogen ER.

III. Die Area APM ist $= a^2 (\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi)$.

Es sey $APM = Z$, so ist $dZ = y\,dx$, (s. Quadratur der krummen Linien). Nun ist dx . . . . $= a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$, also $dZ = a^2(1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi =$

$$a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos\varphi^2)\,d\varphi =$$

$$a^2(\tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi)\,d\varphi.$$

Daraus durch Integration $Z = a^2 (\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi)$, wo die Constans Null ist, (s. Differential-Formeln, 31, woraus umgekehrt die Integrale fließen, und Goniometrie, 36.).

IV. Die Fläche der Cykloide ist $= 3\pi a^2$, oder dreymahl so groß als der Inhalt des erzeugenden Kreises.

Denn wenn PM in DE gesetzt wird, so ist $\varphi = \pi$, und $\sin\varphi = 0$, $\sin 2\varphi = 0$; also die Area ADE $= \frac{3}{2}\pi a^2$, und die Area AEB $= 3\pi a^2$.

V. Die Area EQM ist $= a^2 (\sin\omega\,(1 - \frac{1}{2}\cos\omega) + \omega\,(\frac{1}{2} - \cos\omega))$, oder EQM $=$ . . . . $a^2 (\sin\varphi\,(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi) + (\pi - \varphi)(\frac{1}{2} + \cos\varphi))$.

Sie sey Z, so ist $dZ = u\,dt$. Da $dt = a\sin\omega . d\omega$. ist, so ist

$$dZ = a^2(\omega + \sin\omega)\sin\omega . d\omega.$$

Es ist $\int \omega \sin\omega . d\omega = \sin\omega - \omega\cos\omega$, wie man sich durch die Differentiation versichern kann, und $\int \sin\omega .^2 d\omega = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega)\,d\omega = \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\sin 2\omega = \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\sin\omega . \cos\omega$. Hieraus folgt die angegebene Formel. Der Werth der Area EQM wird auch erhalten, wenn man die Area APM und das Rechteck PMQD von der Area ADE abzieht. Das Rechteck ist $= (\pi a - x)\,y$.

VI. Es werde EC von H halbirt, und die mit der Grundlinie parallele HI gezogen, so ist die Area EHI $= \frac{3}{4} a^2 \sin\omega =$ dem geradlinichten Dreyeck DHh.

Denn da hier $t = \frac{1}{2} a$, so ist $\cos\omega = \frac{1}{2}$, und der zweyte Theil der Area $= 0$, also $Z =$ . . .

$a^2 \sin \omega \, (1 - \frac{1}{2} \cos \omega) = \frac{3}{4} a^2 \sin \omega.$, wo $\omega = 60°$ ist. Die HI schneide den erzeugenden Kreis über ED in h, so ist das geradlinichte Dreyeck $DHh = \frac{3}{4} a^2 \sin \omega$, weil $DH = \frac{3}{2} a$ ist.

VII. Es sey durch den Mittelpunct C (Fig. 95.) die Parallele CL mit der Grundlinie bis an die Cykloide gezogen, und die Chorde EL, das Segment über EL ist $= \frac{1}{2} a^2$.

Denn da hier $x = a$, so ist $\cos \omega = 0$, $\sin \omega = 1$, und $\omega = \frac{1}{2} \pi$; also die Area $ECL = a^2 (1 + \frac{1}{4} \pi)$. Wegen $CL = a (\frac{1}{2} \pi + 1)$, ist das Dreyeck $ECL = \frac{1}{2} a^2 (\frac{1}{2} \pi + 1)$; folglich das Segment $= \frac{1}{2} a^2$.

Leibnitz hat diesen Satz gefunden, Huygens den Satz VI.

VIII. Es werde ES (Fig. 96.) senkrecht auf die Axe ED gezogen, und schneide die verlängerte PM in S, so ist die äußere Area an der Cykloide, ESM $= \frac{1}{2} a^2 (\omega - \sin \omega . \cos . \omega)$, oder ESM $= \ldots$ $\frac{1}{2} a^2 (\pi - \varphi + \sin \varphi . \cos \varphi)$.

Dieses folgt daher, weil das Rechteck EQMS $= a^2 (1 - \cos \omega) (\omega + \sin \omega) = a^2 (\omega - \omega \cos \omega + \sin \omega - \sin \omega . \cos \omega)$ ist. Zieht man davon die Area EQM ab, so erhält man den angegebenen Werth der äußern Area.

Sie ist gleich der Summe des Kreissectors ECR, und des Dreyecks RCQ, oder dem gemischtlinichten Raume RQER.

IX. Die Normale in M (die senkrechte auf die berührende TMt) geht durch den Punct N, wo der erzeugende Kreis die AB berührt, wenn der beschreibende Punct in M ist.

Denn die Subnormale ist $\frac{y\,dy}{dx}$ (berühr. Linie, 42).

Da $dx = a (1 - \cos \varphi) d\varphi$, und $dy = a \sin \varphi . d\varphi$ ist, so ist die Subnormale $= a \sin \varphi$. Es ist aber $PN = MF = a \sin \varphi$, also ist PN die Subnormale, und MN die Normale.

X. Man ziehe durch den Punct D der Axe, und den Punct R, wo die mit AB parallele MQ den Halb-Kreis ERD schneidet, die Linie RD, so ist diese parallel mit der Normale, also ER parallel mit der berührenden TMt.

XI. Der Halbmesser des Krümmungs-Kreises in M ist $= 4a \sin \frac{1}{2}\varphi$.

Es sey $\frac{dy}{dx} = p$, der Halbmesser der Krümmung $= r$, so ist $r = -(1+p^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{dp}$. (Krümmungskreis, 2).

Da $p = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$, so ist $1+p^2 = \frac{2}{1-\cos\varphi}$ $= \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$, also $(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi^3}$.

Es ist ferner $\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \cot\frac{1}{2}\varphi$ (Goniometrie, 38.), also $p = \cot\frac{1}{2}\varphi$, und $dp = -\frac{d\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$, und $\frac{dx}{dp} =$ $-2a(1-\cos\varphi)\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = -4a\sin\frac{1}{2}\varphi^4$, also $r = 4a\sin\frac{1}{2}\varphi$,

Es ist $MN = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi$, also der Halbmesser der Krümmung $= 2MN$.

XII. In dem Scheitel E ist der Krümmungs-Halbmesser $= 4a = 2ED$. Er ändert sich beym Scheitel viel weniger als der Winkel φ, da die Sinus der Winkel nahe an einem Quadranten sich wenig ändern in Vergleichung mit den Veränderungen der Winkel. Daher weicht der cykloidalische Bogen auf beiden Seiten von E bis zu einer beträchtlichen Entfernung wenig von einem mit dem Halbmesser 4a oder 2DE beschriebenen Kreisbogen ab, dessen man sich also zur Zeichnung des Bogens neben E bedienen kann. Daher ist auch die Schwingungszeit eines Pendels von der Länge 2DE, das einen Kreisbogen von einiger Größe beschreibt, sehr wenig

von der Zeit in einer Cykloide verschieden, und daher wird auch die starke Annäherung zur Gleichzeitigkeit bey verschiedenen Kreisbogen begreiflich, die auf dem cykloidalischen Bogen von jeder Größe vollkommen ist.

In A ist der Halbmesser der Krümmung = 0. Das heißt, jeder Kreisbogen, der durch A aus einem Mittelpuncte auf AB beschrieben wird, liegt über AB hinaus, so klein auch dessen Halbmesser genommen wird. Die berührende in A ist senkrecht auf AB.

XIII. Der Bogen AM sey = s. Es ist $s = 4a(1 - \cos\frac{1}{2}\varphi)$, und das Complement EM $= 4a\cos\frac{1}{2}\varphi$.

Denn, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, (Rectification). Da $dx = a(1 - \cos\varphi)d\varphi$, und $dy = a\sin\varphi . d\varphi$, so ist $ds^2 = 2a^2(1 - \cos.\varphi)d\varphi^2 = 4a^2 2\sin\frac{1}{2}\varphi . d\varphi^2$, also $ds = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi . d\varphi$, und daher $s = \text{const} - 4a\cos\frac{1}{2}\varphi$. Wenn $\varphi = 0$ ist, so ist auch $\frac{1}{2}\varphi = 0$, und $\cos\frac{1}{2}\varphi = 1$, also $\text{Const} = 4a$, und daher $s = 4a(1 - \cos\frac{1}{2}\varphi)$.

Die halbe Cykloide AME ist $= 4a$, da für diese φ = zwey Rechten ist. Also ist der Bogen EM $= 4a\cos\frac{1}{2}\varphi$.

XIV. In dem Halbkreise DER ist der W. DER $= \frac{1}{2}DCR = \frac{1}{2}\varphi$, und $RE = DR \times \cos DER = 2a\cos\frac{1}{2}\varphi$. Also ist der cykloidalische Bogen EM = 2 chord. circ. ER.

XV. Die Fläche APM drehe sich um AP, so ist der Inhalt des dadurch erzeugten runden Körpers $= \pi a^3(\frac{5}{2}\varphi - \frac{11}{3}\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\cos\varphi^2)$ $= \frac{1}{12}\pi a^3(30\varphi - 45\sin\varphi + 9\sin 2\varphi - \sin 3\varphi)$.

Das Solidum sey = Z, so ist $dZ = \pi y^2 dx$, (s. Cubirung) das ist $dZ = \pi a^3(1 - \cos\varphi)^3 d\varphi$ $= \pi a^3(1 - 3\cos\varphi + 3\cos\varphi^2 - \cos\varphi^3)d\varphi$. Nun ist, wie man sich durch die Differentiation, versichern kann,

$\int \cos\varphi . d\varphi = \sin\varphi$

$\int \cos\varphi^2 . d\varphi = \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi$

$\int \cos\varphi^3 . d\varphi = \frac{1}{3} \sin\varphi \cos\varphi^2 + \frac{2}{3} \sin\varphi.$

Aus diesen Integralen wird unmittelbar der erste Werth des Integrals Z erhalten; der zweyte wird aus der Verwandlung von $\sin\varphi . \cos\varphi$, und $\sin 2\varphi . \cos\varphi$ (Goniometrie, 27.), hergeleitet.

XVI. Eben dieses Solidum ist auch $= \pi (\frac{5}{2} a^3$ Ang. sin vers. $\frac{y}{a} - (\frac{5}{2} a^2 + \frac{5}{6} ay + \frac{1}{3} y^2) \sqrt{(2ay - y^2)})$.

Man muß nämlich in der Differentialformel $dZ = \pi y^3 d\varphi$ das Differential des Winkels durch dy ausdrucken. Da $y = a(1 - \cos\varphi)$, so ist $dy = a \sin\varphi . d\varphi$. Eben daher ist $a - y = a \cos\varphi$, also $a^2 - 2ay + y^2 = a^2 \cos\varphi^2$, und $2ay - y^2 = a^2 \sin\varphi^2$, oder $\sqrt{(2ay - y^2)} = a \sin\varphi$. Jene Differentialgleichung durch diese Gleichung dividirt, giebt $\frac{dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = d\varphi$. Folglich ist $dZ = \frac{\pi y^3 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$.

Aus dem Artikel: Integralformel (45 und 34) ist

$$\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}} = -\frac{1}{3} y^2 \sqrt{(2ay - yy)} + \frac{5}{3} a \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = -\frac{1}{2} y \sqrt{(2ay - yy)} + \frac{3}{2} a \int \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = -\sqrt{(2ay - yy)} + a \int \frac{dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

Auch ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(2ay-yy)}} = \text{Ang. sin vers. } \frac{y}{a}.$$

Daher ist durch successive Substitution,

$$\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}} = \text{Const} \ldots \ldots \ldots$$
$$-(\tfrac{1}{3}y^2 + \tfrac{5}{6}ay + \tfrac{5}{2}a^2) \times \sqrt{(2ay-yy)}$$
$$+ \tfrac{5}{2}a^3 \text{ Ang. sin vers } \frac{y}{a}.$$

Die Const. ist hier $= 0$. Das Integral mit π multiplicirt giebt den Inhalt eines unbestimmten Abschnittes von dem durch Umdrehung der Cykloide um die Grundlinie erzeugten Körper.

Da $y = a(1 - \cos\varphi)$, und $\sqrt{(2ay - yy)} = a \sin\varphi$ ist, so läßt sich jede der Formeln in XV. und XVI. aus der andern leicht herleiten.

XVII. Der ganze Körper, der durch Umdrehung der Cykloide um ihre Grundlinie entsteht, ist $= 5\pi^2 a^3$. Der Cylinder, dessen Höhe diese Grundlinie, $2\pi a$, und Halbmesser die Axe der Cykloide, $2a$, ist, hat den Inhalt $8\pi^2 a^3$. Jener verhält sich zu diesem wie $5 : 8$.

XVIII. Ein unbestimmter Abschnitt des Körpers, der durch die Umdrehung der Cykloide um ihre Axe entsteht, nämlich der durch die Umdrehung der Area EQM entstandene, ist $= \pi a^3 (\tfrac{1}{2}\omega^2 (1 - 2\cos\omega) + \tfrac{1}{2}\omega(4\sin\omega - \sin 2\omega) - \tfrac{1}{6}\sin\omega.\sin.2\omega + \tfrac{4}{3}\cos\omega - \tfrac{1}{4}\cos.2\omega - \tfrac{13}{12})$, wo ω das Complement des von dem Puncte auf dem wälzenden Kreise beschriebenen Winkels φ ist, nämlich $\omega = \pi - \varphi$.

Es ist die Abscisse $EQ = t = a(1 - \cos\omega)$; die Ordinate $QM = u = a(\omega + \sin\omega)$; auch sey der von EQM beschriebene Körper $= Z$, so ist $dZ = \pi u^2 dt$, das ist $dZ = \pi a^3 (\omega^2 + 2\omega\sin\omega + \sin\omega^2)\sin\omega.d\omega$.
Nun ist

$$\int \omega^2 \sin\omega.\, d\omega = -\omega^2 \cos\omega + 2\int \omega \cos\omega.\, d\omega$$

$$\int \omega \cos\omega^2\, d\omega = \omega \sin\omega + \cos\omega$$

$$2\int \omega \sin\omega^2\, d\omega = \int \omega (1 - \cos 2\omega)\, d\omega$$

$$\int \omega \cos 2\omega.\, d\omega = \tfrac{1}{2}\omega \sin 2\omega + \tfrac{1}{4}\cos 2\omega$$

$$\int \sin\omega^3.\, d\omega = -\tfrac{1}{3}\sin\omega^2 \cos\omega - \tfrac{2}{3}s\,\omega,$$

wie aus der Differentiation dieser Formeln erhellet. Die dritte enthält bloß eine goniometrische Substitution.

Aus diesen Integralen ergiebt sich der angegebene Werth des Abschnittes des cykloidalischen Körpers.

Die Constans $-\frac{1}{12}$ ist zugesetzt, damit das Integral $Z = 0$ sey, wenn $\omega = 0$ ist, wofür $\cos\omega$ und $\cos 2\omega$ jeder $= 1$ sind.

XIX. Der Inhalt des ganzen, von der Cykloide durch die Drehung um die Axe beschriebenen Körpers ist $= \pi a^3 (\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3})$. Der Inhalt des Cylinders über derselben Grundfläche mit derselben Höhe ist $\pi . \pi^2 a^2 . 2a = \pi^3 a^3$. Es verhält sich jener Körper zu dem Cylinder wie $\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3} : \pi^2$. Dieses Verhältniß hat schon Roberval gefunden. Torricelli gab es nicht ganz richtig an, da er es wie 11 : 18 setzte.

XX. Die Oberfläche des cykloidalischen Konoids, das durch die Umdrehung des Raumes EQM um EQ entsteht, ist
$= 4\pi a^2 (2\omega . \sin\frac{1}{2}\omega + 3\cos\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\omega - \frac{8}{3})$.

Die Oberfläche eines unbestimmten Abschnitts dieser Fläche sey $= s$, und $\frac{du}{dt} = p$, so ist ds . . .
$= 2\pi u\, dt \sqrt{(1 + p^2)}$, (s. Complanation). Es ist $du = a(1 + \cos\omega)\, da$; $dt = a \sin\omega.\, d\omega$, also

$$p = \frac{1 + \cos\omega}{\sin\omega}, \text{ und } 1 + p^2 = + \frac{2 + 2\cos\omega}{\sin\omega^2}$$

$$= \frac{4\cos\frac{1}{2}\omega^2}{\sin\omega^2}, \text{ also } \sqrt{(1 + p^2)} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\omega}{\sin\omega}.$$

Daher ist $dS = 4\pi a^2 (\omega + \sin\omega) \cos\frac{1}{2}\omega . d\omega$. Zu der Integration dieser Formel sind folgende Integralformeln erforderlich:

$$\int \omega \cos\tfrac{1}{2}\omega . d\omega = 2\omega \sin\tfrac{1}{2}\omega + 4\cos\tfrac{1}{2}\omega$$

$$\int \sin\omega . \cos\tfrac{1}{2}\omega . d\omega = \tfrac{1}{2}\int \sin\tfrac{3}{2}\omega . d\omega + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\omega . d\omega$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}\omega - \cos\tfrac{1}{2}\omega.$$

Daraus ist $S = 4\pi a^2 (2\omega \sin\frac{1}{2}\omega + 3\cos\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\omega + Const.)$. Für $S = 0$ ist $\omega = 0$, $\sin\frac{1}{2}\omega = 0$, $\cos\frac{1}{2}\omega = 1$; $\cos\frac{3}{2}\omega = 1$, also $Const = -\frac{8}{3}$.

XXI. Die Oberfläche des ganzen cykloidalischen Konoids ist $= 4\pi a^2 (2\pi - \frac{8}{3})$.

XXII. Joh. Bernoulli bemerkte, daß unzählig viele Segmente zwischen einem cykloidalischen Bogen und seiner Chorde, und auch unzählig viele Abschnitte zwischen zwey der Grundlinie parallelen Chorden sich finden lassen, die, jene geometrisch, diese algebraisch quadrirbar sind, ohne von der Rectification eines Kreisbogens abzuhangen. Es seyn (Fig. 99. Tab. VII.) EQ, Eq zwey Abscissen auf der Axe vom Scheitel, QM, qm die zugehörigen Ordinaten. Man nehme den Unterschied der zugehörigen Flächenräume EQM, Eqm aus V. und setze den Theil der Formel, welcher die zugehörigen Winkel enthält, $= 0$, so ist der übrige Theil, der Abschnitt QMmq, algebraisch quadrirbar. Die zu den Areis gehörigen Winkel seyn ω und $n\omega$, so muß seyn $\frac{1}{2} - \cos\omega = n(\frac{1}{2} - \cos n\omega)$. Ist n eine ganze Zahl, so wird $\cos\omega$ durch eine algebraische Gleichung gefunden, (Goniometrie, IV.). Ist n eine gebrochene Zahl, so ist die Gleichung für $\cos\omega$ transscendent, (eb. das.). Bernoulli läßt zwar n auch eine gebrochne Zahl bedeuten. Opp. T. III. p. 327.

Man ziehe durch den Scheitel E die berührende PEp, und nehme sie zur Abscissenlinie, worauf die Ordinaten PM, pm senkrecht sind. Wenn Ep mit EP auf derselben Seite liegt, so ziehe man den Werth der kleinern Area Epm von dem der größern EPM ab, nach der Formel VIII, so hat man den Werth des Quadri-

Qq

lineum PMmp. Das geradlinichte Trapezium PMmp ist $=\frac{1}{2}(PM+pm)Pp$: zieht man von diesem das Quadrilineum ab, so bleibt das Segment Mm zwischen dem Bogen Mm und dessen Chorde. In dem Werthe desselben setzt man den von den zugehörigen Winkeln abhängigen Theil $=0$, so ist der übrige geometrisch quadrirbar. Wenn ω und ω' die zu den Segmenten gehörigen Winkel an dem erzeugenden Kreise sind, so muß $\cos\omega+\cos\omega'=1$ seyn, damit der von den Winkeln abhängige Theil verschwinde.

Fällt Ep auf die entgegengesetzte Seite von E in Beziehung auf EP, so nimmt man die Summe der cykloidalischen Flächenräume EPM, Epm, und zieht sie von dem Trapezium PMmp ab, und es bleibt das cykloidalische Segment MEmM übrig. Soll dieses geometrisch quadrirbar seyn, so muß ebenfalls seyn $\cos\omega+\cos\omega'=1$.

XXIV. Die gedehnte und verkürzte Cykloide lassen sich auf eine ähnliche Art, wie die ursprüngliche behandeln. Man setze die Grundlinie AB nicht $=2\pi a$, sondern $=2m\pi a$, so daß sie länger oder kürzer als der Umfang des erzeugenden Kreises sey, nachdem m größer oder kleiner als die Einheit ist. Der Weg AN (Fig. 96.), den der Kreis bey der Wälzung auf der Grundlinie zurückgelegt hat, verhalte sich zu dem Kreisbogen MN zwischen dem beschreibenden Puncte und dem Berührungspuncte auf AB ebenfalls immer wie $m:1$, so beschreibt M eine gedehnte oder verkürzte Cykloide. Es ist nun $AP=x=a(m\varphi-\sin\varphi)$, und $PM=y=a(1-\cos\varphi)$; auch $EQ=t=a(1-\cos\omega)$, und $QM=u=a(m\omega+\sin\omega)$.

XXV. Der Halbmesser des erzeugenden Kreises Cd (Fig. 97 u. 98) sey $=a$; der Halbmesser des Kreises DFE, dessen Umfang der Grundlinie ab gleich ist, sey $=b$, die Abscisse aP, die Ordinate PM, so ist die Tangente des Winkels der Normale MN mit der Ordinate PM, $\tang PMN=\frac{a\sin\varphi}{b-a\cos\varphi}$.

Die Tangente des Winkels der Normale mit der Ordinate ist $= \frac{dy}{dx}$, da die Subnormale PN $= \frac{y\,dy}{dx}$ ist, (berührende, 42.). Nun ist $dx = a(m - \cos\varphi)\,d\varphi$; und $dy = a \sin\varphi . d\varphi$, also ist $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$. Der Umfang des Kreises DFED ist $= 2\pi b$. Da dieser der Grundlinie gleich ist, so ist $2\pi b = 2 m \pi a$, und daher $m = \frac{b}{a}$. Setzt man diesen Werth für m, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$.

XXVI. Hieraus ergiebt sich folgende Construction für die Normale. Man ziehe durch M mit der Grundlinie die parallele MQ bis an de, welche den erzeugenden Kreis in R schneide. Da $MP = a(1 - \cos\varphi)$ ist, so ist $dQ = a(1 - \cos\varphi)$, also $CQ = a\cos\varphi$, und der Winkel $dCR = \varphi$, spitz, wenn dQ kleiner als dC; stumpf, wenn dQ größer als dC ist, als wodurch $\cos\varphi$ negativ ist. Man ziehe durch D, den Berührungspunct des Kreises DFED mit AB, nach R die gerade DR, so ist in dem Dreyecke DCR die tang CDR $= \frac{a \sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$ (trigonomt. Formeln), also W. RDC = PMN, und die Normale MN ist parallel mit DR.

XXVII. In der gedehnten Cykloide (Fig. 97.) schneidet DR den Halbkreis dRe zweymahl, den Berührungsfall ausgenommen; also sind an dem Theile der Cykloide von a bis e je zwey Normalen, folglich auch je zwey berührende, einander parallel. Man ziehe von D aus die berührende DH an den Halbkreis dRe, so ist

nur eine Normale, welche dieselbe Lage gegen ihre Ordinate, wie D H gegen D E hat. Zieht man durch den Berührungspunct H die parallele HK mit a b oder AB, so trifft diese die Cykloide in dem Wendungspuncte K. Denn von dem untersten Puncte a bis K nimmt der Winkel der Normale mit der Abscissenlinie, von dem Anfange der Abscissen an, genommen, ab, und daher ist der Bogen a K convex gegen diese; jenseits K nimmt der Winkel der Normale mit der Abscissenlinie wieder zu, und der Bogen ist concav gegen a d. (Concav und Convex. 3.)

XXVIII. Dieses folgt auch aus der Regel (a. a. O. 11.), die wir hier zur Übung in ihrem Gebrauche anwenden wollen. Der Bogen einer Curve ist convex gegen die Abscissenlinie, wo für positive Ordinaten, wie hier, der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, concav, wo derselbe negativ ist. Dabey ist dx unveränderlich. Da $dx = a(m - \cos\varphi)\,d\varphi$, und $d^2x = 0$, so ist $0 = (m - \cos\varphi)\,d^2\varphi + \sin\varphi . d\varphi^2$, also $d^2\varphi = -\frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}\,d\varphi^2$.
Aus der Gleichung $dy = a\sin\varphi . d\varphi$ folgt $d^2y = a\cos\varphi . d\varphi^2 + a\sin\varphi . d^2\varphi$, das ist,

$$d^2y = a\cos\varphi . d\varphi^2 - \frac{a\sin\varphi^2}{m - \cos\varphi}\,d\varphi^2 =$$

$$= \frac{a(m\cos\varphi - 1)}{m - \cos\varphi}\,d\varphi^2 \;.\;.\; \text{Nunmehr ist } \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= \frac{m\cos\varphi - 1}{a(m - \cos\varphi)^3}, \text{ oder } = \frac{1 - m\cos\varphi}{a(\cos\varphi - m)^3}.$$

An der gedehnten Cykloide (Fig. 97.) ist $m > 1$, weil $b > a$ ist, also ist der Nenner, $m - \cos\varphi$, positiv. Der Zähler, $m\cos\varphi - 1$, ist positiv, wenn $\cos\varphi > \frac{1}{m}$, oder wenn $\cos\varphi > \frac{a}{b}$ ist; er ist $= 0$, wenn $\cos\varphi = \frac{a}{b}$; negativ für $\cos\varphi < \frac{a}{b}$, und für einen

Winkel φ, der größer als ein Rechter ist, unbedingt negativ. Nun ist für den Punct K, $\cos\varphi = \frac{a}{b}$, weil für denselben $\cos\varphi = \frac{CH}{CD}$ ist. Für die Puncte zwischen a und K ist $\cos\varphi > \frac{a}{b}$, und jenseits K ist $\cos\varphi < \frac{a}{b}$. Also ist die Cykloide von a bis K gegen die Absciſſenlinie convex, und von K bis o concav, so daß in K der Wendungspunct fällt.

An der verkürzten Cykloide (Fig. 98.) ist m oder $\frac{b}{a}$ ein eigentlicher Bruch, also wird der Zähler des Quotienten, nämlich $1 - m\cos\varphi$ nie Null, aber hier kann der Nenner Null werden, wodurch der Quotient unendlich groß wird. Dieses geschieht in dem Puncte m der Ovale, wo sie von der Ordinate pm berührt wird. An dieser Cykloide sind die Absciſſen für den Bogen amG negativ. Denn es ist $x = m\varphi - \sin\varphi$. Dieser Werth ist $= 0$, sowohl wenn $\varphi = 0$, als wenn φ . . . $= \frac{\sin\varphi}{m}$, welches hier möglich ist, weil m ein eigentlicher Bruch ist. Der erste Winkel gehört zu dem Puncte a, der zweyte zu dem Puncte G, dem Durchschnitte mit der nächst angränzenden Cykloide.

Die größte Absciſſe ap zu bestimmen, setze man das Differential von $m\varphi - \sin\varphi$, oder von $\sin\varphi - m\varphi$ gleich Null, also $\cos\varphi . d\varphi - m d\varphi = 0$, so ist $\cos\varphi = m$. Für den Werth von φ, der hieraus sich ergiebt, ist der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich groß; für einen kleinern Werth von φ ist $\cos\varphi > m$, und der Quotient positiv, für ei-

nen kleinern negativ. Also ist dort die krumme Linie gegen die Abscissenlinie convex, hier concav, und der Wechsel geschieht in dem Punkte m, wo die Ordinate eine berührende ist.

XXIX. Der Halbmesser der Krümmung an der gedehnten und an der verkürzten Cykloide ist

$$= \frac{(aa - 2ab\cos\varphi + bb)^{\frac{3}{2}}}{a(a - b\cos\varphi)}.$$

Es ist der Halbmesser der Krümmung $r =$

$-(1+pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{dp}$, wo $p = \frac{dy}{dx}$ ist, (Krümmungskreis, 2).

Hier ist $p = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$;

$$1 + pp = \frac{mm - 2m\cos\varphi + 1}{(m - \cos\varphi)^2};$$

ferner $dp = \frac{m\cos\varphi - 1}{(m - \cos\varphi)^2} d\varphi$,

und $\frac{dx}{dp} = \frac{a(m - \cos\varphi)^3}{m\cos\varphi - 1}$; folglich

$r = \frac{a(mm - 2m\cos\varphi + 1)^{\frac{3}{2}}}{1 - m\cos\varphi}$. In dieser Formel setze man für m seinen Werth, $\frac{b}{a}$, und multiplicire Zähler und Nenner mit a^3 oder $(a^2)^{\frac{3}{2}}$, so erhält r den angegebenen Werth. Der Zähler kann überhaupt positiv oder negativ genommen werden, weil eine Quadratwurzel beides seyn kann. Die Größe $aa - 2ab\cos\varphi + bb$ ist aber positiv, weil ab nothwendig kleiner als $\frac{1}{4}(a + b)^2$, und daher $2ab$ kleiner als $aa + bb$, und noch mehr $2ab\cos\varphi$ kleiner als diese Summe ist.

XXX. An der gedehnten Cykloide ist in K, wo $\cos\varphi = \frac{1}{m}$ oder $\frac{a}{b}$ ist, der Halbmesser der Krüm-

mung unendlich groß; in a, wo $\cos\varphi = 1$, ist derselbe $= - \frac{(b-a)^2}{a}$; im Scheitel e, wo $\cos\varphi = -1$, ist derselbe $= + \frac{(a+b)^2}{a}$.

An der verkürzten Cykloide ist in m, wo $\cos\varphi = m = \frac{b}{a}$ ist, der Halbmesser der Krümmung $= (aa - bb)^{\frac{1}{2}}$; in a ist derselbe $= - \frac{(a-b)^2}{a}$; in e ist er . . . $= + \frac{(a+b)^2}{a}$. Die Vorzeichen sind so genommen, daß ein positiver Krümmungshalbmesser zu einem concaven Bogen, ein negativer zu einem convexen gehört. In dem Puncte m (Fig. 98.) bleibt das Vorzeichen weg, weil hier der Übergang von dem Convexen zum Concaven geschieht.

XXXI. Die Cykloide hat die Erfindung einer andern krummen Linie veranlaßt, welche zuerst die kleine Cykloide hieß, hernach aber den Namen, Gefährtinn der Cykloide (Cycloidis socia) erhalten hat. Ehedem hat man sich viel mit ihr beschäftigt. Ihre Construction ist folgende. Mit dem Halbmesser AC (Fig. 100.) sey ein Kreis ANBA beschrieben. Auf dem Durchmesser AB errichte man in irgend einem Puncte P die senkrechte PM, welche den Halbkreis ANB in N schneide. Dem Bogen AN setze man die Ordinate PM gleich, so ist M ein Punct dieser krummen Linie. Ihr Unterschied von der Cykloide besteht darin, daß hier die Ordinate PM dem Kreisbogen AN gleich ist, dagegen an der Cykloide EAM (Fig. 96.) die Ordinate QM = dem Kreisbogen DR + Ordinate am Kreise QR ist. Die Ordinate BD im dem Endpuncte B des Durchmessers ist gleich der Länge des Halbkreises, wie an der Cykloide. Die Gefährtinn besteht wie jene aus unendlich

vielen wiederholten gleichen Portionen, weil zu demselben Sinus versus unendlich viele Bogen gehören.

Es sey AC $=$ a; AP $=$ x; PM $=$ y, so ist y $= \text{Arc. cos.} \frac{a-x}{a}$; und $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$.

In E, wozu die Ordinate CE durch den Mittelpunct des Kreises C gehört, ist ein Wendungspunct. Denn es ist $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a-x}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$. Dieser Quotient ist negativ, wenn a $>$ x, und die krumme Linie ist concav gegen AB von A bis E. Er ist positiv, wenn a $<$ x, also ist die Linie von E bis D gegen CB convex.

Die Linie EMA heißt auch die Linie der Sinus. Wenn nämlich MQ auf CE senkrecht gezogen wird, so ist EQ gleich dem Bogen NF, und MQ, gleich dem linearischen Sinus desselben für den Halbmesser AC. Die andere der EMA gleiche Hälfte für die Sinus der Bogen über einen Quadranten muß noch hinzugefügt werden. Wallis nennt die Linie AMD lineam sinuum versorum.

XXXII. Wenn die Ordinaten PM sich wie die Bogen AN verhalten, so entsteht eine verwandte Linie. Ihre Gleichung ist $y = m\,a\,\text{Arc. cos} \frac{a-x}{a}$. Ist m größer als die Einheit, so ist die Curve eine Socia cycloidis (trochoidis) elongata. Für ein sehr großes m nähert sie sich der Gestalt einer schwingenden Saite, bey einer Totalschwingung, und zwar mit dem Theile AME, und dem ihm gleichen in der andern Hälfte. Man sehe Jo. Bernoulli Opera, vol. III. pag. 210, wo sie für die Figur einer schwingenden Saite selbst erklärt wird. Richtiger aber wird diese erhalten, wenn statt des Kreises eine Ellipse genommen wird, deren halbe große Axe CE ist, mit einer sehr kleinen Excentricität. Hiervon in der zweyten Abtheilung, Artikel, Saite.

Von der Evolution der Cykloide. s. **Evolution.** Die Bestimmung des Schwerpunctes ihrer Area und des cykloidalischen Konoids in dem Artikel, **Schwerpunct.** Die Eigenschaft, daß sie die Linie des schnellesten Falles ist, wird in dem Artikel: **Variation,** vorkommen; die Eigenschaft, daß sie ein Pendel sich gleichzeitig schwingen läßt, in dem Artikel: **Fall der Körper,** in der zweyten Abtheilung dieses Werkes.

Die Schrift von Wallis über die Cykloide ist mühsam zu lesen, wenn man es nicht zur Vergleichung seiner Methode mit der neuern viel bequemern unternimmt. In den Werken der beiden Bernoulli, besonders des jüngern, ist vieles über die Cykloide enthalten. Man sehe auch nach Boscovich de cycloide et Logistica. Romae, 1745. Nouvelle manière de démontrer les proprietés de la cycloide par Bossut. Mem. présentés, T. 3. Noch einige Abhandlungen über diese Linie in Murhards Bibl. math. Tom. II. pag. 357. In den Werken über die Infinitesimalrechnung wird sie häufig als Beyspiel gebraucht, besonders in der Analyse des infin. petits von l'Hopital. Die Geschichte derselben hat Montucla ausführlich vorgetragen in seiner Geschichte der Mathematik. 2. Band, S. 52 — 73. zweyte Ausg. Er hat dabey benutzt die Histoire de la Roulette von Pascal, und Gröningii historia Cycloidis, Hamburgi 1701.

Cykloimber, Circulus imbricatus, hohl gebogener Kreis, ist eine krumme Linie von doppelter Krümmung, auf der Oberfläche eines senkrechten Cylinders, deren Abscissen Bogen des Kreisumfanges von der Grundfläche dieses Körpers, und die Ordinaten, welche auf die Grundfläche senkrecht gestellt sind, den Ordinaten einer krummen Linie von einfacher Krümmung gleich sind, an welcher die Abscissen mit denjenigen zu den Bogen des Kreisumfanges übereinkommen. Diese zweyte krumme Linie gehe durch die Endpuncte eines Durchmessers der cylindrischen Grundfläche. Der Durchschnitt zweyer cy-

lindrischen Flächen, deren Axen sich senkrecht schneiden, und die auch auf ihre Grundfläche jede senkrecht stehen, ist ein Cykloimber. Frezier hat diese krumme Linie betrachtet, und ihr den Namen gegeben. Traité de Stéréotomie, T. I. p. 42, Zimmermann de curva imbricata. Göttingae, 1765. S. Stereotomie.

Cyklometrie, ist der Inbegriff der Formeln, welche die Relationen der Kreisbogen und der ihnen zugehörigen geraden Linien darstellen. Sie ist einer der wichtigsten und schönsten Theile der neuern Analysis. Denn was vor der Erfindung unserer Infinitesimalrechnung darin gethan ist, sind nur einzelne, sehr mühsame Versuche. Ich unterscheide die Cyklometrie von der Goniometrie, welche die Vergleichung der Winkel mittelst der von ihnen abhängigen geraden Linien enthält. Die Anwendung der cyklometrischen Formeln auf die numerische Berechnung der zu den Kreisbogen gehörigen geraden Linien, oder dieser aus jenen, nenne ich Cyklotechnie, welche einen besondern Artikel ausmacht, um der Uebersicht jener nicht hinderlich zu fallen. In diesem Artikel werden auch die Bemühungen der ältern Geometer um die Kreismessung erzählt werden.

1. In dem Halbkreise AMB (Fig. 101. Tab VII.) sey der Halbmesser $AC = 1$; der Bogen $AM = \varphi$, dessen Sinus $PM = y$; es ist

$$\varphi = y + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} y^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \tfrac{1}{5} y^5$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \tfrac{1}{7} y^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \tfrac{1}{9} y^9 \quad . \; . \; . \; .$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \,..\, 2n-1.}{2 \cdot 4 \cdot 6 \,....\, 2n} \cdot \frac{1}{2n+1} y^{2n+1} + \text{etc.}$$

Denn es ist (Different. Formel, 31.), $d\varphi = \quad . \; . \; .$

$\frac{d \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$. Die Po-

tenzialgröße verwandle man in eine Reihe nach dem binamischen Lehrsatze, 13. IV. wo $-y^2$ statt z zu setzen ist. Aus den Gliedern dieser Differential-Reihe entstehen durch Integration die Glieder der in dem Satze aufgestellten Reihe.

2. Es ist keine Constans in dem Integral zugefügt worden, damit φ den kleinsten zu dem Sinus y gehörigen Bogen bedeute, da Bogen und Chorde oder Sinus sich desto näher kommen, je kleiner sie sind. Die Constans muß hier Null seyn. Wollte man für sie irgend ein Vielfaches der ganzen Peripherie setzen, weil für Bogen, die um ein solches Vielfaches verschieden sind, dieselben Sinus Statt haben, so hätte die Reihe für jedes gegebene y unzählig viele Werthe.

3. Hierbey kommt in Betrachtung, daß das

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}, \text{ oder das } \int\frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$$ für den Halbmesser a, nur bey der Anwendung auf die Geometrie einen Kreisbogen vorstellt. Es ist aber allgemein eine analytische Function, die auch vorkommt, wo nicht von Kreisbogen oder Winkeln die Frage ist. In der Reihe selbst kann man für y größere Werthe als die Einheit setzen, ohne daß dieses etwas widersprechendes mit sich führte, so wie auch in der Reihe für die Potenz $(1-yy)^{-\frac{1}{2}}$. Reihen geben nur die Form der Größen, die dadurch dargestellt werden, nicht schlechthin ihren arithmetischen Werth. Die Anwendbarkeit einer Reihe zur Berechnung muß aus den Umständen beurtheilt werden.

4. Es sey des Bogens AM Cosinus CP $= x$, und der halbe Umfang des Kreises $= \pi$, so ist $\frac{1}{2}\pi - \varphi$

$$= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \text{etc.}$$ wie in der Reihe (1.).

Denn es ist x der Sinus des Bogens $\frac{1}{2}\pi - \varphi$, welcher durch seinen Sinus eben so dargestellt wird, wie

φ durch y. Eben dieses erhält man aus der Integration der Formel $d\varphi = -\frac{d\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, worin das Vorzeichen anzeigt, daß die Differentiale des Bogens und des Cosinus ungleichnamig sind. Es ist daraus $Const - \varphi = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}x^5 +$ etc. und die $Const = \frac{1}{2}\pi$, damit für $x = 0$ auch der Bogen, $Const - \varphi = 0$ sey, und damit Cosinus und Bogen sich einander desto mehr nähern, je kleiner beide sind.

5. Es ist $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2..6.7} + \frac{\varphi^9}{1.2..8.9} -$ etc.

Die wirkliche Umkehrung der Reihe in (1.) würde sehr beschwerlich fallen. Ist aber nur die Form der umgekehrten Reihe bekannt, so ist es durch eine leichte Rechnung möglich, die Coefficienten zu bestimmen. Daß y die Form, $A\varphi + B\varphi^3 + C\varphi^5 + D\varphi^7 +$ etc. haben müsse, erhellet daraus, daß für gleiche entgegengesetzte Bogen die Sinus gleich und entgegengesetzt werden. Darum können erstlich nicht alle Potenzen von φ in der Reihe für y Statt haben, weil dadurch für entgegengesetzte Bogen die Werthe der Sinus nicht gleich würden: zweytens auch nicht bloß die geraden Potenzen, welche für entgegengesetzte φ dieselbigen und gleichnamigen Sinus geben würden. Die Beschaffenheit der Vorzeichen muß die Rechnung mit der Größe der Coefficienten zugleich bestimmen. Ohne aber auf die Beschaffenheit der Reihe für den Kreis zu achten, kann man dieses folgendergestalt darthun. Man setze $y = \varphi - u$, so ist $u = \alpha(\varphi - u)^3 + \beta(\varphi - u)^5 + \gamma(\varphi - u)^7$ + etc. wo die Coefficienten α, β, γ, etc. der Kürze wegen für die Zahlcoefficienten in der Reihe (1.) gesetzt sind. Die Entwickelung der Glieder giebt eine

Reihe, worin die veränderlichen Factoren entweder die Form $\varphi^{2m+1} u^{2n}$, oder die, $\varphi^{2m} u^{2n+1}$, haben. Setzt man für einen Factor u jene Reihe, so behalten die Glieder eben die Form. Wird nun solchergestalt u aus einem Gliede der Reihe nach dem andern herausgeschafft, so behält man nur Glieder mit ungeraden Potenzen von φ.

Man setze demnach $y = A\varphi - B\varphi^3 + C\varphi^5 - D\varphi^7 + E\varphi^9 - \text{etc.}$ Ob die Vorzeichen richtig angenommen seyn, muß die Rechnung zeigen. Für das zweyte Glied ist es gleich klar, weil φ größer als y ist, es müßte denn A ein Bruch seyn. Wir haben die beiden Differentialgleichungen, $x\,d\varphi = dy$, und $y\,d\varphi = -dx$. In der zweyten setze man für y die angenommene Reihe, so ist

$$-A\varphi\,d\varphi + B\varphi^3 d\varphi - C\varphi^5 d\varphi + D\varphi^7 d\varphi - E\varphi^9 d\varphi + \text{etc.} = +dx;$$

also durch die Integration

$$1 - \tfrac{1}{2}A\varphi^2 + \tfrac{1}{4}B\varphi^4 - \tfrac{1}{6}C\varphi^6 + \tfrac{1}{8}D\varphi^8 - \tfrac{1}{10}E\varphi^{10} + \text{etc.} = x,$$

wo die Const. = 1 ist, da für $\varphi = 0$, $x = 1$ ist.

Man multiplicire diese Gleichung mit $d\varphi$, so ist

$$d\varphi - \tfrac{1}{2}A\varphi^2 d\varphi + \tfrac{1}{4}B\varphi^4 d\varphi - \tfrac{1}{6}C\varphi^6 d\varphi + \tfrac{1}{8}D\varphi^8 d\varphi - \tfrac{1}{10}E\varphi^{10} d\varphi + \text{etc.} = x\,d\varphi = dy.$$

Daraus ist

$$\varphi - \frac{1}{2\cdot3}A\varphi^3 + \frac{1}{4\cdot5}B\varphi^5 - \frac{1}{6\cdot7}C\varphi^7 + \frac{1}{8\cdot9}D\varphi^9 - \frac{1}{10\cdot11}E\varphi^{11} + \text{etc.} = y.$$

Diese Reihe mit der für y angenommenen verglichen, giebt

$A = 1$; $B = \frac{A}{2.3}$; $C = \frac{B}{4.5}$; $D = \frac{C}{6.7}$;

$E = \frac{D}{8.9}$; etc. Folglich hat y die in dem Satze angegebene unendliche Reihe zum Werthe.

6. Es ist $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4}$

$- \frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\varphi^8}{1.2..7.8} -$ etc.

Der Beweis ist in dem des vorhergehenden Satzes enthalten.

7. Die beiden Formeln in (5.6.) fließen aus den beiden goniometrischen (Goniometrie, IV.),

$\sin n\varphi = n \sin\varphi . \cos\varphi^{n-1}$

$- \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} \sin\varphi^3 \cos\varphi^{n-3}$

$+ \frac{n.n-...n-4.}{1.2...5} \sin\varphi^5 . \cos\varphi^{n-5}$

$- \frac{n.n-1..n-6.}{1.2..7} \sin\varphi^7 . \cos\varphi^{n-7}$.

$+$ etc.

und

$\cos n\varphi = \cos\varphi^n - \frac{n.n-1.}{1.2} \cos\varphi^{n-2} \sin\varphi^2$

$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4} \cos\varphi^{n-4} . \sin\varphi^4$

$- \frac{n....n-5}{1...6} \cos\varphi^{n-6} . \sin\varphi^6$

$+$ etc.

Man setze nämlich $n\varphi = \omega$, und lasse n sehr groß, und φ dagegen sehr klein seyn, so daß das Product $n\varphi$ irgend einen endlichen Winkel gebe. So nähert sich $\sin\varphi$ desto mehr dem Bogen φ, je kleiner φ ist, und $\cos\varphi$ der Einheit. Die Brüche $\frac{n-1}{n}$; $\frac{n-2}{n}$; $\frac{n-3}{n}$, etc.

nähern sich auch desto mehr der Einheit, je größer n ist. Setzt man nun statt $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, $\frac{\cos\varphi}{1}$, $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, etc. ihre Gränzen, jede $= 1$, und statt $n\varphi$ den Werth ω, so erhält man die Formeln in (5, 6.), nachdem man das Symbol ω, mit dem gleichgültigen φ, das nun ebenfalls einen endlichen Winkel wieder bedeutet, vertauscht hat. Euler hat diese Deduction gebraucht in der Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 134.

Eine unmittelbare Herleitung der Formeln (5, 6.) wird in der Differenzenrechnung, 27—29 vorkommen.

8, In den Formeln für y und x kann φ sowohl geometrisch als analytisch jeden Werth erhalten. Der Werth von y, als Sinus des Bogens φ, wird $= 0$, wenn $\varphi = 0$; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; $\pm 3\pi$; $\pm 4\pi$; etc. ist, und ein positives Größtes, oder ein negatives Kleinstes, die Einheit, für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\pi$; $\pm\frac{3}{2}\pi$; $\pm\frac{5}{2}\pi$; etc. Der Werth von x, als Cosinus des Bogens φ, wird $= 0$, wenn $\varphi = \pm\frac{1}{2}\pi$; $\pm\frac{3}{2}\pi$; $\pm\frac{5}{2}\pi$; etc. ist, und ein positives Größtes, oder ein negatives Kleinstes, die Einheit, wenn $\varphi = 0$; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; $\pm 3\pi$; etc. Die negativen Kleinsten sind, absolut genommen, Größte.

Die Gleichung für φ, wenn $y = 0$ gesetzt wird, hat daher unendlich viele mögliche Wurzeln, welche sind: 0; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; $+3\pi$; $+4\pi$; etc. Die Gleichung für φ, wenn $x = 0$ gesetzt wird, hat eben so unendlich viele Wurzeln, $\pm\frac{1}{2}\pi$; $\pm\frac{3}{2}\pi$; $\pm\frac{5}{2}\pi$; $\pm\frac{7}{2}\pi$; $\pm$ etc.

Eben so sind in einer Gleichung für irgend eine Größe z, mit vollzähligen möglichen Wurzeln die größten Werthe derselben absolut genommen, abwechselnd positiv und negativ, und ihre Wurzeln liegen zwischen den zu diesen Größten gehörigen Werthen von z. Die Gleichungen für x und y sind also als Gleichungen mit vollzähligen möglichen Wurzeln anzusehen, da die Anzahl der Werthe von x und y, für welche die Werthe jener Gleichungen Null oder absolute Größte sind, unendlich groß ist, wie

der Grad der Gleichung, diese Werthe auch ganz gleichförmig, ohne Unterbrechung auf einander folgen.

9. In der Formel für φ (1), setze man $y = 1$, und die Binomial-Coefficienten, $\frac{1}{2} = \alpha$; $\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \beta$;

$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \gamma$; $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \delta$; etc. so ist der Quadrant $\frac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{5}\beta + \frac{1}{7}\gamma + \frac{1}{9}\delta +$ etc. Dieser Werth läßt sich auf unzählig viele Arten abändern. Es ist

$$\alpha \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}\alpha + \tfrac{1}{7}\beta + \tfrac{1}{9}\gamma + \tfrac{1}{11}\delta + \text{etc.}$$

$$\beta \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7}\alpha + \tfrac{1}{9}\beta + \tfrac{1}{11}\gamma + \tfrac{1}{13}\delta + \text{etc.}$$

und überhaupt

$$\frac{1 \cdot 3 \,..\, (2m+1)}{2 \cdot 4 \,..\, (2m+2)} \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \frac{1}{2m+3} + \frac{\alpha}{2m+5} + \frac{\beta}{2m+7} + \frac{\gamma}{2m+9} + \text{etc.}$$

Auch ist

$$\frac{1 \cdot 3 \,..\, (2m-1)}{2 \cdot 4 \,..\, 2m} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(m+3)} - \frac{\alpha}{4(2m+5)} - \frac{\beta}{6(2m+7)} - \frac{\gamma}{8(2m+9)} - \text{etc.}$$

Man sehe meine Abhandlung über die verschiedenen Zusammensetzungen des Umfanges eines Kreises aus denselben Elementen, im Archiv der Mathem. 2r Bd. 5s Heft.

10. Man ziehe in A (Fig. 101. Tab. VII.) die berührende AT, welche von der verlängerten CM in N geschnitten werde, und setze $AN = t$, für $AC = 1$, so ist $\varphi = t - \frac{1}{3}t^6 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 -$ etc.

Die Differentialgleichung für die Tangente des Bogens $\varphi = AM$, nämlich $d\varphi = \frac{dt}{1 + tt}$ (Differential-

formel, 31.) verwandelt sich mittelst der wirklichen Division der Einheit durch $1 + tt$ in diese, $d\varphi = (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \text{etc.})\, dt$, woraus durch die Integration die angegebene Formel folgt. Da das Gränzverhältniß zwischen φ und t das 1 : 1 ist, so muß die Const = 0 seyn.

11. Die Reihe divergirt, wenn t größer als die Einheit, oder wenn der Bogen φ größer, als ein halber Quadrant ist. Sie convergirt äußerst langsam, wenn φ ein halber Quadrant, und $t = 1$ ist. Nach Eulers Bemerkung, Comment. Petrop. vet. T. IX. pag. 226. müßte man von ihr 10^{50} Glieder berechnen, den Umfang auf 100 Stellen zu erhalten, welches eine ungeheure Zeit erfordern würde. Wenn t größer als die Einheit ist, so giebt die Reihe bloß die Form des Bogens durch die Tangente. Das Verhältniß $d\varphi : dt$ hat immer dieselbe Form $1 : 1 + tt$, es mag t größer oder kleiner als die Einheit seyn. Daher hat auch $\varphi : t$ dieselbe Form in beiden Fällen. Um φ durch t auszudrucken in dem Falle, da t größer als die Einheit ist, muß bey der Division der Einheit durch $1 + tt$ in der Differentialgleichung der Theil tt zum ersten Theile genommen werden.

12. Es ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{5t^5} + \frac{1}{7t^7} - \frac{1}{9t^9} + \text{etc.}$

Denn $d\varphi = \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \text{etc.}\right) dt$,

also

$$\varphi - \text{Const} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{5t^5} + \frac{1}{7t^7} - \text{etc.}$$

Die Reihe wird = 0, wenn t unendlich groß ist; alsdann ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, daher Const $= \frac{1}{2}\pi$.

13. Es sey $u = \text{cotang}\,\varphi$, so ist

$\varphi = \frac{1}{2}\pi - u + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{9}u^9 + \text{etc.}$

Diese Formel folgt aus der vorhergehenden, da $u = \frac{1}{t}$ ist, (Goniometrie, 9.).

14. Es ist $t = \text{tang}\,\varphi = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{3 \cdot 5}\varphi^5$

$$+ \frac{17}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}\varphi^7 + \frac{2 \cdot 31}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}\varphi^9$$

$$+ \frac{2 \cdot 691}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}\varphi^{11} + \text{etc.}$$

Man setze, wie in (5), $t = a\varphi + b\varphi^3 + c\varphi^5 + d\varphi^7 + e\varphi^9 + f\varphi^{11} + \text{etc.}$, und $t^2 = \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \delta\varphi^8 + \varepsilon\varphi^{10} + \text{etc.}$ wo die Coefficienten α, β, etc. durch a, b, etc. gegeben sind. Da $dt = (1 + t^2)\,d\varphi$, so ist

$$t = \varphi + \tfrac{1}{3}\alpha\varphi^3 + \tfrac{1}{5}\beta\varphi^5 + \tfrac{1}{7}\gamma\varphi^7 + \tfrac{1}{9}\delta\varphi^9 + \text{etc.}$$

Es ist $\alpha = a^2$; $\beta = 2ab$; $\gamma = 2ac + bb$; $\delta = 2ad + 2bc$; $\varepsilon = 2ae + 2bd + cc$; $\zeta = 2af + 2be + 2cd$; etc.

Die Vergleichung der gefundenen Reihe für t mit der angenommenen, giebt

$a = 1$; $3b = \alpha$; $5c = \beta$; $7d = \gamma$; $9e = \delta$, etc.

folglich ist

$a = 1$; $\quad 3b = a^2$;
$5c = 2ab$; $\quad 7d = 2ac + bb$;
$9e = 2ad + 2bc$;
$11f = 2ae + 2bd + cc$;
$13g = 2af + 2be + 2cd$;
$15h = 2ag + 2bf + 2ce + dd$;
etc.

Wenn die Stellen der a, b, c, etc. durch 1, 2, 3. etc. bezeichnet werden, so sind in jedem Coefficienten alle Combinationen je zweyer vorhergehenden enthalten, deren Stellenzahlen zusammengenommen die Stellenzahl jenes ausmachen, von ihren Versetzungszahlen begleitet. Die

Summe aller wird durch $2n-1$ dividirt, wenn n die Stellenzahl des Coefficienten ist. Da jeder Coefficient aus allen vorhergehenden zusammengesetzt wird, so entsteht daher die scheinbare Unregelmäßigkeit der numerischen Coefficienten, deren Gesetz inzwischen ganz faßlich ist.

15. Es sey $u = \operatorname{cotang} \varphi$, so ist

$$u = \frac{1}{\varphi} - \tfrac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3\cdot 3\cdot 5}\varphi^3 - \frac{2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\varphi^5$$

$$- \frac{1}{3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\varphi^7 - \frac{2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}\varphi^9$$

$$- \frac{2\cdot 17\cdot 19}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 13}\varphi^{11} - \text{etc.}$$

Die Reihe für u ist der Quotient von 1 dividirt durch die Reihe für t. Das erste Glied ist also $\frac{1}{\varphi}$. Man setze $u = \frac{1}{\varphi} - a\varphi - b\varphi^3 - c\varphi^5 - d\varphi^7 - e\varphi^9 - f\varphi^{11} - \text{etc.}$ wo die Werthe von a, b, c, etc. andere sind, als in der Reihe für t. Man setze auch $u^2 = \frac{1}{\varphi^2} + \alpha + \beta\varphi^2 + \gamma\varphi^4 + \delta\varphi^6 + \varepsilon\varphi^8 + \zeta\varphi^{10} + \text{etc.}$ so ist

$\alpha = -2a$; $\beta = -2b + a^2$

$\gamma = -2c + 2ab$; $\delta = -2d + 2ac + bb$

$\varepsilon = -2e + 2ad + 2bc$;

$\zeta = -2f + 2ae + 2bd + cc$.

etc.

Da $u = \frac{1}{t}$, so ist $du = -\frac{dt}{t^2} = -(1 + u^2)\,d\varphi$, weil $d\varphi = \frac{dt}{1 + t^2}$; also entsteht für du die Reihe

$$du = -\frac{d\varphi}{\varphi^2} - (1 + \alpha)\,d\varphi - \beta\varphi^2 d\varphi - \gamma\varphi^4 d\varphi - \text{etc.}$$

und daher

$$u = \frac{1}{\varphi} - (1+\alpha)\varphi - \tfrac{1}{3}\beta\varphi^3 - \tfrac{1}{5}\gamma\varphi^5 - \tfrac{1}{7}\delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

Die Vergleichung dieser Reihe mit der angenommenen giebt

$a = 1 + \alpha = 1 - 2a$

$3b = \beta = -2b + aa$

$5c = \gamma = -2c + 2ab$

$7d = \delta = -2d + 2ac + bb$

$9e = \varepsilon = -2e + 2ad + 2bc$

etc.

Das ist

$3a = 1$; $5b = aa$

$7c = 2ab$; $9d = 2ac + bb$

$11e = 2ad + 2bc$; $13f = 2ae + 2bd + cc$

$15g = 2af + 2be + 2cd$;

$17h = 2ag + 2bf + 2ce + dd$;

etc.

Das Gesetz der Formation der Coefficienten für die Cotangente ist dasselbe, wie für die Coefficienten in der Reihe für die Tangente, außer daß die Divisoren andere sind.

16. Die Bernoullischen Zahlen seyn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. diejenigen, welche in dem Artikel, Bernoull. Zahlen, durch A, B, C, D, etc. bezeichnet sind. Die Vertauschung der Buchstabenzeichen geschieht, um Verwechslung mit den Coefficienten in der Reihe für sin φ zu verhüten. Es ist daselbst (7.) gefunden

$$\cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\varphi - \frac{2\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\varphi^3$$

$$- \frac{2\mathfrak{C}}{1.2..6}\varphi^5 - \frac{2\mathfrak{D}}{1.2..8}\varphi^7 - \frac{2\mathfrak{E}}{1.2..10}\varphi^9$$

Setzt man hier 2φ für φ, so ist

$$\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{4\mathfrak{A}}{1.2}\varphi - \frac{4^2.\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\varphi^3 - \frac{4^3.\mathfrak{C}}{1.2..6}\varphi^5 - \frac{4^4.\mathfrak{D}}{1.2..8}\varphi^7 - \frac{4^5.\mathfrak{E}}{1.2..10}\varphi^9$$

— etc.

17. Da $\tang\varphi = \cot\varphi - 2\cot 2\varphi$, (Goniometrie, 4.) und $2\cot 2\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{4^2.\mathfrak{A}}{1.2}\varphi - \frac{4^4.\mathfrak{B}}{1..4}\varphi^3 - \frac{4^6.\mathfrak{C}}{1..6}\varphi^5$ — etc. ist, so wird durch die Subtraction dieser Reihe von jener erhalten,

$$\tang\varphi = \frac{4(4-1)\mathfrak{A}}{1.2}\varphi + \frac{4^2(4^2-1)\mathfrak{B}}{1..4}\varphi^3 + \frac{4^3(4^3-1)\mathfrak{C}}{1..6}\varphi^5 + \frac{4^4(4^4-1)\mathfrak{D}}{1..8}\varphi^7 + \text{etc.}$$

18. Da die Formation der Coefficienten in den Reihen für tang φ und cot φ einfacher ist, als die Formation der Bernoullischen Zahlen, (a. a. O. 9.), so könnte man eher diese aus jenen, als jene aus diesen zusammensetzen. Der Zusammenhang zwischen jenen Coefficienten und denen des niedrigsten Gliedes in den Summen der geraden Potenzen ganzer Zahlen ist sehr merkwürdig.

19. Die Coefficienten in der Reihe für die Tangente haben insbesondere eine nähere Beziehung auf die Aggregate der ungeraden Potenzen der natürlichen Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen (Potenz IV.). Diese Aggregate seyn, absolut genommen, ohne Rücksicht auf ihre wechselnden Vorzeichen, P, Q, R, S, T, etc. nämlich P für die ersten, Q für die zweyten, R für die dritten Potenzen, u. s. f., so ist

$$P = \frac{4-1}{2}\mathfrak{A};\quad Q = \frac{4^2-1}{4}\mathfrak{B};\quad R = \frac{4^3-1}{6}\mathfrak{C};$$

$$S = \frac{4^4-1}{8}\mathfrak{D};\quad T = \frac{4^5-1}{10}\mathfrak{E};\ \text{etc.}$$

(a. a. O. 11; von der Änderung der Symbole ist der Grund die Verhütung einer Verwechslung mit den hier gebrauchten). Also ist

$$\text{tang}\,\varphi = 4P\varphi + \frac{4^2}{1.2.3}Q\varphi^5 + \frac{4^3}{1...5}R\varphi^6$$

$$+ \frac{4^4}{1..7}S\varphi^7 + \frac{4^5}{1..9}T\varphi^9 + \text{etc.}$$

Die Relationen der Größen α, β, γ, δ, etc. (a. a. O. 9.), welche jene Aggregate von Potenzen, durch die Producte der natürlichen Zahlen, 1; 1.2; 1.2.3; etc. dividirt sind, und die Relationen der Coefficienten in der Reihe für die Tangente, a, b, c. etc. sind einander ganz ähnlich. Nur ist $\alpha = \frac{1}{4}$, und $a = 1$. Setzt man $a = 4\alpha$; $b = 4^2\beta$; $c = 4^3\gamma$; $d = 4^4\delta$; u. s. f. so entstehen aus den Relationen zwischen a, b, c, etc. die zwischen α, β, γ, etc. a. a. O.

20. Die Gleichung $0 = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{3.5}\varphi^5$ + etc. aus (14.) hat gar keine mögliche Wurzel ausser $\varphi = 0$. Denn der Werth derselben, der die Tangente, t, ist, nimmt zu, so wie φ zunimmt, mit einem beständig grössern Verhältnisse der Zunahmen, und wird nicht negativ, obgleich für $\varphi > \frac{1}{2}\pi$ die Tangente negativ ist. Man kann auf sie das nicht anwenden, was von den Gleichungen gilt, die aus den Werthen der Sinus und Cosinus, wenn diese $= 0$ sind, entstehen. Wenn eine Gleichung lauter mögliche Wurzeln haben soll, so müssen ihre Werthe von 0 an bis zu einer gewissen endlichen Größe, absolut genommen (ohne Rücksicht auf ihre positive oder negative Beschaffenheit), zunehmen, dann wieder abnehmen, null werden, wieder zunehmen, und jenen entgegengesetzt werden, so oftmahl als viele Wurzeln vorhanden sind.

21. Es ist $\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\varphi} + \frac{2(2-1)\mathfrak{A}}{1\,.\,2}\varphi$
$+ \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B}}{1\,.\,.\,4}\varphi^3 + \frac{2(2^5-1)\mathfrak{C}}{1\,.\,.\,6}\varphi^5$
$+ \frac{2(2^7-1)\mathfrak{D}}{1\,.\,.\,.\,8}\varphi^7 +$ etc.

Diese Formel folgt aus der Gleichung $\operatorname{cosec}\varphi = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi + \cot\varphi$. (Goniometrie, 44.)

22. Es ist $\sec\varphi = 1 + \frac{1}{1\,.\,2}\varphi^2 + \frac{5}{1.2.3.4}\varphi^4$
$+ \frac{61}{1\,.\,2\,.\,.\,6}\varphi^6 + \frac{277\cdot5}{1\,.\,2\,.\,.\,8}\varphi^8$
$+ \frac{2659\cdot19}{1\,.\,2\,.\,.\,10}\varphi^{10} +$ etc.

Denn es ist $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$. Man setze $\cos\varphi = 1 - a\varphi^2 + b\varphi^4 - c\varphi^6 + d\varphi^8 -$ etc. und $\sec\varphi = 1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \delta\varphi^8 +$ etc. so ist das Product beider Reihen $= 1$. Daraus ergeben sich folgende Gleichungen

$\alpha = a$
$\beta = a\alpha - b$
$\gamma = a\beta - b\alpha + c$
$\delta = a\gamma - b\beta + c\alpha - d$
$\varepsilon = a\delta - b\gamma + c\beta - d\alpha + e$
etc.

wo $a = \frac{1}{1\,.\,2}$; $b = \frac{a}{3\cdot4}$; $c = \frac{b}{5\cdot6}$, etc. ist. Oder die Coefficienten α, β, γ, etc. machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Scale der Relation ist $\frac{1}{1\,.\,2}$; $-\frac{1}{1.2.3.4}$; $+\frac{1}{1\,.\,.\,6}$; $-\frac{1}{1\,.\,.\,8}$; $+$ etc.

23. Es ist log. nat. sin $\varphi = \log \varphi - \frac{4\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \frac{1}{2}\varphi^2$
$- \frac{4^2\mathfrak{B}}{1..4} \cdot \frac{1}{4}\varphi^4 - \frac{4^3\mathfrak{C}}{1..6} \cdot \frac{1}{6}\varphi^6 - \frac{4^4\mathfrak{D}}{1..8} \cdot \frac{1}{8}\varphi^8$
$- \frac{4^5\mathfrak{E}}{1..10} \cdot \frac{1}{10}\varphi^{10}$ — etc.

Denn es sey $y = \sin\varphi$, so ist $d \log. nat. y = \frac{dy}{y}$.
Es ist aber $dy = \cos\varphi\, d\varphi$, also $d \log. y =$ $\cot\varphi . d\varphi$. Daher ist es nur nöthig, die Reihe für $\cot\varphi$ in (16.) mit $d\varphi$ zu multipliciren, und dann das Product zu integriren. Die Reihe für $\cot\varphi$ ist nämlich der Differentialquotient, $\frac{d \log y}{d\varphi}$, durch eine Function von φ ausgedruckt.

24. Es ist log. nat. cos. $\varphi = - \frac{4(4-1)\mathfrak{A}}{1.2} \frac{1}{2}\varphi^2$
$- \frac{4^2(4^2-1)\mathfrak{B}}{1...4} \cdot \frac{1}{4}\varphi^4 - \frac{4^3(4^3-1)\mathfrak{C}}{1....6} \cdot \frac{1}{6}\varphi^6$
$- \frac{4^4(4^4-1)\mathfrak{D}}{1...8} \cdot \frac{1}{8}\varphi^8$ — etc.

Denn es sey $x = \cos\varphi$, so ist $d \log nat\ x =$
$\frac{dx}{x} = - \frac{\sin\varphi . d\varphi}{\cos\varphi} = -$ tang $\varphi . d\varphi$. Die Reihe für tang φ in (17.) giebt als Differentialquotient den Logarithmen von $\cos\varphi$.

25. Es ist log. nat. tang. $\varphi = \log\varphi$
$+ \frac{2^3(2-1)\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{2^5(2^3-1)\mathfrak{B}}{1...4.} \cdot \frac{1}{4}\varphi^4$
$+ \frac{2^7(2^5-1)\mathfrak{C}}{1..6} \cdot \frac{1}{6}\varphi^6 + \frac{2^9(2^7-1)\mathfrak{D}}{1..8} \cdot \frac{1}{8}\varphi^8$
+ etc.

Denn da $\tang \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ ist, so ist $\log. \tang \varphi$ $= \log. \sin \varphi - \log. \cos \varphi$.

26. Die in (5.) für $\sin \varphi$ gefundene Reihe, $\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{120}\varphi^5 -$ etc. oder $\varphi\,(1 - \frac{1}{6}\varphi^2 + \frac{1}{120}\varphi^4 -$ etc.) wird Null, wenn für φ entweder o oder ein Vielfaches von $\pm\pi$ gesetzt wird, durch jene Annahme der eintheilige Factor φ, durch die andere der infinitinomische Factor. Erhält der Bogen irgend einen andern durch φ bezeichneten Werth, so ist der Werth des infinitimonischen Factors

$$= (1 - \frac{\varphi}{\pi})(1 + \frac{\varphi}{\pi})(1 - \frac{\varphi}{2\pi})(1 + \frac{\varphi}{2\pi}). \text{ etc.}$$

wo der Quotient $\frac{\varphi}{\pi}$ alle ganze Zahlen nach der Reihe zum Divisor erhält, und sowohl additiv als subtractiv zu nehmen ist. (Gleichung. X. 4.).

Die Reihe für den $\cos \varphi$, nämlich $1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 - \frac{1}{720}\varphi^6 +$ etc. wird Null, wenn φ ein ungerades Vielfaches von $\pm\frac{1}{2}\pi$ ist. Daher ist der Werth dieser Reihe $= (1 - \frac{2\varphi}{\pi})(1 + \frac{2\varphi}{\pi})(1 - \frac{2\varphi}{3\pi})$ $(1 + \frac{2\varphi}{3\pi})(1 - \frac{2\varphi}{5\pi})(1 + \frac{2\varphi}{5\pi})$. etc. wo der Quotient $\frac{2\varphi}{\pi}$ alle ungerade Zahlen nach der Reihe zu Divisoren erhält, und mit beiderley Vorzeichen zu nehmen ist.

27. Es verhalte sich φ zum Quadranten oder zum rechten Winkel wie $m:n$, so daß $\varphi = \frac{m\pi}{2n}$, und es ist

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n} \cdot \frac{2n-m}{2n} \cdot \frac{2n+m}{2n} \cdot$$

$$\times \frac{4n-m}{4n} \cdot \frac{4n+m}{4n} \cdot \frac{6n-m}{6n} \cdot \text{etc.}$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n+m}{n} \cdot \frac{3n-m}{3n} \cdot \frac{3n+m}{3n} \cdot$$

$$\times \frac{5n-m}{5n} \cdot \frac{5n+m}{5n} \text{ etc.}$$

28. Es ist auch

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{(n-m)\pi}{2n} \cdot \frac{n+m}{2n} \cdot \frac{3n-m}{2n} \cdot \frac{3n+m}{4n} \cdot$$

$$\times \frac{5n-m}{4n} \cdot \frac{5n+m}{6n} \cdot \text{etc.}$$

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{2n-m}{n} \cdot \frac{2n+m}{3n} \cdot$$

$$\times \frac{4n-m}{3n} \cdot \frac{4n+m}{5n} \cdot \frac{6n-m}{5n} \cdot \text{etc.}$$

Denn es ist $\sin\frac{m\pi}{2n} = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{m\pi}{2n}\right) = \cos\frac{n-m}{2n}\pi$; und $\cos\frac{m\pi}{2n} = \sin\frac{n-m}{2n}\pi$.

Wird in den Formeln (27.) statt m gesetzt $n-m$, so werden die hier aufgestellten Formeln erhalten.

29. Die beiden Formeln für $\sin\frac{m\pi}{2n}$ oder für $\cos\frac{m\pi}{2n}$ geben mittelst der Division,

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \text{ etc.}$$

also $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.\ \text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.\ 9.11.\ \text{etc.}}$

Diese Reihe hat **Wallis** auf einem ganz andern Wege, durch eine besondere Art der Einschaltung gefunden. siehe Einschaltung.

30. Aus den Formeln in (27 u. 28.) lassen sich ähnliche Formeln für die Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten der Winkel $\frac{m\pi}{2n}$ herleiten; auch die Quotienten zweyer Sinus oder Cosinus verschiedener Winkel. Euleri Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 186. 187.

31. Zur Berechnung des Kreisumfanges, der Sinus und der Cosinus sind diese Formeln nicht geschickt, weil zu viele Factoren nöthig sind, um die Werthe nur bis auf eine mäßige Anzahl von Stellen richtig zu erhalten. Aber zur Berechnung der Logarithmen jener Größen leisten sie vortreffliche Dienste.

32. Da $\pi = \frac{4}{1} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \text{etc.}$ $= 4(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{25})(1 - \frac{1}{49})(1 - \frac{1}{81})\ \text{etc.}$ so ist $\log \pi = \log 4 + \log(1 - \frac{1}{9}) + \log(1 - \frac{1}{25}) + \log(1 - \frac{1}{49}) + \text{etc.}$ Nimmt man die natürlichen Logarithmen, so ist $\log \text{nat}\,(1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \text{etc.}$ (Logarithmen). Der Logarithme ist negativ, weil $1 - x$ ein eigentlicher Bruch ist. Setzt man für x nach der Reihe die Brüche $\frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}$, etc. so ist

$$
\begin{aligned}
\log.\ \text{nat.}\,\pi = {} & \log 4 \\
& - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81}\ \text{etc.}\right) \\
& - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{81^2} + \text{etc.}\right) \\
& - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{49^3} + \frac{1}{81^3} + \text{etc.}\right) \\
& - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{49^4} + \frac{1}{81^4} + \text{etc.}\right) \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

In dem Artikel, Potenz V. 9. wird gezeigt, daß die Summen der reciproken geraden Potenzen der ungeraden Zahlen,

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = \frac{(4-1)\mathfrak{A}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\pi^2}{2}$$

$$1 + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.} = \frac{(4^2-1)\mathfrak{B}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\pi^4}{2}$$

$$1 + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.} = \frac{(4^3-1)\mathfrak{C}}{1 \,.\,.\, 6} \cdot \frac{\pi^6}{2}$$

u. s. f. wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Bezeichnet man diese Summen durch A, B, C, D, etc. so ist

$$\log.\text{nat}.\,\pi = \log 4 - \tfrac{1}{1}(A-1) - \tfrac{1}{2}(B-1) - \tfrac{1}{3}(C-1) - \tfrac{1}{4}(D-1) - \text{etc.}$$

Die Werthe der Summen A, B, C, etc bis zur 22sten, jede bis auf die 23ste Decimalstelle berechnet, hat Euler geliefert a. a. O. § 190. Die Ausdrücke derselben durch die Bernoullischen Zahlen hat er in diesem Werke noch nicht gebraucht.

38. Da π auch auf folgende Art dargestellt werden kann, $\pi = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot$ etc. so ist $\log \pi = \log 2 - \log(1 - \frac{1}{4}) - \log(1 - \frac{1}{16}) - \log(1 - \frac{1}{36}) - \text{etc}$, Daher ist

$$\log.\text{nat}.\,\pi = \log 2$$

$$+ \frac{1}{1}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{36^2} + \frac{1}{64^2} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{36^3} + \frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

In dem Artikel, Potenz V. 10 wird gezeigt, daß die Summen der reciproken geraden Potenzen der geraden Zahlen,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \text{etc.} = \frac{\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{36^2} + \text{etc.} = \frac{\mathfrak{B}}{1..4} \cdot \frac{\pi^4}{2}$$

$$\frac{1}{4^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{36^3} + \text{etc.} = \frac{\mathfrak{C}}{1..6} \cdot \frac{\pi^6}{2}$$

etc,

Bezeichnet man diese Summen durch α, β, γ, etc. so ist

$$\text{log. nat.}\, \pi = \log 2 + \alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{4}\delta + \text{etc.}$$

Euler hat die Summen α, β, γ, etc. auf gleiche Art, wie die Summen, A, B, C, etc. berechnet. a. a. O. §. 193. Diese zwente Formel für log π hat er nicht in der entwickelten Gestalt bengebracht. Sie erfordert mehr Rechnung als die erste, weil log 2 von log π mehr unterschieden ist als log 4. Da $-\log(1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{4 \cdot 4^4} + \text{etc.}$ und $\log 2 - l(1 - \frac{1}{4}) = \log 2 + l\frac{4}{3} = \log 8 - \log 3$, so ist

$$\text{log. nat.}\, \pi = \log 8 - \log 3 + \tfrac{1}{1}(\alpha - \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{2}(\beta - \tfrac{1}{16}) + \tfrac{1}{3}(\gamma - \frac{1}{4^3}) + \tfrac{1}{4}(\delta - \frac{1}{4^4}) + \text{etc.}$$

Diese Formel giebt den Werth des Logarithmen leichter. Es ist log 8 — log 3 naher an log π als log 4. Darauf nicht gesehen, ist es doch gut zu wissen, wie log. nat. π sowohl durch die reciproken geraden Potenzen der geraden Zahlen als die der ungeraden ausgedruckt wird.

34. Die Logarithmen der Sinus und Cosinus lassen sich ebenfalls aus den Formeln in (27.), die sie als Producte darstellen, herleiten. Nimmt man daselbst je zwey Factoren nach dem ersten zusammen, so ist

$$\log.\text{nat.}\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} + \log\left(1-\frac{mm}{4nn}\right)$$

$$+\log\left(1-\frac{mm}{16nn}\right) + l.\left(1-\frac{mm}{36nn}\right) + \text{etc.}$$

und

$$\log.\text{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\frac{mm}{nn}\right) + \log\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)$$

$$+ \log\left(1-\frac{mm}{25nn}\right) + \text{etc.}$$

35. Man entwickele die logarithmischen Größen nach der in (32.) für $\log(1-x)$ angeführten Formel, ordne sie nach den Potenzen von $\frac{m}{n}$, und setze für die Summen der reciproken Potenzen die vorhin dafür angenommenen Bezeichnungen, A, B, C, D, etc. und α, β, γ, δ, etc. so ist

$$\log.\text{nat.}\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} - \alpha.\frac{m^2}{n^2}$$

$$-\tfrac{1}{2}\beta.\frac{m^4}{n^4} - \tfrac{1}{3}\gamma.\frac{m^6}{n^6} - \tfrac{1}{4}\delta.\frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

$$\log.\text{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n} = -A.\frac{m^2}{n^2} - \tfrac{1}{2}B.\frac{m^4}{n^4}$$

$$-\tfrac{1}{3}C.\frac{m^6}{n^6} - \tfrac{1}{4}D.\frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

Setzt man hier für α, β, γ, etc. und A, B, C, etc. ihre Werthe durch die Bernoullischen Zahlen ausgedruckt, und φ für $\frac{m\pi}{2n}$, so erhält man die in (23. u. 24.) gefundenen Formeln.

36. Um die Coefficienten von $\frac{m^2}{n^2}$, besonders in der Formel für den Logarithmen des Cosinus, kleiner zu machen, hat Euler die Logarithmen von $1 - \frac{mm}{4nn}$, und von $1 - \frac{mm}{nn}$ nicht entwickelt. Da

$$\log(1 - \frac{mm}{4nn}) = - \frac{mm}{4nn} - \frac{m^4}{2 \cdot 4^2 n^4}$$

$$- \frac{m^6}{3 \cdot 4^3 n^6} - \frac{m^8}{4 \cdot 4^4 n^8} - \text{etc.}$$

so ist

$$\log.\text{nat.} \sin \frac{m\pi}{2n} = \log \frac{m\pi}{2n} + \log(1 - \frac{mm}{4nn})$$

$$-(\alpha - \frac{1}{4}) \frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{2}(\beta - \frac{1}{4^2}) \frac{m^4}{n^4}$$

$$- \frac{1}{3}(\gamma - \frac{1}{4^3}) \frac{m^6}{n^6} - \frac{1}{4}(\delta - \frac{1}{4^4}) \frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

37. Desgleichen, da $\log(1 - \frac{mm}{nn}) = - \frac{m^2}{n^2}$ $- \frac{m^4}{2n^4} - \frac{m^6}{3n^6} - \text{etc.}$ so ist

$$\log.\text{nat.} \cos \frac{m\pi}{2n} = \log(1 - \frac{mm}{nn}) - (A - 1) \frac{m^2}{n^2}$$

$$- \frac{1}{2}(B - 1) \frac{m^4}{n^4} - \frac{1}{3}(C - 1) \frac{m^6}{n^6} - \text{etc.}$$

38. Auf gleiche Weise verfährt Euler mit den Coefficienten in der Reihe für die Tangente und Cotangente. Die Art, wie er diese Reihen findet, ist eine ganz andere, als die in diesem Artikel vorgetragene. Das Resultat seiner Rechnung ergiebt sich aus den Formeln in (17, 18) folgendergestalt.

In der Formel (17.) für tang φ führe man statt der Bernoullischen Zahlen die Summen der geraden reciproken Potenzen der ungeraden Zahlen ein, welche durch A, B, C, D, etc. bezeichnet sind. So ist

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{4}{\pi} A \cdot \frac{2\varphi}{\pi} + \frac{4}{\pi} B \cdot \frac{2^3 \varphi^3}{\pi^3}$$

$$+ \frac{4}{\pi} C \cdot \frac{2^5 \varphi^5}{\pi^5} + \frac{4}{\pi} D \cdot \frac{2^7 \varphi^7}{\pi^7} + \text{etc.}$$

Dann setze man $\frac{m\pi}{2n}$ statt φ, so ist

$$\text{tang}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{4}{\pi} A \cdot \frac{m}{n} + \frac{4}{\pi} B \cdot \frac{m^3}{n^3} + \frac{4}{\pi} C \cdot \frac{m^5}{n^5}$$

$$+ \frac{4}{\pi} D \cdot \frac{m^7}{n^7} + \text{etc.}$$

Da $\frac{mn}{nn - mm} = \frac{m}{n} + \frac{m^3}{n^3} + \frac{m^5}{n^5} + \text{etc.}$

so addire man den Bruch, und subtrahire den Quotienten, beide mit $\frac{4}{\pi}$ multiplicirt, und es ist

$$\text{tang}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{mn}{nn - mm} + \frac{4}{\pi} (A - 1) \frac{m}{n}$$

$$+ \frac{4}{\pi} (B - 1) \frac{m^3}{n^3} + \frac{4}{\pi} (C - 1) \frac{m^5}{n^5}$$

$$+ \frac{4}{\pi} (D - 1) \frac{m^7}{n^7} + \text{etc.}$$

wie bey Euler §. 198.

39. In der Formel für cot φ in (16.) führe man statt der Bernoullischen Zahlen die durch α, β, γ, etc. bezeichneten Summen der geraden reciproken Potenzen der geraden Zahlen ein, so ist

$$\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{4}{\pi}\alpha \cdot \frac{2\varphi}{\pi} - \frac{4}{\pi}\beta \cdot \frac{2^3\varphi^3}{\pi^3} - \frac{4}{\pi}\gamma \cdot \frac{2^5\varphi^5}{\pi^5}$$
$$- \frac{4}{\pi}\delta \cdot \frac{2^7\varphi^7}{\pi^7} - \text{etc.}$$

oder

$$\cot\frac{m\pi}{2n} = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4}{\pi}\alpha \cdot \frac{m}{n} - \frac{4}{\pi}\beta \cdot \frac{m^3}{n^3} - \frac{4}{\pi}\gamma \cdot \frac{m^5}{n^5}$$
$$- \frac{4}{\pi}\delta \cdot \frac{m^7}{n^7} - \text{etc.}$$

Da $\frac{mn}{4nn-mm} = \frac{m}{4n} + \frac{m^3}{4^2n^3} + \frac{m^5}{4^3n^5} + \frac{m^7}{4^4n^7}$
$+ \text{etc,}$

so ist

$$\cot\frac{m\pi}{2n} = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4mn}{\pi(4nn-mm)} - \frac{4}{\pi}\left(\alpha - \frac{1}{4}\right)\frac{m}{n}$$
$$- \frac{4}{\pi}\left(\beta - \frac{1}{4^2}\right)\frac{m^3}{n^3} - \frac{4}{\pi}\left(\gamma - \frac{1}{4^3}\right)\frac{m^5}{n^5} - \text{etc.}$$

wie bey Euler, a. a. O. §. 198.

40. Die Reihe für die Logarithmen der Sinus und Cosinus kann man noch convergenter machen, wenn man den $\log\left(1 - \frac{mm}{16nn}\right)$, und $\log\left(1 - \frac{mm}{9nn}\right)$ unentwickelt läßt. Es ist alsdann

$$\text{log. nat. sin}\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} + \log\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right)$$
$$+ \log\left(1 - \frac{mm}{16nn}\right) - \left(\alpha - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}\right)\frac{m^2}{n^2}$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{16^2}\right)\frac{m^4}{n^4} - \tfrac{1}{3}\left(\gamma - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{16^3}\right)\frac{m^6}{n^6}$$
$$- \tfrac{1}{4}\left(\delta - \frac{1}{4^4} - \frac{1}{16^4}\right) \cdot \frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

Es

und

$$\log.\text{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n}=\log\left(1-\frac{mm}{nn}\right)+\log\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)$$

$$-\left(A-1-\frac{1}{9}\right)\frac{m^2}{n^2}-\frac{1}{2}\left(B-1-\frac{1}{9^2}\right)\frac{m^4}{n^4}$$

$$-\frac{1}{3}\left(C-1-\frac{1}{9^3}\right)\frac{m^6}{n^6}-\text{etc.}$$

Cyklometrische Verhältnisse.

Es sey das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange $=1:\pi$, so ist

$\pi = 3,$	141592	653589	793238
	462643	383279	502884
	197169	399375	105820
	974944	592307	816406
	286208	998628	034825
	342117	067982	148086
	513282	306647	093844
	609550	582261	36 . .

S. Cyklotechnie. Diese Zahl ist der halbe Umfang des Kreises, wenn der Halbmesser zur Einheit genommen wird.

$\frac{1}{\pi}=0,318309\ 886183\ 790671\ 53+$

berechnet von Hübsch in der Arithmet. Portensi, III. Th. 116 §.

Werthe von π, abgekürzt mit möglichster verhältnißmäßiger Genauigkeit

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \text{etc.}$$

Der vierte dieser Brüche ist von Metius, Landmesser in holländischen Diensten, Vater des Adrian Metius, Professors der Mathematik zu Franecker, herausgebracht. Adr. Metii Geom. pract. p. 89.

log. tab. $\pi = 0,497149\ 872694\ 133854\ 351268 \ldots$

log. tab. $\frac{1}{\pi} = 9,502850\ 127305\ 866145\ 648731 \ldots$

Arc. $1^{\circ} = 0,017453\ 292519\ 943295\ 769236 \ldots$

Arc. $1' = 0,000290\ 888208\ 665721\ 596153 \ldots$

Arc. $1'' = 0,000004\ 848136\ 811095\ 359935 \ldots$

$\log 1^{\circ} = 8,241877\ 3676 - 10$

$\log 1' = 6,463726\ 1172 - 10$

$\log 1'' = 4,685574\ 8668 - 10.$

Der Bogen, welcher dem Halbmesser gleich ist, hält $57^{\circ}\ 17^{I}\ 44^{II}\ 48^{III}\ 22^{IV}\ 29^{V}\ 21^{VI}$ etc. oder ist in Graden und Decimaltheilen des Grades . . . . . $= 57^{\circ},2957\ 79\ 5129 \ldots$ In Secunden . . . . $= 206264^{II},\ 806247 \ldots$ Diese Zahlen werden gefunden durch die Proportion, der halbe Umfang (π) zum Halbmesser, wie 180 Grad (oder 648000^{II}) zu der Anzahl von Graden oder Secunden in dem Bogen, der dem Halbmesser gleich ist. Die Division durch π ist Multiplication mit $\frac{1}{\pi}$.

$$\log. \frac{180}{\pi} = 1,758122\ 6324$$

$$\log. \frac{10800}{\pi} = 3,536273\ 8827$$

$$\log. \frac{648000}{\pi} = 5,314425\ 1331$$

Diese sind die Complemente der obigen Logarithmen von 1°, 1^{I}, 1^{II}, in Theilen des Halbmessers.

Es sey r der Halbmesser eines Kreises, a ein Bogen desselben, n die Anzahl der Grade in demselben, so ist $\pi r : a = 180^{\circ}\ n$, woraus ist $\frac{n\pi}{180} = \frac{a}{r}$.

Der Bogen, welcher durch n Grade ausgedrückt wird, sey durch den Halbmesser gemessen, $= \varphi$, so ist $\varphi = \frac{a}{r}$, also $\varphi = \frac{n\pi}{180}$.

Bedeutet n Secunden, so ist statt der Zahl 180 in diesen Formeln zu setzen, 648000.

Exempel. Die Parallaxe der Sonne sey 8″, 6, d. i. der Halbmesser der Erde (a) sey ein Bogen von 8, 6 Sec. mit dem Abstande der Erde von der Sonne als Halbmesser (r) beschrieben, so ist $\frac{648000}{8,6\pi} = \frac{r}{a}$.

Da $\frac{648000}{\pi} = 206264,8$ ist, so ist $\frac{r}{a} = 23984$, oder der Abstand der Erde von der Sonne beträgt 23984 Halbmesser der Erde.

Das Quadrat des Durchmessers verhält sich zu der Kreisfläche wie 1 zu 0,785398 163397.. In abgekürzten, verhältnißmäßig möglichst genauen rationalen Brüchen, ist $\frac{\text{area circ}}{\text{quadr. diam}} = \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{11}{14}, \frac{172}{219}, \frac{355}{452}$ etc.

Es ist log. 0,7853.. = 9,8950898814.

Der Würfel des Durchmessers verhält sich zu dem Inhalt der Kugel wie 1 zu $\frac{1}{6}\pi$, das ist, wie . . . 1 : 0,523598 775598. In abgekürzten Ausdrücken ist möglichst nahe

$$\frac{\text{Sphaera}}{\text{cub. diam}} = \frac{1}{2}, \frac{11}{21}, \frac{111}{212}, \frac{122}{233}, \frac{233}{445}, \frac{355}{678} \text{ etc.}$$

Es ist log. 0,5235.. = 9,7189986 223.

Cyklotechnie ist der Inbegriff der Methoden zur numerischen Berechnung des Kreisumfanges, der Bogen aus den zugehörigen Linien, der Linien aus den Bogen, und aus einander selbst, wenn die Verhältnisse der zugehörigen Bogen gegeben sind. Sie gründet sich auf die allgemeinen Formeln der Cyklometrie und Goniometrie, welche die Relationen dieser Größen enthalten.

Archimedes war der erste, der es unternahm, den Umfang des Kreises mit seinem Durchmesser zu vergleichen. Er suchte aus der halben Seite des umgeschriebenen Sechsecks nach der Reihe die halbe Seite des Vielecks von 12, von 24, von 48, von 96 Seiten, immer so,

daß die Zahlwerthe der Seiten größer waren, als ihre wahren irrationalen Werthe, diesen aber doch nahe kamen. Dadurch fand er, daß der Umfang des regulären umgeschriebenen Vielecks von 96 Seiten zu dem Durchmesser ein kleineres Verhältniß habe, als 14688 zu $4673\frac{1}{2}$, das ist, die erstere Zahl ist etwas größer, als der Umfang des Vielecks, wenn der Durchmesser $4673\frac{1}{2}$ Theile hat, und ist also mehr noch größer als der Umfang des Kreises für denselben Durchmesser.

Ferner berechnete er aus der Seite des eingeschriebenen Sechsecks (dem Halbmesser) folgweise die Seiten des Vielecks von 12, von 24, von 48, von 96 Seiten, immer so, daß die Zahlwerthe kleiner waren, als die eigentlichen Irrationalwerthe. Er fand, daß der Umfang des eingeschriebenen Vielecks von 96 Seiten zu dem Durchmesser ein größeres Verhältniß habe, als 6336 zu $2017\frac{1}{4}$, das ist, die erstere Zahl ist etwas kleiner als der Umfang des Vielecks für den Durchmesser von $2017\frac{1}{4}$ Theilen, und mehr noch kleiner, als der Umfang des Kreises.

Nun ist $3\frac{1}{7}$ ein sehr weniges größer, als der Quotient von 14688 durch $4673\frac{1}{2}$, und $3\frac{10}{71}$ ist ein sehr weniges kleiner als der Quotient von 6336 durch $2017\frac{1}{4}$; also fällt der Umfang des Kreises, den Durchmesser zur Einheit genommen, zwischen die Zahlen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, deren jene etwas zu groß, diese etwas zu klein ist. Die letztere kommt dem wahren Verhältnisse etwas näher, als die erstere. Der Bruch $\frac{10}{71}$ ist vom Archimedes so ausgewählt, daß der Überschuß des Quotienten von 6336 durch $2017\frac{1}{4}$ mit zwey Ziffern im Zähler und Nenner am genauesten dadurch ausgedruckt wird. Er ist auch, wie es hier erforderlich war, kleiner als der vollständige Überschuß $\frac{1137}{8069}$. — Man muß das Verhältniß 7:22 nicht das Archimedeische Verhältniß, des Durchmessers zum Umfange nennen, da er es gar nicht dafür ansetzt, sondern vielmehr zwey Verhältnisse angiebt, zwischen welchen das wahre liegt.

Die Genauigkeit, mit welcher Archimedes bey der Annäherung zu einer Irrationalgröße verfuhr, verdient

bemerkt zu werden. Bey der Berechnung des umgeschriebenen Vielecks gieng er von einem rechtwinklichten Dreyeck aus, worin Hypotenuse und die kleinere Kathete wie 2 : 1 sind; die kleinere Kathete zu der größern wie 1 : $\sqrt{3}$ sich verhält. Archimedes setzt für dieses Irrationalverhältniß das rationale 153 ; 265, aber mit der Bemerkung, daß die letztere Zahl den Werth der Kathete zu klein angiebt, wie es hier erforderlich war. Jene Zahlen geben das Verhältniß, 1 : $\sqrt{3}$ genauer an, als je zwey andere, die kleiner sind, wie die Rechnung in dem Artikel: Aufheben der Brüche, zeigt. Wie Archimedes sie ausgesucht haben möge, ist in dem Artikel, Arithmetik, gewiesen. Es ist $153^2 = 23409$, und $265^2 = 70225$, nur um 2 kleiner, als das Dreyfache jenes Quadrats.

Bey der Berechnung des eingeschriebenen Vielecks fieng Archimedes ebenfalls mit einem rechtwinklichten Dreyecke an, dessen Seiten sich wie 2 : 1 : $\sqrt{3}$ verhalten. Hier mußte aber die irrationale Seite durch eine Zahl ausgedruckt werden, die etwas größer ist, als der Irrationalwerth. Archimedes setzt für das Verhältniß 1 : $\sqrt{3}$ das nahe kommende 780 : 1351. Dieses ist so genau als es seyn kann, wenn nicht größere Zahlen genommen werden. Es ist $780^2 = 608400$, und $1351^2 = 1825201$, nur um 1 größer, als das Dreyfache von jenem Quadrate.

Eine kritische Ausgabe der kleinen Schrift des Archimedes über die Kreismessung mit dem Commentar des Eutocius ist in Wallis Werken, 3ten Bd. enthalten. Eine deutsche Uebersetzung mit Erläuterungen bey Haubers Übersetzung der Archimedeischen Bücher über Kugel und Cylinder. Tübingen 1798.

Nach dem Berichte des Eutocius hat Apollonius Pergäus das Verhältniß des Umfanges eines Kreises zum Durchmesser schärfer als Archimedes angegeben. Es ist dieses in einer Schrift, Okytoboos betitelt, geschehen, die verloren gegangen, und deren Titel vermuthlich nicht einmal richtig zu uns gekommen ist. Sie mag eine Anleitung zum Rechnen mit großen Zahlen

enthalten haben. S. Kästners geometrische Abhandl. II. Samml. 172 S.

Man wird auf dem von Archimedes gewiesenen Wege etwas fortgegangen seyn. Denn Purbach im 15ten Jahrhundert sagt, daß einige das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, wie 20000 zu 62832 setzten, welches in der vierten Decimalstelle fast richtig ist. Aber nicht eher, als gegen das Ende des 16ten Jahrhunderts ward der Umfang des Kreises mit einer Schärfe berechnet, die man zu höherm Gebrauch verlangen mag. Dieses leistete Vieta. Er hat den Umfang des Kreises für den Durchmesser als Einheit bis auf die zehnte Decimalstelle richtig berechnet. Seine Methode durch eingeschriebene Vielecke sich dem Kreise zu nähern, steht in der Sammlung seiner Werke, die Schooten besorgt hat, in der Abtheilung: Variorum de reb. mathem. responsorum L. VIII. c. 18. Die ganze Rechnung ist in einer andern Sammlung einiger Werke von ihm enthalten, die den Titel hat: Fran: Vietaei varia opera mathematica, in quibus tractatur Canon mathematicus, seu ad triangula, item Canonion triangulorum laterum rationalium, una cum universalium inspectionum ad canonem mathematicum libro singulari. Parisiis, 1609, groß folio. Diese Ausgabe, welche ich besitze, ist ohne Zweifel ganz die ältere von 1579, nur mit einem neuen Titel versehen. Die ältere ist nach Montucla (Hist. des Mathem. Tom. I. p. 610), und Hutton in der Einleitung zu seiner Ausgabe von Sherwins Tafeln äußerst selten. Vieta hat wegen des fehlerhaften Drucks so viele Exemplare, als er erhalten konnte, wieder an sich gebracht, und dann vermuthlich vernichtet. Der Canon mathematicus ist eine Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten, für einen Radius von 100000 Theilen, bey einigen mit Bruchtheilen begleitet. Die universales inspectiones sind eine ebene und sphärische Trigonometrie, in tabellarischer Form, mit einigen Anwendungen auf geometrische Aufgaben. Unter diesen kommt die Kreisrechnung vor.

Die Tafeln, worin die Rechnungen enthalten sind, ha-

ben die Aufschriften: demonstratio limitum analogiae perimetri circuli ad diametrum; particularis methodus, qua comparata fuerunt quadrata faecundorum (tangentium); quadrata sinuum minora majorave veris. Vieta berechnet die Seiten eines eingeschriebenen und umgeschriebenen Vielecks von 393216 ($= 6 \times 2^{16}$) Seiten. Zuerst suchte er die Quadrate der Sinus der halben Centriwinkel. Nämlich es ist $\frac{1}{2}(1 - \cos A) = \sin \frac{1}{2} A^2$ (Goniometrie, 36). Ist nun der Sinus eines Winkels bekannt, so wird auch dessen Cosinus gefunden, daraus das Quadrat des Sinus des halben Winkels, und dann das Quadrat des Cosinus dieses Winkels, welcher zu dem Quadrate des Sinus des vierten Theils verhilft. Auf dieselbe Art wird das Quadrat des Sinus des achten Theils und der folgenden halbirten Theile gefunden. Aus den Quadraten der Sinus und Cosinus ergiebt sich das Quadrat der Tangente. Die Quadrate der Cotangenten werden von ihm mittelst des Satzes: . . $2 \operatorname{cosec} A^2 + 2 \cot A^2 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} A^2 = \cot \frac{1}{2} A^2$ (Goniometrie, 44.) gefunden, wenn nur die Cotangente und Cosecante des ersten in der Reihe der Winkel bekannt sind, wie sie es sind, wenn der erste Winkel 30 Gr. hält. Es wird hieraus das Quadrat der Cotangente des folgenden Winkels, 15 Gr. gefunden; dazu das Quadrat des Halbmessers addirt, giebt das Quadrat der Cosecante von 15 Gr. Auf diese Weise wird die Rechnung bis zu der angenommenen Gränze der Halbtheilung fortgesetzt. In allen diesen Berechnungen sind zwey an den wahren Werth angränzende Zahlen, eine größer, die andere kleiner, gefunden. Der Durchmesser des Kreises verhält sich zu der Seite des letzten eingeschriebenen Vielecks wie die Cosecante des halben Centriwinkels zum Radius. Dieses giebt den Umfang des Vielecks, also die kleinere Gränze des Umfanges. Der Halbmesser des Kreises verhält sich zu der halben Seite des umgeschriebenen Vielecks wie die Cotangente des halben Centriwinkels zum Radius. Daraus wird der Umfang des umgeschriebenen Vielecks erhalten, die größere Gränze des Umfanges des Kreises.

Vieta fand auch einen Ausdruck für die Fläche des Kreises durch ein Product von einer unendlichen Anzahl Factoren. Wegen einer Erinnerung, die ich bey seiner Formel zu machen finde, kann ich sie erst in dem Artikel, Goniometrie, am Ende anführen.

Adrianus Romanus (Adriaen van Romen) aus Löwen gebürtig (gest. 1616) hat, nach der Anzeige von Montücla, den Umfang bis auf 17 Decimalstellen berechnet; wo er dieses gethan habe, giebt M. nicht an.

Ludolph von Ceulen oder van Collen, aus Hildesheim gebürtig, hat sich die ungeheure Mühe gegeben, durch Berechnung der umgeschriebenen und eingeschriebenen Vielecke den Umkreis bis zur 32sten Decimalstelle zu bestimmen. In der Schrift de circulo et adscriptis, welche einer Sammlung von arithmetischen und geometrischen Abhandlungen desselben Verfassers unter eben diesem, auf alle nicht passenden Titel, in der lateinischen aus dem holländischen gemachten Übersetzung von Snellius, Lugd. Bat. 1619, beygefügt ist, trägt van Ceulen sein ganzes Verfahren vor. Er erzählt, daß er im September 1586 diese Berechnung angefangen habe. Zuerst fand er durch fortgesetzte Zweytheilung des Bogens von 72 Gr. bis zur 25sten den Umfang bis auf die zwölfte Decimalstelle; dann durch 28 Halbtheilungen des Bogens von 90 Gr. den Umfang bis auf die 16te Decimalstelle; darauf durch 30 Halbirungen des Bogens von 60 Gr. bis auf die 18te Stelle; endlich durch 29 Halbirungen des Bogens von 6 Gr. bis auf die 20ste Stelle. Die Seiten der eingeschriebenen Vielecke fand er durch eine sehr verwickelte Formel, worin eine quadratische Irrationalgröße in einer andern dieser Art enthalten ist, diese wieder in einer solchen, und so fort, bis zu Ende, (Goniometrie, X.). Die Seiten der umgeschriebenen Vielecke fand er durch Division jener Seiten durch die halben Chorden der Complemente zum Halbkreise, für welche ähnliche Formeln Statt haben. Ob nun gleich das gefundene Verhältniß des Durchmessers zum Umfange zu jedem praktischen Gebrauch mehr als überflüssig hinreichend ist, so begnügte sich doch

ben die Aufschriften: demonstratio limitum analogiae perimetri circuli ad diametrum; particularis methodus, qua comparata fuerunt quadrata faecundorum (tangentium); quadrata sinuum minora majorave veris. Vieta berechnet die Seiten eines eingeschriebenen und umgeschriebenen Vielecks von 393216 ($=6 \times 2^{16}$) Seiten. Zuerst suchte er die Quadrate der Sinus der halben Centriwinkel. Nämlich es ist $\frac{1}{2}(1 - \cos A) = \sin \frac{1}{2} A^2$ (Goniometrie, 36). Ist nun der Sinus eines Winkels bekannt, so wird auch dessen Cosinus gefunden, daraus das Quadrat des Sinus des halben Winkels, und dann das Quadrat des Cosinus dieses Winkels, welcher zu dem Quadrate des Sinus des vierten Theils verhilft. Auf dieselbe Art wird das Quadrat des Sinus des achten Theils und der folgenden halbirten Theile gefunden. Aus den Quadraten der Sinus und Cosinus ergiebt sich das Quadrat der Tangente. Die Quadrate der Cotangenten werden von ihm mittelst des Satzes: . . $2 \operatorname{cosec} A^2 + 2 \cot A^2 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} A^2 = \cot \frac{1}{2} A^2$ (Goniometrie, 44.) gefunden, wenn nur die Cotangente und Cosecante des ersten in der Reihe der Winkel bekannt sind, wie sie es sind, wenn der erste Winkel 30 Gr. hält. Es wird hieraus das Quadrat der Cotangente des folgenden Winkels, 15 Gr. gefunden; dazu das Quadrat des Halbmessers addirt, giebt das Quadrat der Cosecante von 15 Gr. Auf diese Weise wird die Rechnung bis zu der angenommenen Gränze der Halbtheilung fortgesetzt. In allen diesen Berechnungen sind zwey an den wahren Werth angränzende Zahlen, eine größer, die andere kleiner, gefunden. Der Durchmesser des Kreises verhält sich zu der Seite des letzten eingeschriebenen Vielecks wie die Cosecante des halben Centriwinkels zum Radius. Dieses giebt den Umfang des Vielecks, also die kleinere Gränze des Umfanges. Der Halbmesser des Kreises verhält sich zu der halben Seite des umgeschriebenen Vielecks wie die Cotangente des halben Centriwinkels zum Radius. Daraus wird der Umfang des umgeschriebenen Vielecks erhalten, die größere Gränze des Umfanges des Kreises.

Vieta fand auch einen Ausdruck für die Fläche des Kreises durch ein Product von einer unendlichen Anzahl Factoren. Wegen einer Erinnerung, die ich bey seiner Formel zu machen finde, kann ich sie erst in dem Artikel, Goniometrie, am Ende anführen.

Adrianus Romanus (Adriaen van Romen) aus Löwen gebürtig (gest. 1616) hat, nach der Anzeige von Montücla, den Umfang bis auf 17 Decimalstellen berechnet; wo er dieses gethan habe, giebt M. nicht an.

Ludolph von Ceulen oder van Collen, aus Hildesheim gebürtig, hat sich die ungeheure Mühe gegeben, durch Berechnung der umgeschriebenen und eingeschriebenen Vielecke den Umkreis bis zur 32sten Decimalstelle zu bestimmen. In der Schrift de circulo et adscriptis, welche einer Sammlung von arithmetischen und geometrischen Abhandlungen desselben Verfassers unter eben diesem, auf alle nicht passenden Titel, in der lateinischen aus dem holländischen gemachten Übersetzung von Snellius, Lugd. Bat. 1619, beygefügt ist, trägt van Ceulen sein ganzes Verfahren vor. Er erzählt, daß er im September 1586 diese Berechnung angefangen habe. Zuerst fand er durch fortgesetzte Zweytheilung des Bogens von 72 Gr. bis zur 25sten den Umfang bis auf die zwölfte Decimalstelle; dann durch 28 Halbtheilungen des Bogens von 90 Gr. den Umfang bis auf die 16te Decimalstelle; darauf durch 30 Halbirungen des Bogens von 60 Gr. bis auf die 18te Stelle; endlich durch 29 Halbirungen des Bogens von 6 Gr. bis auf die 20ste Stelle. Die Seiten der eingeschriebenen Vielecke fand er durch eine sehr verwickelte Formel, worin eine quadratische Irrationalgröße in einer andern dieser Art enthalten ist, diese wieder in einer solchen, und so fort, bis zu Ende, (Goniometrie, X.). Die Seiten der umgeschriebenen Vielecke fand er durch Division jener Seiten durch die halben Chorden der Complemente zum Halbkreise, für welche ähnliche Formeln Statt haben. Ob nun gleich das gefundene Verhältniß des Durchmessers zum Umfange zu jedem praktischen Gebrauch mehr als überflüssig hinreichend ist, so begnügte sich doch

van Ceulen damit noch nicht. Er erzählt in der angeführten Sammlung von Abhandlungen pag. 92, und in den Fundament. arithm. et geometr. Lugd. Bat. 1615. p. 144. *) daß ihn eine unersättliche Forschungsbegierde angetrieben habe, die Gränzen für den Umfang des Kreises einander noch näher zu bringen, und daß er mit Hülfe eines Zöglings, Peter Corneliß, den Kreisumfang bis zu der 32sten Decimalstelle, den Durchmesser als Einheit genommen, berechnet habe. Die Abweichung von der wahren Größe beträgt noch nicht so viel, als ein Bruch, dessen Zähler 1, und der Nenner 100 Quinquillionen oder 1 mit 32 Nullen ist, in Vergleichung mit dem Durchmesser weniger als ein kleines Sandkorn gegen die ganze Erde.

Snellius gab in einem Buche, betitelt, Cyclometricus, Lugd. Bat. 1621 geometrische Lehrsätze, vermittelst welcher die Rechnung beträchtlich abgekürzt wird. Aus dem Vieleck von 96 Seiten, woraus Archimedes den Umfang nur zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ für den Durchmesser als Einheit einschränkte, d. i. ihn nur bis auf die dritte Decimalstelle angeben konnte, findet Snellius den Umfang bis auf sieben Decimalstellen.

Es sey (Fig. 101. Tab. VII.) ADB ein Halbkreis, dessen Mittelpunct C. Auf der verlängerten AB nehme man BE dem Halbmesser CA gleich, und ziehe die willkührliche EDF, welche den Kreis zum zweytenmale in D, und die in A auf AB senkrechte AF in F schneide: es ist AF kleiner als der Bogen AD.

Wird aber (Fig. 103.) zwischen dem nach E verlängerten Durchmesser AB und dem Kreise die gerade Linie EG

*) Dieses Buch ist eine Uebersetzung aus dem Holländischen, worin der Verfasser es geschrieben hat. Es enthält dieselben Abhandlungen, welche in der vorher angeführten Sammlung, die den Titel hat, de circulo et adscriptis, stehen, aber nicht die eigentliche Schrift von der Kreisrechnung, dagegen eine Sammlung von geometrischen Elementar-Sätzen. Die Abhandlung de zetematum geometricorum epilogismo, welche Kästner als ein ihm nicht zu Gesicht gekommenes Buch anführt, Geometr. Abhandl. zweyte Samml. S. 189, ist darin enthalten.

so gelegt, daß sie dem Halbmesser gleich ist, und schneidet sie verlängert den Kreis noch einmal in D, und die bey A berührende AF in F, so ist AF größer als der Bogen AD.

Snellius hat zwar diese Sätze gefunden, aber seine Beweise sind unbefriedigend, weil darin das zu beweisende zum Grunde liegt. Huygens hat sie genau erwiesen, in der schönen Schrift, de circuli magnitudine inventa, die zuerst 1654 herauskam. Sie ist in dem zweyten Theile seiner Operum variorum enthalten.

Man setze $AC = 1$; den Bogen $AD = \varphi$, so ist die senkrechte $DH = \sin\varphi$, und $CH = \cos\varphi$. In dem ersten Satze (Fig. 102) ist $EH = 2 + \cos\varphi$, und $AF = \frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi}$, da $EH : DH = EA : AF$ ist. Aus Cyklometrie (5 und 6,) ist

$$3\sin\varphi = 3\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi^3 + \tfrac{1}{40}\varphi^5 - \text{etc.}$$

$$2 + \cos\varphi = 3 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \tfrac{1}{24}\varphi^4 - \text{etc.}$$

also ist $AF = \varphi - \frac{1}{180}\varphi^5 - \frac{1}{504}\varphi^7 - \text{etc.}$

Daß die folgenden Glieder subtractiv sind, mag man aus den erstern schließen. Auch ist für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, oder den Quadranten, der Werth von AF kleiner als der Bogen, da alsdann $AF = \frac{3}{2}$ ist.

In dem Falle des zweyten Satzes (Fig. 103.) ziehe man gleichfalls DH senkrecht auf AB, und die Halbmesser CD, CG an die Durchschnitte der EF mit dem Kreise. Da $GE = CG$, so ist der W. $CGD = 2E$, also W. $CDE = 2E$, und W. $ACD = 3E$. Es sey der W. $CED = \omega$, so ist $ACD = 3\omega$, und der Bogen $AD = 3\omega$, für den Halbmesser als Einheit. Also $HD = \sin 3\omega$; $HC = \cos 3\omega$, und in dem gleichschenklichten Dreyeck CGE die Grundlinie $CE = 2\cos\omega$. Dadurch ist $EH = \cos 3\omega + 2\cos\omega$, also

$$AF = \frac{(1+2\cos\omega)\sin 3\omega}{\cos 3\omega + 2\cos\omega}.$$ Nun ist $1 + 2\cos\omega$

$= 3 - \omega^2 + \frac{1}{12}\omega^4 - \frac{1}{360}\omega^6 + \text{etc.}$

$\sin 3\omega = 3\omega - \frac{9}{2}\omega^3 + \frac{81}{40}\omega^5 - \frac{243}{560}\omega^7 + \text{etc.}$
Das Product dieser beiden Reihen ist

$$9\omega - \frac{33}{2}\omega^3 + \frac{433}{40}\omega^5 - \frac{6233}{1680}\omega^7 + \text{etc.}$$

Ferner ist

$$\cos 3\omega = 1 - \frac{9}{2}\omega^2 + \frac{27}{8}\omega^4 - \frac{81}{80}\omega^6 + \text{etc.}$$
$$2\cos\omega = 2 - \omega^2 + \frac{1}{12}\omega^4 - \frac{1}{360}\omega^6 + \text{etc.}$$

Die Summe dieser beiden Reihen ist

$$3 = \frac{11}{2}\omega^2 + \frac{83}{24}\omega^4 - \frac{731}{720}\omega^6 + \text{etc.}$$

Der Quotient des Products durch die Summe ist $3\omega + \frac{3}{20}\omega^5 + \frac{15}{28}\omega^7 + \text{etc.} = AF$. Setzt man $3\omega = \varphi$, so ist

$AF = \varphi + \frac{1}{20 \cdot 81}\varphi^5 + \frac{5}{28 \cdot 729}\varphi^7 + \text{etc.}$ Auch hier darf man aus der Beschaffenheit der Vorzeichen von den erstern Gliedern schließen, daß die folgenden auch additiv sind. Es ist also AF größer, als der Bogen φ. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ oder 90° und $\omega = \frac{1}{6}\pi$ oder 30°, ist . . . .

$AF = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1$. Da $\sqrt{3} = 1{,}73205$..
so ist $AF = 1{,}57735$ . . größer als $\frac{1}{2}\pi$.

Aus dieser Berechnung sieht man, wie viel enger die Gränzen für einen gegebenen Bogen durch des Snellius Verfahren gefunden werden, als nach der alten Methode. Nach der letztern sind die Seiten eines eingeschriebenen und die eines umgeschriebenen Vielecks, oder, welches dasselbe ist, Sinus und Tangente die Gränzen ihres zugehörigen Bogens. Diese sind also (nach Cyklometrie 5 und 14.), $\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \text{etc.}$ und $\varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \text{etc.}$ Nach des Snellius Methode sind sie aber $\varphi - \frac{1}{180}\varphi^5 - \text{etc.}$ und $\varphi + \frac{1}{1620}\varphi^5 + \text{etc.}$ Je kleiner φ, oder der Quotient des Bogens durch den Halbmesser ist, desto näher, und zwar viel näher kommen die Gränzen einander, als nach jener Methode.

Es ist nur nöthig von zwey Bogen, die sich wie 1 : 3 verhalten, die Sinus und Cosinus zu kennen. Man nehme φ gleich dem 32sten Theil des Umfanges, so läßt sich der Sinus dieses Bogens (oder die halbe Seite

des eingeschriebenen Vielecks von 16 Seiten) aus dem Sinus des 8ten Theils des Umfanges herleiten. Der Sinus des 96sten Theils aber (oder die halbe Seite des 48 Ecks) wird aus dem Sinus von 30 Gr. (oder der halben Seite des Sechsecks) gefunden.

Huygens fand, und zwar auf eine sehr sinnreiche Art, aus dem Schwerpuncte eines Kreisabschnittes, noch nähere Gränzen für den Umfang eines Kreises. Die analytische Rechnung mag nützlich mit der geometrisch-mechanischen verglichen werden, weswegen sie hier einen Platz verdient.

Es sey $y = \sin\varphi$, und $z = \text{chord}\ \varphi$, so ist erstlich $\varphi > z + \frac{1}{3}(z-y)$; zweytens

$$\varphi < z + \frac{4z+y}{2z+3y} \cdot \frac{z-y}{3}.$$ Dieses ist der 19te Satz in der angeführten Schrift von Huygens,

Es sey noch $u = \sin \text{vers}\ \varphi$, so ist $z^2 = 2u$, und auch $z^2 = u^2 + y^2$, also $y^2 = z^2 - \frac{1}{4}z^4$, und $y = z\sqrt{(1 - \frac{1}{4}z^2)}$, oder (Binom. Lehrsatz, 13, 18.)

$$y = z - \tfrac{1}{8}z^3 - \tfrac{1}{128}z^5 - \tfrac{1}{1024}z^7 - \text{etc.}$$

und

$$z + \tfrac{1}{3}(z-y) = z + \tfrac{1}{24}z^3 + \tfrac{1}{384}z^5 + \tfrac{1}{3072}z^7 + \text{etc.}$$

Da $z = 2\sin\frac{1}{2}\varphi$, so ist (Cyklometrie, 1.)

$$\varphi = z + \tfrac{1}{24}z^3 + \tfrac{3}{640}z^5 + \tfrac{5}{7168}z^7 + \text{etc.}$$

also ist $\varphi > z + \frac{1}{3}(z-y)$.

Zweytens, es ist

$$4z + y = 5z - \tfrac{1}{8}z^3 - \tfrac{1}{128}z^5 - \text{etc.}$$

$$2z + 3y = 5z - \tfrac{3}{8}z^3 - \tfrac{3}{128}z^5 - \text{etc.}$$

und $$\frac{4z+y}{2z+3y} = 1 + \tfrac{1}{20}z^2 + \tfrac{11}{1600}z^4 + \text{etc.}$$

Da $z - y = \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{128}z^5 + \frac{1}{1024}z^7 + \text{etc.}$

so ist

$$\frac{4z+y}{2z+3y} \times \frac{z-y}{3} = \tfrac{1}{24}z^3 + \tfrac{3}{640}z^5 + \tfrac{19}{25600}z^7 + \text{etc.}$$

und $$\varphi < z + \frac{4z+y}{2z+3y} \times \frac{z-y}{3}$$

Diese zweyte Gränze kommt dem Bogen φ sehr nahe, da sie erst in dem vierten Gliede der Reihe für φ von dem Bogen abweicht, nämlich um $+\frac{1}{3200}z^7$. Der Abstand der Gränzen von einander selbst ist $\frac{1}{480}z^5 + \frac{1}{2400}z^7$. Huygens giebt statt der entferntern kleinern Gränze noch eine nähere, auch kleinere, im 20sten Satze, und sagt, daß diese aus einer genauern Untersuchung der Schwerpuncte hergeleitet werde. Sie kommt mit der Reihe für φ durch z in den drey ersten Gliedern überein, und fast noch in dem vierten. Da wir jetzt die Reihe für den Bogen durch den Sinus haben, so bedarf es dieser mühsamen Verbesserung nicht. Die Vergleichung jener Gränzen mit dem wahren Werthe des Bogens zeigt, wie viele Mühe es den ältern Mathematikern machte, ein paar Glieder der Reihe für den Bogen zu erhaschen, die wir durch Hülfe der Integralrechnung, wegen des bekannten Gesetzes der Fortschreitung ihrer Glieder, vollständig haben. Huygens findet durch die beiden Gränzen aus der Chorde und dem Sinus des Bogens von 6 Gr. den Umfang bis auf die neunte Decimalstelle richtig.

Wallis fand durch eine gewisse sehr künstliche Art der Interpolation die Gränzen für $\frac{4}{\pi}$ auf eine ganz andere Art, durch einen Bruch, der aus der Multiplication unendlich vieler Brüche, welche sich der Einheit immer mehr nähern, entsteht. In der Arithmetica Infinitorum, Operum Vol. I. pag. 468, sagt er, das Quadrat des Durchmessers eines Kreises, die Kreisfläche zur Einheit genommen, ist

kleiner als $\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\cdot13}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12\cdot14}\cdot\sqrt{1\frac{1}{13}}$,

größer als $\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\cdot13}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12\cdot14}\cdot\sqrt{1\frac{1}{14}}$.

Nach dieser Form kann der Bruch, so weit man will, fortgesetzt werden. Giebt man dem Bruche unendlich viele Factoren im Zähler und Nenner, so erhält man den Werth von $\frac{4}{\pi}$, der in der Cyklometrie, §. 29. aus den

unendlichen Reihen für sin φ und cos φ hergeleitet ist. Zur Berechnung des Kreisumfanges, oder der Kreisfläche ist diese Form nicht brauchbar.

Als Wallis dem Lord Brouncker die von ihm gefundene Form für das Quadrat des Durchmessers in Beziehung auf die Kreisfläche als Einheit mittheilte, erwiederte dieser, daß er auch durch eine ihm eigene Infinitesimal-Rechnung folgende sehr bequeme Form gefunden habe, welche das Quadrat des Durchmessers ausdrückt.

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \text{etc.}}}}}}$$

Dabey sey zu bemerken, daß, wenn man mit einem der Brüche abbricht, anstatt der Zwey eine der ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9, etc. zu setzen ist, diejenige, deren Stelle dieselbe mit der Stelle des zuletzt gesetzten Bruchs in der Reihe der Brüche ist, wodurch die Werthe des Quadrats, des Durchmessers abwechselnd zu groß und zu klein ausfallen. So ist

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{7}}} \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2}}}}$$

zu groß. zu klein.

Der erstere Bruch giebt $\frac{4}{\pi} < \frac{180}{141}$; der zweyte : : :

$\frac{4}{\pi} > \frac{1680}{1321}$; also $\pi > 3,133$, und $\pi < 3,145$.

Die Brounckersche Reihe in einander geschobener Brüche entsteht aus der Reihe für den Bogen durch die Tangente (Cyklometrie, 10.), wenn darin der Bogen $= \frac{1}{4}\pi$, und $t = 1$ gesetzt wird, s. Kettenbruch. Sie nähert sich aber auch mit der angebrachten Abänderung zu langsam. Brouncker hat den Weg, auf welchem er zu dieser Darstellung gekommen ist, nicht bekannt gemacht. Wallis bemüht sich zu zeigen, wie Brouncker den Kettenbruch gefun-

den haben möge. Man muß aber seinen Vortrag sich geläufig gemacht haben, wenn man es verstehen will.

Die neue Rechnung unendlicher Größen machte die Berechnung des Kreises nur zu einem Beyspiele allgemeiner Methoden der Rectificirung und Quadrirung krummer Linien. Was vorher große Mühe gemacht, und vielen Scharfsinn erfordert hatte, ward fast ein Spiel, und ein gleichsam mechanisches Verfahren.

Newton gab in der Schrift, Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, die Reihe für einen Kreisbogen durch den Sinus, aus dieser durch Umkehrung die Reihe für den Sinus durch den Bogen, und aus dieser die Reihe für den Cosinus, mittelst Quadrirung der Reihe, und Ausziehung der Wurzel. Die Schrift ist vor 1669 verfaßt, s. Differentialrechnung. In dem zweyten Briefe an Oldenburg, der für Leibnitz bestimmt ward, vom 24. Oct. 1676. zeigt er an, daß die Reihe, $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. dem Quadranten des Kreises gleich ist, wenn die Chorde dieses Bogens zur Einheit genommen wird. Wie Newton diese Reihe gefunden habe, erhellt nicht aus der kurzen Anzeige, die er davon macht, noch aus andern Stellen seiner Schriften. Auf einem andern Wege, als Newton zu ihr gelangt seyn mag, bringt Euler die Reihe heraus in der Introd. in Anal. infin. T. I. §. 179.

Die Reihe für den Bogen durch die Tangente, und für die Tangente durch den Bogen, fand Jacob Gregory, im Jahre 1670, machte sie aber nicht öffentlich bekannt, sondern theilte sie nur Collins schriftlich mit. Er fand auch die Reihe, welche die Secante durch den Bogen ausdruckt, nebst zwey Reihen, wodurch der Logarithme einer Tangente und Secante unmittelbar berechnet werden können; und noch eine Reihe zur Rectification der Ellipse, wobey er bemerkt, daß es nur nöthig ist, einige Zeichen zu vertauschen, um die Rectification der Hyperbel zu erhalten.

Die Reihe für den Kreisbogen durch die ungeraden Potenzen der Tangente hat Leibnitz auch für sich gefun-

den, und um 1673 seinen mathematischen Freunden mitgetheilt. In den Actis Erud. 1682 machte er sie, doch ohne Beweis, bekannt. Die Reihe für den Sinus durch den Bogen gab er eb. das. im J. 1693. Er findet sie durch Differentiation einer angenommenen Reihe mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten, auf zweyerley Wegen, durch einfache und durch gedoppelte Differentiation. Das letztere Verfahren ist das von Kästner in der Anal. d. Unendlichen, §. 285. gebrauchte. Den Bogen durch den Sinus hätte er auf diese Art auch leicht finden können, ohne die Entwickelung der Potenz $(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ zu gebrauchen, welches er aber nicht scheint unternommen zu haben.

Mehrere Rechner waren nun beschäftigt, den Umfang des Kreises mit sehr großer Genauigkeit zu finden. Abraham Sharp, ein großer Rechner in England, gegen das Ende des 17ten Jahrhunderts, berechnete, nach Halleys Anweisung, aus der Tangente des Bogens von 30 Grad, welche $\sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist, den Umfang bis auf die 72ste Decimalstelle, den Durchmesser zur Einheit genommen. Die ganze Rechnung steht in Sherwin's mathematical Tables, dritte Ausg. von 1742. Eben daselbst wird auch die Berechnung des Umfanges aus der Tangente von 18 Gr. bis zur 45sten Stelle, aus der Tangente von $22\frac{1}{2}$ Gr. bis zur 22sten Stelle, und aus der Tangente von 15 Gr. bis zur 27sten Stelle gleichfalls von Sharp ausgeführt gefunden. Daraus in der Sammlung der Scriptorum Logarithmicorum durch Maseres, im 3ten Bande. Der Aufsatz, worin die erste dieser Berechnungen mitgetheilt wurde, erschien, wie Hutton anführt, um 1706.

Um dieselbe Zeit berechnete Machin, Professor der Astronomie am Gresham College zu London, den Umfang des Kreises bis auf die hundertste Decimalstelle, vermittelst zweyer Reihen, deren Unterschied den Bogen von 45 Grad giebt. Es ist nämlich Arc. $45° =$ 4 Arc. tang $\frac{1}{5}$ — Arc. tang $\frac{1}{239}$. Die daraus entspringende

Tt

Doppelreihe hat Jones in seiner Synopsis Palmariorum Matheseos, 1706, mitgetheilt, doch ohne Erklärung, wie sie gefunden sey. Machins eigene Erklärung seines Verfahrens, die sich handschriftlich erhalten hat, ist von Maseres in die gleich vorher angeführte Sammlung, Vol. III. p. 159. seqq. eingerückt. Jones stellte die Doppelreihe als eine einfache dar, indem er zwey gleichstellige Glieder der beiden Reihen mit dem gemeinschaftlichen Divisor als ein einziges Glied verband. Daher war ein sehr guter Mathematiker, Thomas Simpson, vergebens bemüht, den Grund der Reihe zu entdecken. Sie ist auf dem festen Lande lange unbekannt geblieben. Lange nachher erst fand Euler eine ähnliche Formel, nämlich die, Arc. tang. $45^\circ =$ Arc. tang. $\frac{1}{2}$ + Arc. tang $\frac{1}{3}$, welche aber nicht so schnell convergirende Reihen, wie jene, giebt, Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 142.

Lagny gab in den Abhandlungen der Pariser Akademie vom J. 1719, das Resultat seiner Berechnungen über den Umfang des Kreises, wobey er sich der Tangente des Bogens von 30 Gr. bedient hat. Er sagt erstlich, daß er die Leibnitzische Reihe für den achten Theil des Umfanges schon im J. 1682 gefunden habe. Da sie aber viel zu langsam convergire, so habe er die Tangente von 30 Gr. angewandt, und durch zwey wesentlich verschiedene Operationen, bey der einen durch fortgesetztes Addiren der Glieder, bey der andern durch wechselndes Addiren und Subtrahiren, den Umfang bis zu 127 Decimalstellen, für den Durchmesser, als Einheit, gefunden. Die Rechnung sey mit äusserster Leichtigkeit geführt. Er verspricht den Beweis in einer andern Abhandlung zu geben, welches aber nicht geschehen ist. Euler in der Abhandl. de variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi Comm. Petr. vet. T. IX., glaubt, Lagny habe sich noch besonderer Vortheile zur Abkürzung bedient. In der Zahl für den Umfang ist ein Druck- oder Schreibfehler, da die 113te Decimalstelle die Ziffer 7, anstatt 8 enthält. Diesen Fehler hat Vega entdeckt.

Endlich hat Vega nach der Formel,

$$\text{Arc } 45^\circ = 5 \text{ Arc. tang } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tang } \tfrac{3}{79}$$

den Umfang bis zur 140sten Decimalstelle berechnet, und zur Prüfung die Rechnung noch nach der Formel

$$\text{Arc. } 45^\circ = \text{Arc. tang } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tang } \tfrac{1}{3}$$

bis zur 126sten Decimalstelle vorgenommen. Thesaurus Logarithmorum completus, p. 633. In der Ratcliffschen Bibliothek zu Oxford befindet sich ein Manuscript, worin die Rechnung bis zu der 154sten Decimalstelle getrieben ist, nach dem Berichte des Barons von Zach.

In der That ist also der Umfang des Kreises sehr viel schärfer berechnet, als es je zum praktischen Gebrauche nöthig ist. Dazu sind die ersten zehn oder zwölf Decimalstellen mehr als hinreichend. Denn ein Billiontheilchen ist gegen die Einheit weniger, als eine Secunde Zeit gegen 31000 Jahre. Man gedenke sich eine Kugel A, welche unsere Erdkugel so oft enthält, als diese Sandkörner fassen könnte (man nehme 10 Quinquillionen), ferner eine Kugel B, die A eben so oft enthält, noch eine dritte C, die B eben so oft enthält, und noch eine D, die so groß ist, als 1000 C, so ist durch die von Lagny gefundene Zahl der Umfang bis auf ein Theilchen des Durchmessers berechnet, das in Vergleichung mit demselben nicht größer ist, als ein kleines Sandkorn gegen die Kugel D, und durch die von Vega hinzugefügten Ziffern noch zehn Billionenmahl genauer. Es kann gar nichts helfen, den Werth des Umfanges noch schärfer zu suchen, da einige hundert Ziffern gegen die unendlich vielen noch übrigen immer ein unbedeutender Zusatz sind. Nur das Künstliche einer schnell annähernden Reihe könnte dadurch gezeigt werden.

Goniometrische Formeln zur Berechnung des Umfanges eines Kreises.

Man setze in der Formel für den Bogen durch den Sinus (Cyklometrie, 1.) den Sinus, $y = \frac{1}{2}$, so ist φ ein Bogen von 30 Grad oder der 12te Theil des Umfanges. Es ist

$$\text{Arc. } 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \text{etc.}$$

Der vierte Terminus ist $= \frac{5}{14336} = 0{,}00034 \ldots$

Jeder Terminus ist mehr denn viermahl kleiner als der vorhergehende.

Newton schlug schon die Reihe für die Tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$ zur Berechnung des Umfanges vor. Die Formel a. a. O. 10. giebt

$$\text{Arc. } 30° = \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \text{etc.}\right) \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Es ist nämlich $\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $\text{tang } 30° = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Folglich

$$\pi = \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \text{etc.}\right) \sqrt{12},$$

oder bequemer,

$$\pi = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{3}{9 \cdot 11 \cdot 9^2} + \frac{4}{13 \cdot 15 \cdot 9^3} + \frac{5}{17 \cdot 19 \cdot 9^4} + \text{etc.}\right) \sqrt{12}.$$

Es ist $\sqrt{12} = 3{,}46410\ 16151\ 37754 \ldots$ Die Ausziehung der Quadratwurzel aus 12 macht dieses Verfahren beschwerlich.

Man kann hier auch die Tangente von 18 Gr. gebrauchen, welche eine schneller convergirende Reihe giebt, als die von 30 Gr. Es ist $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$; $\cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$, (Goniometrie, IX.), also $\text{tang } 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}$. Multiplicirt man Zäh-

ler und Nenner mit $\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, so ist tang 18°
$= \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{80}}$. Den Zähler divi-dire man durch $\sqrt{5}-1$, und multiplicire dagegen die Größe unter dem Wurzelzeichen mit dem Quadrate von $\sqrt{5}-1$, d. i. mit $6-2\sqrt{5}$, so ist tang 18° $=$
$\frac{\sqrt{(80-32\sqrt{5})}}{\sqrt{80}} = \sqrt{(1-2\sqrt{\frac{1}{5}})}$. Die gedoppelte Ausziehung der Quadratwurzel ist zwar zuerst beschwerlich; allein die Potenzen der Tangente lassen sich leicht aus einander herleiten. Man setze tang 18° $= t$, so ist $t^2 = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{5}}$, und $2\sqrt{\frac{1}{5}} = 1 - t^2$, also $\frac{4}{5} = 1 - 2t^2 + t^4$, und $t^4 = 2t^2 - \frac{1}{5}$. Daher $t^3 = 2t - \frac{1}{5}t^{-1}$. Hieraus ist $t^5 = 2t^3 - \frac{1}{5}t$; dann $t^7 = 2t^5 - \frac{1}{5}t^3$, u. s. f. so daß die ungeraden Potenzen von t eine rücklaufende Reihe bilden, deren Verhältniß-Scale $+2; -\frac{1}{5}$ ist. Die Potenz t^{-1} ist $\frac{1}{t}$
$= \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$.

Die Ausziehungen der Wurzeln zu vermeiden, zerlege man den Bogen von 45 Gr. in zwey Theile, deren Tangenten rationale sind, und addire die Reihen, wodurch sie mittelst ihrer Tangenten gegeben werden. Die Zerlegung kann auf unendlich viele Arten geschehen. Man wird aber für die beiden Tangenten die einfachsten Brüche zu suchen haben. Die beiden Theile des Bogens von 45 Gr. seyn A und B, so ist $A + B = \frac{1}{4}\pi$, und tang $(A+B)$ $= 1$, zugleich auch tang $(A+B) =$
$\frac{\text{tang}\,A + \text{tang}\,B}{1 - \text{tang}\,A\,.\,\text{tang}\,B}$. (Goniometrie, 34.) Also ist $1 - \text{tg}\,A\ \text{tg}\,B = \text{tg}\,A + \text{tg}\,B$. Setzt man $\text{tg}\,A = \frac{1}{2}$, so ist $\text{tg}\,B = \frac{1}{3}$. Diese beiden Brüche sind so einfach als möglich, und kommen sich nahe genug. Nähme man eine der Tangenten klein gegen die andere, so würde zwar die Reihe für jene schnell convergiren, die Reihe für die andere aber auch desto langsamer.

Es ist

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \text{etc.}$$

Die Glieder dieser Reihen lassen sich sehr leicht berechnen. Jede besteht in der That aus zweyen. Diese vereinige man durch die wirkliche Subtraction der subtractiven Glieder, und theile sie wieder in zwey folgende:

$$A = \frac{11}{8}\left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 4^2} + \frac{1}{9 \cdot 11 \cdot 4^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{12}{8}\left(\frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 4^2} + \frac{2}{9 \cdot 11 \cdot 4^4} + \text{etc.}\right).$$

$$B = \frac{26}{27}\left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9^2} + \frac{1}{9 \cdot 11 \cdot 9^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{32}{27}\left(\frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9^2} + \frac{2}{9 \cdot 11 \cdot 9^4} + \text{etc.}\right).$$

Die Glieder nehmen stärker ab als in jenen Reihen, und ausserdem muß in eben diesen der größere Theil weiter berechnet werden. Wenn $P - Q = p + q$ ist, so ist $P > p$.

Um die Tangenten noch kleiner zu machen, zerlege man den Bogen von 45 Gr. in drey Theile, $2A + B$, von welchen zwey einander gleich genommen sind, um nicht drey verschiedene Reihen anzuwenden. Man setze

$\tang A = t$, $\tang B = u$, so ist $\tang 2A = \frac{2t}{1 - t^2}$.

Es ist aber $\tang 45° = 1 = \frac{\tang 2A + \text{tg} B}{1 - \text{tg} 2A . \text{tg} B}$, also

$\frac{1 - \text{tg} 2A}{1 + \text{tg} 2A} = \tang B$. Setzt man für $\tang 2A$ je-

nen Werth, so ist $(1+2t-t^2)u = 1-2t-t^2$. Nimmt man $t=\frac{1}{2}$, so ist $u=-\frac{1}{7}$, und B ist subtractiv. Es ist nämlich $A = 26^\circ 34'-$, und $B = -(8^\circ 8'-)$. Setzt man $t=\frac{1}{3}$, so ist $u=+\frac{1}{7}$; und $A = 18^\circ 26'+$; $B = 8^\circ 8'-$. Demnach

$$A = \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{1\cdot 7} - \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} - \frac{1}{7\cdot 7^7} + \text{etc.}$$

oder

$$A = \frac{26}{27}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9^2} + \frac{1}{9\cdot 11\cdot 9^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{32}{27}\left(\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9^2} + \frac{2}{9\cdot 11\cdot 9^4} + \text{etc.}\right);$$

$$B = \frac{146}{343}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 49} + \frac{1}{9\cdot 11\cdot 49^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{192}{343}\left(\frac{1}{5\cdot 7\cdot 49} + \frac{2}{9\cdot 11\cdot 49^4} + \text{etc.}\right).$$

Man setze Arc. $45^\circ = 3A + B$, so ist tang $3A$ $= \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ (Goniometrie, IV.), und $\frac{1-\text{tg}\,3A}{1+\text{tg}\,3A}$ $=$ tang B, das ist $\frac{1-3t-3t^2+t^3}{1+3t-3t^2-t^3} =$ tang B. Setzt man t oder tang $A=\frac{1}{4}$, so ist tang $B=\frac{5}{99}$. Hieraus ist $A = 14^\circ 2'+$; $B = 2^\circ 54'-$.

Man setze noch Arc. $45^\circ = 4A + B$, so ist

tang $4A = \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}$, und

$\frac{1-4t-6t^2+4t^5+t^4}{1+4t-6t^2-4t^3+t^4} =$ tang B. Nimmt man $t=\frac{1}{5}$, so ist tang $B = -\frac{1}{239}$, das ist, Arc. 45° $= 4$ Arc. tg $\frac{1}{5}$ — Arc. tg $\frac{1}{239}$. Dieses ist die von Machin zur Berechnung des Umfanges gebrauchte Reihe.

Es ist A = 11° 18′ 36″, und B = — 14′ 23″. Nach der vorher gebrauchten Zusammenziehung und Zerlegung ist

$$A = \frac{74}{125}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.25^2} + \frac{1}{9.11.25^4} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{96}{125}\left(\qquad \frac{1}{5.7.25^2} + \frac{2}{9.11.25^4} + \text{etc.}\right).$$

$$B = \frac{171362}{239^3}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.239^2} + \frac{1}{9.11.239^4} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{228480}{239^3}\left(\qquad \frac{1}{5.7.239^2} + \frac{1}{9.11.239^4} + \text{etc.}\right).$$

In den Reihen für A ist der Vortheil, daß man die Division durch 25 in die Multiplication mit $\frac{4}{100}$ verwandeln kann; die Reihen für B convergiren stark. Es möchte also diese Formel für den Bogen von 45 Gr. die bequemste zur Berechnung des Kreisumfanges seyn. Bürmann von der Berechnung des Kreises, in dem Archiv für Mathematik, 8. Heft.

Um die Formeln für Arc. 45° zu vergleichen, stelle ich sie hier zusammen:

$$\text{Arc. } 45^\circ = \text{Arc. tg } \tfrac{1}{2} + \text{Arc. tg } \tfrac{1}{3}$$
$$\text{Arc. } 45^\circ = 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{3} + \text{Arc. tg } \tfrac{1}{7}$$
$$\text{Arc. } 45^\circ = 3 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{4} + \text{Arc. tg } \tfrac{5}{99}$$
$$\text{Arc. } 45^\circ = 4 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{5} - \text{Arc. tg } \tfrac{1}{239}$$

Man kann dergleichen Formeln noch mehrere machen, vergleichen die schon vorher angegebene,
$\text{Arc. } 45^\circ = 2 \text{ Arc. tang } \tfrac{1}{2} - \text{Arc. tang } \tfrac{1}{7}$; und
$\text{Arc } 45^\circ = 3 \text{ Arc. tang } \tfrac{1}{3} - \text{Arc. tang } \tfrac{2}{11}$, sind.

Hutton in der angeführten Abhandlung über die leichte Berechnung des Kreis-Umfanges, Philos. Trans. 1776, giebt drey dieser Formeln als von ihm gefunden an. Den Reihen, die aus der Eulerischen Formel, Arc. 45° = Arc. tg $\frac{1}{2}$ + Arc. tg $\frac{1}{3}$, entstehen, giebt er folgende Form:

$$\text{Arc. }45° = \frac{4}{10}\left(1 + \frac{4}{3.10} + \frac{8\alpha}{5.10} + \frac{12\beta}{7.10} + \frac{16\gamma}{9.10} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{3}{10}\left(1 + \frac{2}{3.10} + \frac{4\alpha}{5.10} + \frac{6\beta}{7.10} + \frac{8\gamma}{9.10} + \text{etc.}\right),$$

wo α, β, γ, etc. in jeder Reihe das nächst vorhergehende Glied bedeuten. Wegen der Transformation beruft er sich auf die Differential series in Th. Simpson's mathematical dissertations, p. 64. Auch den Reihen aus zwey andern Formeln giebt er eine ähnliche Gestalt.

Vega hat den Umfang des Kreises nach der dritten unter den folgenden Formeln berechnet.

$$\text{Arc. }45° = \text{Arc. tg}\tfrac{1}{7} + 2\text{ Arc tg }\tfrac{1}{3}$$

$$\text{Arc. }45° = 3\text{ Arc. tg}\tfrac{1}{7} + 2\text{ Arc. tg }\tfrac{2}{11}$$

$$\text{Arc. }45° = 5\text{ Arc. tg}\tfrac{1}{7} + 2\text{ Arc. tg }\tfrac{3}{79}$$

$$\text{Arc. }45° = 7\text{ Arc. tg}\tfrac{1}{7} - 2\text{ Arc. tg }\tfrac{29}{278}.$$

Wenn Arc. 45° = m. Arc. tang t + 2 Arc. tg u, gesetzt wird, so muß t so angenommen werden, daß das Verhältniß von t : u rational werde. Die Herleitung dieser Formeln habe ich in dem Archiv der Mathematik, VII Heft gegeben: Formeln zur leichten Berechnung des Umfanges eines Kreises.

Man zerlege den Bogen der Tangente $\frac{1}{5}$ in 2 Arc. tg $\frac{1}{10}$ — Arc. tg u, und suche die Tangente u.

Es ist $\text{tang } 2\text{ Arc. tg }\frac{1}{10} = \frac{2:10}{1 - 1:100} = \frac{20}{99}$.

Also die Tangente der Summe jener Bogen, nämlich $\frac{1}{5} = \frac{20:99 - u}{1 + 20u:99} = \frac{20 - 99u}{99 + 20u}$. Hieraus folgt $u = \frac{1}{515}$, so daß $\text{Arc. tg}\frac{1}{5} = 2\text{ Arc. tg}\frac{1}{10} - \text{Arc. tg}\frac{1}{515}$ ist.

Folglich ist

$$\text{Arc. } 45^\circ = 8 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{10} - 4 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{515} - \text{Arc. tg } \tfrac{1}{239}.$$

Diese Formel hat zwar drey Theile, allein alle Reihen in derselben convergiren sehr schnell. Sie ist mir von einem sehr geschickten Analysten, Herrn Magister Buzengeiger in Ansbach, mitgetheilt worden.

Methoden, die goniometrischen Linien zu berechnen.

Den ersten Versuch in der Berechnung der goniometrischen (trigonometrischen) Linien treffen wir in des Ptolemäus Astronomie an, im 1. Buche, wo eine Tafel der Chorden von halben zu halben Graden geliefert ist. Die Chorden werden durch Sexagesimaltheile des Halbmessers angegeben, z. B. ch. $45^\circ = 45.55.19$, das ist

$\frac{45}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{19}{60^3}$ oder 0,765366 des Halbmessers. Die Hälfte 0,382683 ist der Sinus von $22^\circ\,30'$ wie in unsern Tafeln. In derselben Tafel ist für jede der angegebenen Chorden auch das Increment auf eine Minute beygefügt, der Interpolation wegen. So steht bey 45° das Increment 0.58.0, das ist $\frac{58}{60^3} = 0,0002685$. Die Hälfte hiervon ist der Unterschied der Sinus von $22^\circ\,30'$ und $22^\circ\,30'\,30''$. Nach unsern Tafeln ist dieser 0,0001344.

Ptolemäus gebraucht zu dieser Berechnung die Lehrsätze von der Zusammensetzung der Bogen mittelst ihrer Chorden. Der in der Goniometrie (25.) zur Grundlage genommene geometrische Satz ist es bey ihm auch. Die Chorde der Hälfte eines Bogens aus der Chorde des Bogens findet er folgendergestalt. Zuerst sucht er die Chorde des Complements des Bogens A zum Halbkreise; den Unterschied derselben vom Durchmesser halbirt er, so ist die Chorde von $\frac{1}{2}$A die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und diesem halben Unterschiede. Dieser Satz kommt mit der Formel in Goniometrie (36.) überein.

Die numerischen Werthe der Seiten des Vierecks, Sechsecks, Fünfecks und Zehnecks dienen ihm die Rechnung daran zu knüpfen. Wo er genöthigt ist, eine Chorde durch Interpolation zu finden, z. E. bey der Chorde von 1 Gr. sucht er Gränzen, zwischen welchen sie enthalten ist. Seine Tafeln geben die Chorden innerhalb $\frac{1}{216000}$ des Halbmessers, oder zwischen 4 bis 5 Milliontheilchen desselben. (Vergl. Kästners geometrische Abhandl. 1 Samml. S. 525. II. S. 354.).

Vor Ptolemäus hat man sich schon mit der Berechnung der Chorden beschäftigt, wovon aber nichts zu uns gekommen ist. Hipparchus (im 2ten Jahrh. vor C. G.) hat, nach Theons Bericht (Comm. in Almag. L. I. c. 9), die Lehre von den Chorden des Kreises in zwölf Büchern abgehandelt. Menelaus (zu den Zeiten Trajans) hat auch sechs Bücher von den Chorden des Kreises geschrieben, die nicht mehr vorhanden sind. Von diesen Verfassern hat Ptolemäus ohne Zweifel seine Lehrsätze genommen; die Tafel der Chorden scheint er selbst berechnet zu haben. Theon rühmt die Geschicklichkeit, womit Ptolemäus die Berechnung der Chorden auf einige wenige und bequeme Sätze gegründet hat.

Die Araber führten statt der Chorden die Hälften derselben ein. Wo nur spitze Winkel vorkommen, da ist es gleichgültig, ob das Dreyeck zwischen dem Durchmesser, der Chorde eines Bogens und der Chorde seines Complements zum Halbkreise, oder das diesem ähnliche, zwischen dem Halbmesser, Sinus und Cosinus gebraucht wird. Allein diese, im Anfang vielleicht unnöthige, Veränderung hat die Folge, daß stumpfe Winkel, und selbst Winkel über zwey Rechte, bequem in Rechnung gebracht werden können.

Georg Purbach (auch Peurbach, oder wie er auf dem Titel einer seiner Schriften heißt, Burbach, gebürtig aus einem Dorfe dieses Namens an der österreichisch-bäyrischen Gränze, gest. 1461) verließ die alte Sexagesimaltheilung des Halbmessers, dem er dagegen 600000 Theile gab. Er berechnete die Sinus der Winkel von 10 zu

10 Minuten. (Gassendi in den Lebensbeschreibungen einiger Astronomen, pag. 341. Weidleri hist. Astron. p. 301. Kästner glaubt in den geom. Samml. II. S. 541. und Gesch. der Math. I. S. 537, daß Purbachs Tafeln durch alle Minuten gegangen seyn möchten). Diese Tafel der Sinus scheint nicht gedruckt zu seyn. In der Schrift de Quadrato geometrico, die zu Nürnberg 1516 gedruckt, und auch einer sehr seltenen Sammlung einiger Schriften von Regiomontanus (Scripta clariss. Mathematici M. Jo. Regiomontani. Norib. 1544. 4). beygefügt ist, liefert Purbach eine Tafel der Winkel, deren Tangente eine der Zahlen von 0 bis 1200 ist, den Halbmesser = 1200 genommen, in Graden, Minuten und Secunden, also die Winkel von 0° bis 45°. Er hat diese Tafel aus seiner Tafel der Sinus hergeleitet. Sie ist zum Gebrauche bey einem Winkelmesser bestimmt, das die Form eines Quadrats hat, mit einem Diopternlinial, das sich um einen Winkelpunct desselben drehen läßt. Von seiner Tafel der Sinus sagt er, daß der Sinus totus darin 600 000 genommen sey. Gassendi, Weidler und Bailly setzen 6000000.

Johann Müller, gewöhnlich Johannes Regiomontanus (von seinem Geburtsorte, Königsberg in Franken, gest. 1476) berechnete zwey Sinustafeln, eine für den Halbmesser sechs Millionen, und eine andere für den Halbmesser zehn Millionen. Die Bogen gehen von Minute zu Minute. Die Tafeln sind, nebst einer Abhandlung über die Berechnung der Sinus, und einer dahin gehörigen von Purbach verfaßten Schrift zu Nürnberg 1541 von Schoner herausgegeben. Ein Auszug findet sich bey des Regiomontanus Tabulis directionum profectionumque, Vitemb. 1584. die schon im Jahre 1490 zu Augsburg herausgekommen sind. Hier hat der Halbmesser 60000 Theile. Die Unterschiede für eine Secunde sind in Tausendtheilchen eines dieser Theile des Halbmessers beygefügt. Z. B. sin 31° 1' = 30917 mit dem Unterschiede 249. Dieser mit 60 multiplicirt giebt 14,940 oder 15 nächstens, welche zu jenem Sinus addirt

30932 als sin 31° 2' geben. Bey der Berechnung der Sinus hat Regiomontanus den Sinus totus 600 Millionen groß genommen, um die Zahlen in den Tafeln bis in der letzten Ziffer genau zu erhalten. Die Sinus leitete er, wie Ptolemäus, aus den Seiten einiger Vielecke durch Halbirungen und Zusammensetzuugen der Winkel her, bis daß er sie von 45 zu 45 Min. bekam, Den Sinus von 1 Grad findet er dadurch, daß sin 1° kleiner als $\frac{4}{3}$ sin 45', und größer als $\frac{1}{3}$(sin 90' + 2 sin 45') ist. So konnte er ferner die Sinus von 15 zu 15 Min erhalten, und dann durch geschicktes Einschieben die zwischen liegenden. Dieses hat er auch bey den Sinus der Winkel, deren Unterschied 45' beträgt, zugleich angewandt. Er zeigt sein Verfahren nur mit wenigen Worten an, daher Kästner in der Geschichte d. Mathem. I. S. 553 gesteht, daß er Regiomontans Vorschrift wegen der Unterschiede nicht vollkommen verstehe. Das Verfahren ist mit den Gründen, worauf es beruht, folgendes. Es seyn drey Winkel, A, B, C, in arithmetischer Proportion, zwischen welchen die Winkel α, β, γ, δ, in arithmetischer Progression mit jenen und unter sich eingeschoben werden, nämlich α, β zwischen A, B, und γ, δ zwischen B, C. Nun ist $\frac{1}{3}(\sin B - \sin A)$ kleiner als $\sin\alpha - \sin A$, aber größer als $\sin B - \sin\beta$, daher $\frac{1}{3}(\sin B - \sin A) = \sin\beta - \sin\alpha$ nahe. Gleichergestalt ist $\frac{1}{3}(\sin C - \sin B) = \sin\delta - \sin\gamma$ nahe. Man nehme die Unterschiede I. $\sin\beta - \sin\alpha$; II. $\sin B - \sin\beta$; III. $\sin\gamma - \sin B$; IV. $\sin\delta - \sin\gamma$, in arithmetischer Progression, so werden, weil die beiden äussern Glieder, der Voraussetzung gemäß, bekannt sind, die beiden mittlern leicht gefunden, also auch $\sin\beta$ und $\sin\gamma$, daraus dann auch $\sin\alpha$ und $\sin\delta$. Das Verfahren giebt die eingeschalteten Sinus so weit richtig, als es richtig ist, daß die zweyten Unterschiede sich gleich sind.

Bis zum Regiomontan enthielten die trigonometrischen Tafeln nur die Sinus. Er fügte noch die Tangenten hinzu. Die Tafel derselben nannte er wegen ihres nützlichen Gebrauchs, tabulam foecundam. Bey den vorher an-

geführten astronomischen Tafeln des Regiomontanus ist eine solche für den Halbmesser 100000, aber nur von Grad zu Grad enthalten.

Beträchtlich weiter gieng Georg Joachim von seinem Vaterlande gewöhnlich Rhäticus, genannt, (geb. 1514 zu Feldkirch in einem Theile des alten Rhätien; gest. 1576), der aber doch sein mühseliges großes Werk nicht vollendete. Er nahm sich vor, die Sinus, Tangenten und die von ihm zuerst eingeführten Secanten *), für einen in 10000 Millionen getheilten Halbmesser von 10 zu 10 Secunden zu liefern. Bey der Berechnung selbst nahm er, zur Sicherheit bis auf die letzte Ziffer, den Halbmesser 1000 Billionen groß an. Als er über der Ausarbeitung verstarb, nahm sein Schüler und Gehülfe, Valentin Otho, sich des Werkes an, zu dessen Vollendung ihm von dem Kaiser Maximilian II. die Kosten bewilliget wurden. Nach dem Tode dieses Kaisers konnte man am österreichischen Hofe für trigonometrische Tafeln nichts thun. Otho bekam einen Ruf nach Wittenberg als Professor der Mathematik mit dem Versprechen der zu seiner Arbeit nöthigen Kosten, worauf er sich dahin begab. Allein wegen gewisser Vorfälle mußte er nebst einigen andern diesen Ort verlassen. Er reisete einige Jahre herum, bis er von D. Caspar Peucer in die Pfalz am Rhein zu kommen eingeladen ward. Hier erhielt er von dem Pfalzgrafen Johann Casimir, dem Vormunde des noch minderjährigen Kurfürsten Friedrich IV. die Kosten zur Vollendung und Herausgabe des Werks. Er gab seines Lehrers und seine eigene Arbeit in einem großen Folianten heraus, unter dem Titel: Opus Palatinum de triangulis, a Georg. Joach. Rhetico coeptum; L. Valentinus Otho Principis Palatini Friderici IV. Electoris Mathematicus consummavit, 1596. In diesem Werke sind enthalten von Rhäticus selbst, Libri tres de fabrica canonis doctrinae triangulorum; de triquetris recta-

*) Zu gleicher Zeit mit Rhäticus berechnete Maurolycus in Sicilien (gest. 1575) eine Tafel der Secanten, die er tabulam beneficam nannte.

rum linearum in planitie liber unus; de triangulis globi cum angulo recto libri quatuor. Dann von Otho, de triangulis globi sine angulo recto libri quinque, quibus tria meteoroscopia numerorum accesserunt. Diese Meteoroscopia sind Tafeln zur sphärischen Trigonometrie gehörig. Auf diese folgt der große Canon doctrinae triangulorum ad decades secundorum scrupulorum et ad partes 10000 000 000. Dieser enthält die Sinus, Tangenten und Secanten, in drey Reihen oder Abtheilungen. Die erste Reihe enthält die Sinus und Cosinus der Winkel von 0 bis 45 Gr. unter den Benennungen, Perpendiculum et Basis. Die zweyte Reihe enthält die Secanten und Tangenten derselben unter den Benennungen, Hypotenusa und Perpendiculum; die dritte Reihe die Cosecanten und Cotangenten derselben unter den Benennungen, Hypotenusa und Basis. Diese Überschriften stehen über den Columnen; unten sind die Benennungen, Perpendiculum und Basis vertauscht, da die Complemente jener Winkel von unten auf gezählt werden, wie es in den neuern Tafeln gewöhnlich ist. Die Unterschiede aller dieser Größen sind beygefügt.

Die Berechnung der goniometrischen Linien, ohne die Hülfe der Analysis, zeigt die Methode des Rhäticus am vollständigsten. Die dazu nöthigen Zahlen sind mit den Resultaten der arithmetischen Operationen größtentheils aufgestellt, so daß man die ganze Rechnung in ihren einzelnen Theilen verfolgen kann. Ausser den Lehrsätzen seiner Vorgänger hat Rh. noch zwey Sätze über die Sinus und Cosinus, deren Winkel gleichförmig zunehmen, (de fabrica canonis, prop. 9.). Der eine ist, in unsere Formularausdrücke gebracht: $\cos(a + nb) = \cos(a + (n-2)b) - 2\sin b.\sin(a + (n-1)b)$. Der zweyte ist: $\sin(a + nb) = 2\cos b.\sin(a + (n-1)b) - \sin(a + (n-2)b)$. (Goniometrie, 58, 55).

Rhäticus findet auch durch algebraische Rechnung (wie er es nennt, per maxima Logistices praecepta) den Sinus der Hälfte und des dritten Theils aus dem Sinus

eines gegebenen Bogens. Bey der Halbirung zieht er eine längere Rechnung einer kürzern vor, weil er glaubt, daß jene mehr Sicherheit gewähre. Er addirt das Quadrat des Sinus versus eines Bogens A zu dem Quadrate des Sinus, zieht aus der Summe die Quadratwurzel, und halbirt diese, wodurch er den Sinus von $\frac{1}{2}$ A erhält. Kürzer ist die Rechnung nach der Formel $1 - \cos A = 2 \sin \frac{1}{2} A^2$, und ohne Zweifel eben so sicher. Bey kleinen Winkeln bedient Rhäticus sich einer algebraischen Auflösung.

Aus den Seiten des Zehnecks und Sechsecks leitet Rhäticus durch Halbirung und Zusammensetzungen der Winkel die Sinus von anderthalb zu anderthalb Graden her. Durch die Verbindung des Winkels von 45′, dessen Sinus und Cosinus durch fortgesetzte Halbirung des Winkels von 12° gefunden sind, werden die Sinus und Cosinus von 45 zu 45 Min. gefunden. Hierauf nimmt er 43 successive Halbirungen des Winkels von 45′ vor, und findet die Sinus und Cosinus der Theile. Der Sinus des letzten dieser Winkel ist einer der Theile, deren der Halbmesser 1000 Billionen enthält. Nun ist seine Absicht, den Sinus und Cosinus von 1 Min. genau zu finden. Dazu geht er folgenden Weg. Aus den Sinus und Cosinus der Winkel, 33° 45′ und 22′ 30″, findet er den Sinus und Cosinus von 34° 7′ 30″. Unter den Winkeln, die durch die fortgesetzte Halbirung von 45′ entstehen, sind drey, deren Summe ist 12″. 11. 41. 22. etc. wo die abgesonderten Zahlen Sexagesimaltheile sind. Diesen Winkel nenne man α. Der Sinus desselben wird aus den Sinus und Cosinus der Theile berechnet. Ferner giebt die sechste Halbirung den Winkel 42″. 11. 15. Dieser sey $= \beta$. Der Unterschied von β von α ist 29″. 59. 33. 37. etc. $= \gamma$. Da dieser Winkel sehr wenig von 30″ verschieden ist, so kann man die Proportion setzen, $\gamma : 30'' = \sin \gamma : \sin 30''$, wo $\sin \gamma$ aus den Sinus und Cosinus von α und β gefunden ist. Die Verbindung der Winkel 34° 7′ 30″ und 30″ giebt $\sin$ 34° 8′ und $\cos$ 34° 8′. Aus diesen werden die Sinus und Cosinus der successiven Winkel her-

geleitet, bis zu dem von 1 Min. Nun ist Rhäticus im Stande, die Sinus und Cosinus der Winkel von 1 bis 45 Min. zu berechnen. Mit Hülfe dieser konnte er darauf die Reihe von 45 zu 45 Min. für jede Minute ausfüllen. Nun waren noch die Sinus und Cosinus der Winkel, die 10, 20, 30, 40, 50 Secunden über die Grade und Minuten enthalten, zu berechnen. Zuerst sucht Rhäticus den Sinus von 5 Sec. folgendermaßen. Er nimmt aus dem Canon der Halbirungen von 45 Min. vier Winkel heraus, deren Summe ist 4'': 56. 37. 51. etc. und berechnet den Sinus desselben aus den Sinus und Cosinus der Theile. Aus dem Sinus findet er, wie vorher bey dem Sinus von 30 Sec., durch eine einfache Proportion den Sinus von 5 Sec. und aus diesem auch den Cosinus. Da aus sin 30'' der sin 15'' gefunden wird, so ergeben sich nun sin 10''; sin 20'', und ferner sin 40''; sin 50'', nebst den Cosinus dieser Winkel. Da diese gefunden sind, so werden die Sinus und Cosinus von 10 zu 10 Sec. in der Reihe derer von Minute zu Minute eingeschaltet, mittelst der Lehrsätze von den Sinus und Cosinus der Summe oder des Unterschiedes zweyer Winkel.

Die Tangenten und Secanten findet Rhäticus unmittelbar durch die Proportionen, cos : sin = rad : tang. und cos : rad = rad : sec. Auf ähnliche Weise findet er auch die Cotangenten und Cosecanten. Nach Schulze's Versicherung (Einleit. zu seinen Tafeln) sind von den Cotangenten in dem Op. Palat. im Anfang des Quadranten nur die 5 bis 6 ersten Stellen richtig. Hobert und Ideler sagen in der Einleitung zu ihren neuen Tafeln, daß sie cot 0° 27' = 127, 321 336 4689 gefunden haben, da dieselbe in dem Op. Palat. 127, 321 336 2801 ist.

Ein Canon der Sinus für den Halbmesser 1000 Billionen, von 10 zu 10 Secunden mit den ersten, zweyten und dritten Unterschieden, ist in Pitisci thesauro mathematico (Francof. 1613.) enthalten. Es ist der von Rhäticus selbst berechnete, aus dem Nachlasse desselben noch erhaltene. Kästners geometrische Abhandlungen I. S. 573. In dem Opere Palatino sind die Sinus;

un=

Tangenten und Secanten für einen so großen Halbmesser von 45 zu 45 Min. enthalten.

Die Analysis des Unendlichen hat zu der Berechnung der goniometrischen Linien viel leichtere und kürzere Wege eröffnet, als jene unverdrossenen Rechner zu nehmen genöthigt waren. Mittelst der Formeln, welche diese Linien durch ihre Bogen darstellen, kann man jede unabhängig von den andern finden, so genau als man nur will, ohne einen, bloß zur Sicherheit bey den Resultaten nöthigen Aufwand von Berechnungen. Wollte man den ganzen Canon oder ein Stück desselben berechnen, so kann man diejenigen Größen, zwischen welchen die übrigen eingeschaltet werden sollen, vortheilhaft auswählen, und hat zur Einschaltung mehrere, sowohl bequeme als sichere Methoden.

Um die Berechnung der goniometrischen Linien zu erleichtern, hat Euler die unveränderlichen Factoren in den Formeln für dieselben sehr weit berechnet, in der Introd. in Anal Infin. T. I. cap. 8. Die Formeln bekommen dadurch folgende Gestalt. Es sey für den Halbmesser als Einheit der Bogen $= \varphi$, und φ verhalte sich zum Quadranten wie m zu n,

$$\text{so ist } \varphi = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ und es ist}$$

$\sin\varphi =$		$\cos\varphi =$	
$+\frac{m}{n}$	$\cdot$ 1,570796 3267	$+$	1,000000 0000
$-\frac{m^3}{n^3}$	$\cdot$ 0,645964 0975	$-\frac{m^2}{n^2}$	$\cdot$ 1,233700 5501
$+\frac{m^5}{n^5}$	$\cdot$ 0,079692 6262	$+\frac{m^4}{n^4}$	$\cdot$ 0,253669 5079
$-\frac{m^7}{n^7}$	$\cdot$ 0,004681 7541	$-\frac{m^6}{n^6}$	$\cdot$ 0,020863 4807
$+\frac{m^9}{n^9}$	$\cdot$ 0,000160 4411	$+\frac{m^8}{n^8}$	$\cdot$ 0,000919 2602
$-\frac{m^{11}}{n^{11}}$	$\cdot$ 0,000003 5988	$-\frac{m^{10}}{n^{10}}$	$\cdot$ 0,000025 2020
$+\frac{m^{13}}{n^{13}}$	$\cdot$ 0,000000 0569	$+\frac{m^{12}}{n^{12}}$	$\cdot$ 0,000000 4710
+ etc.		+ etc.	

Tang φ =			Cot φ =		
+	$\frac{2mn}{nn-mm}$	.0,636619 7723	+	$\frac{n}{m}$	.0,636619 7723
+	$\frac{m}{n}$	.0,297556 7820	−	$\frac{4nn}{4nn-mm}$	.0,318309 8861
+	$\frac{m^3}{n^3}$	.0,018688 6502	−	$\frac{m}{n}$	.0,205288 8894
+	$\frac{m^5}{n^5}$	.0,001842 4752	−	$\frac{m^3}{n^3}$	.0,006551 0747
+	$\frac{m^7}{n^7}$	.c,000197 5800	−	$\frac{m^5}{n^5}$	.0,000345 0292
+	$\frac{m^9}{n^9}$	.0,000021 6977	−	$\frac{m^7}{n^7}$	.0,000020 2791
+	$\frac{m^{11}}{n^{11}}$	.0,000002 4011	−	$\frac{m^9}{n^9}$	.0,000001 2366
+	$\frac{m^{13}}{n^{13}}$	.0,000000 2664	−	$\frac{m^{11}}{n^{11}}$	.0.000000 0764
+	$\frac{m^{15}}{n^{15}}$	.0,000000 0295	−	$\frac{m^{13}}{n^{13}}$	.0,c00000 0047
+ etc.			− etc.		

Die Formeln für sin φ und cos φ sind aus denen in Cyklometrie (5. 6.) die für tang φ und cot φ ans denen das. 38, 39. hergeleitet. Bey Euler sind die numerischen Factoren für Sinus und Cosinus bis zur 28sten Decimalstelle; für Tangente und Cotangente bis zur 13ten angegeben.

Da man jetzt damit umgeht, das Decimalsystem in allen mathematischen Rechnungen einzuführen, so hat dieses eine neue Berechnung der geometrischen Linien für die Decimal-Eintheilung des Quadranten veranlaßt. Deutschland ist darin Frankreich zuvorgekommen. Hobert, Professor der Mathematik und Physik an der Militär-Akademie des Artilleriecorps zu Berlin, und Ideler, Astronom der Preuß. Akademie der Wissenschaften, haben mit der größten Genauigkeit und Unverdrossenheit neue trigonometrische Tafeln für die Decimaleintheilung des Quadranten berechnet, und zu Berlin 1799 herausgegeben. Von 0 bis 0, 03 des

Quadranten gehen die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten durch alle einzelne Hunderttausendtheilchen des Quadranten, das ist, durch je 3″, 240 der Sexagesimaltheilung, von 0, 03 an durch alle einzelne Zehntausendtheilchen. Die Berechnungsart ist hauptsächlich eine Interpolation einer Reihe von 25 Sinus und Cosinus in der ersten Hälfte des Quadranten. Diese sind bis auf 30 Decimalstellen berechnet. Die Unterschiede sind bis zum sechsten genommen; und in den ersten drey Hunderttheilen, wo die Glieder der Hauptreihe sich viel näher kommen, bis zum fünften. Die Herausgeber haben ihr Verfahren in der sehr lehrreichen Einleitung ausführlich beschrieben.

Um die Anwendung verschiedener Hülfsmittel bey einer so weitläuftigen Rechnung zu zeigen, will ich ein Verfahren beschreiben, welches sie, ohne Gefahr für die Genauigkeit, sehr abkürzt.

Wenn die Sinus und Cosinus nach der Decimaleintheilung des Quadranten berechnet werden sollen, so suche man

I. Dieselben für 0,1; 0,01; 0,001; 0001; 0,00001 des Quadranten nach den gleich vorher mitgetheilten Eulerischen Formeln. Dieses geschieht sehr leicht.

II. Man berechne die Sinus und Cosinus der Bogen 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5, nach den Formeln

$$\sin n A = \sin (n-2) A + 2 \sin A . \cos (n-1) A,$$

$$\cos n A = \cos (n-2) A - 2 \sin A . \sin (n-1) A,$$

welche man aus den Formeln (Goniometrie 56, 58.) erhält, wenn daselbst $a = 0$, und A für b gesetzt wird. Hier ist $A = 0,1$ des Quadranten, und $\sin A$ ein beständiger Factor. Das letzte Glied der Reihe, $\sin 0,5$, und $\cos 0,5$ ist $= \sqrt{0,5}$, welches leicht berechnet ist, und zur Prüfung der Rechnung dient.

III. Man schalte zwischen den Sinus und Cosinus von 0; 0,1; 0,2; 0,3, des Quadranten neue Glieder ein, mittelst des Sinus und Cosinus von 0, 01 des Quad. nach den Formeln (a. a. O.)

$\sin(a+nb) = \sin(a+(n-2)b) + 2\sin b.\cos(a+(n-1)b)$

$\cos(a+nb) + \cos(a+(n-2)b) - 2\sin b.\sin(a+(n-1)b)$.

Hier ist $b = 0{,}01$ des Quadranten, und a ein Glied der zu ergänzenden Reihe. Die Sinus und Cosinus brauchen nur bis 0, 25 des Quadranten berechnet zu werden, da nach (Goniometrie 50)

$$\sin(\tfrac{1}{2}R - A) = \tfrac{1}{2}(\cos A - \sin A)\sqrt{2}$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}R - A) = \tfrac{1}{2}(\sin A + \cos A)\sqrt{2}$$

ist. Die schon berechneten Glieder der ursprünglichen Reihe dienen zur Prüfung der Rechnung.

IV. In der derivirten Reihe der S. und C. von 0; 0, 01; 0, 02; . . . . 0,24; 0, 25, schalte man wieder je neun Glieder ein, mittelst des S. und C. von 0,001, nach den gleich vorher angeführten Formeln.

V. Man schalte in der zweyten derivirten Reihe entweder durchgehends, oder in einem Theile derselben, nach dem Grade der vorgesetzten Genauigkeit, je neun Glieder ein; oder bediene sich, wenn die Differenzen klein genug sind, zugleich folgender Differenzen-Formeln. Es sey φ ein Bogen für den Halbmesser als Einheit; $\Delta\varphi$ ein endliches Wachsthum desselben; $\Delta\sin\varphi$ das zugehörige Wachsthum des Sinus, und $-\Delta\cos\varphi$ die zugehörige Abnahme des Cosinus, so ist (Differenzen-Rechnung, 27. 28.)

$$\Delta\sin\varphi = \cos\varphi(\Delta\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) - \sin\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \tfrac{1}{24}\Delta\varphi^4 + \text{etc.})$$
$$-\Delta\cos\varphi = \sin\varphi(\Delta\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) + \cos\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \tfrac{1}{24}\Delta\varphi^4 + \text{etc.})$$

In diesem Falle schalte man durch die goniometrischen Formeln nur vier Glieder statt neun ein, welches 5 Intervalle giebt, und fülle die Intervalle mittelst der Differenzenformeln aus.

VI. In eben diesem Falle lassen sich auch folgende indirecte Formeln zum Einschalten anwenden. Wenn drey

Winkel, A, B, C, in arithmetischer Proportion sind, so ist (Goniometrie, III.)

$$\sin B = \tfrac{1}{2}(\sin A + \sin C) + 2 \sin B . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

$$\cos B = \tfrac{1}{2}(\cos A + \cos C) + 2 \cos B . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

wo man in dem zweyten Terminus des zweyten Theils der Gleichung für sin B und cos B den ersten Terminus setzen, oder sie aus schon berechneten Tafeln, so weit diese sie liefern, zur schärfern Berechnung nehmen mag, wofern nur $\sin \frac{1}{2}(B - A)^2$ klein genug ist, um den Fehler in dem Factor sin B oder cos B dem vorgesetzten Grade der Genauigkeit unschädlich seyn zu lassen.

VII. Man wird sich auch mit Vortheil der Formeln für die Anfangsglieder der Differenzenreihen von Sinus und Cosinus, deren Winkel in arithmetischer Progression sind, aus Goniometrie III. bedienen können. Nämlich, wenn die Winkel sind A, $A + \alpha$, $A + 2\alpha$, $A + 3\alpha$, etc. so ist $\Delta \sin A = + 2 \cos(A + \alpha) . \sin \alpha$; $\Delta^2 \sin A = - 4 \sin(A + 2\alpha) . \sin \alpha^2$; $\Delta^3 \sin A = - 8 \cos(A + 3\alpha) . \sin \alpha^3$; $\Delta^4 \sin A = + 16 \sin(A + 4\alpha) . \sin \alpha^4$; u. s. f.

VIII. Wenn die dritten Unterschiede der Glieder in einer derivirten Reihe nahe sich gleich sind, so interpolire man auf folgende Art. Es seyn Q; $Q + \alpha$; $Q + \beta$; $Q + \beta + \omega$, vier Glieder einer Reihe, in den Stellen, die durch 0; 1; 10; 11 bezeichnet werden; zwischen diesen soll in der Stelle x das Glied $Q + y$ eingeschaltet werden, so ist, wenn die dritten Unterschiede der Glieder, bey gleich großen Abständen, unveränderlich sind,

$$y = \frac{x}{10} \beta + \frac{x(10 - x)(11 - x)}{90} \left(\alpha - \frac{\beta}{10}\right)$$

$$+ \frac{x(10 - x)(x - 1)}{110} \left(\frac{\beta}{10} - \omega\right),$$

(s. Einschaltung.). Man schalte nämlich nach den geometrischen Formeln für $\sin(A + B)$ und $\cos(A + B)$ bloß das erste von allen neun Gliedern nach jedem Gliede der zu ergänzenden Reihe ein; dieses ist, was hier durch $Q + \alpha$ und $Q + \beta + \omega$ bezeichnet ist, da Q und $Q + \beta$ zwey

nächste Glieder der Reihe selbst sind. Die Stellen der beiden letztern sind 0 und 10, jener 1 und 11. Der erste Theil der Formel ist der einfache Proportionaltheil; die beiden andern sind die Verbesserungen wegen des ungleichförmigen Zunehmens oder Abnehmens, durch den Unterschied von dem mittlern Werthe der Veränderungen. Die Vorzeichen in der Formel sind auf Sinus eingerichtet. Für Cosinus nehme man die Veränderungen bloß nach der Quantität, ohne die Vorzeichen von α, β, $\beta + \omega$ und y zu ändern, aber der zweyte und dritte Theil der Formeln sind subtractiv zu nehmen. Wo es nöthig scheinen sollte, eine Probe der Interpolation zu haben, berechne man den Sinus und Cosinus des mittelsten Winkels nach den Formeln für die Zusammensetzung desselben, oder folgendergestalt. Es seyn A, B, C, drey Winkel in arithmetischer Proportion, so ist

$$\tfrac{1}{2}(\sin A + \sin C)\sec\tfrac{1}{2}(C - A) = \sin B,$$

$$\tfrac{1}{2}(\sin A + \cos C)\sec\tfrac{1}{2}(C - A) = \cos B,$$

aus Goniometrie (28 u. 14.). Für die Secanten kann man nach der Formel (Cyklometrie, 22.) sich eben solche Reihen, wie die Eulerischen für Sinus und Cosinus, berechnen, die aber nur aus zwey oder drey Gliedern zu bestehen brauchen, weil C — A hier ein kleiner Winkel ist.

IX. Wenn die zweyten Unterschiede einer derivirten Reihe beständig sind, so interpolire man sie folgendergestalt. Es seyn Q; Q + α; Q + β, drey nächste Glieder einer solchen Reihe, deren Stellen durch 0, 10, 20 bezeichnet werden; ein einzuschaltendes Glied in der Stelle x sey, = Q + y, so ist

$$y = \frac{x}{10}\alpha + \frac{x(10 - x)}{100}(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta),$$

$$\text{oder } y = \frac{x}{10}\alpha - \frac{x(x - 10)}{100}(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta).$$

X. Endlich, wo die ersten Unterschiede sich gleich bleiben, braucht man nur die einfachen Proportionaltheile den berechneten Gliedern zuzusetzen.

Bey den Tangenten und Cotangenten entbehrt man den Vortheil, das Einschalten durch eine genaue goniometrische Formel unmittelbar zu bewerkstelligen. Aber mittelst der schon berechneten Sinus und Cosinus läßt es sich bequem ausrichten. Denn es ist aus Goniometrie (31.)

$$\text{tang}(\varphi+\omega)-\text{tang}\,\varphi=\frac{\sin\omega}{\cos\varphi.\cos(\varphi+\omega)},$$

$$\cot\varphi-\cot(\varphi+\omega)=\frac{\sin\omega}{\sin\varphi.\sin(\varphi+\omega)}.$$

Hat man mittelst der Eulerischen Formeln eine Reihe von Tangenten und Cotangenten für Winkel in arithmetischer Fortschreitung berechnet, so kann man die einzuschaltenden Glieder ganz leicht und genau durch diese Formeln finden, indem man für den Einschaltungswinkel ω nach und nach kleinere Werthe setzt.

Man hat nur nöthig, die Tangenten und Cotangenten der Winkel unter $\frac{1}{3}$ des Quadranten zu berechnen. Denn es ist (Goniometrie, 48.)

$$\cot(\tfrac{1}{2}R-A)-\text{tang}(\tfrac{1}{2}R-A)=2\,\text{tang}\,2A.$$

Nimmt man $2A=\frac{1}{3}R+2\alpha$, wo 2α kleiner als $\frac{1}{3}R$ ist, so ist $\frac{1}{2}R-A=\frac{1}{3}R-\alpha$. Man findet also aus den Tangenten und Cotangenten der Winkel zwischen $\frac{1}{6}R$ und $\frac{1}{3}R$ die Tangenten eben so vieler Winkel zwischen $\frac{1}{3}R$ und $\frac{2}{3}R$, deren Unterschiede aber doppelt so groß als die Unterschiede jener sind. Um die Tangenten der in der Mitte zwischen ihnen liegenden Winkel auch zu finden, dient folgende Formel für die Tangenten dreyer Winkel, A, B, C, die in arithmetischer Proportion stehen, (Goniometrie, III.),

$$\text{tang}\,B=\tfrac{1}{2}(\text{tg}\,A+\text{tg}\,C)-\frac{\text{tg}\,B.\sin(B-A)^2}{\cos A.\cos C}.$$

In dem zweyten Terminus des zweyten Theils mag man, wegen des kleinen Factors, $\sin(B-A)^2$, für den Factor tang B nur einen nahe kommenden Werth aus den schon berechneten Tafeln setzen.

Da die Cotangenten kleiner Winkel, oder die Tangenten der von einem Rechten wenig verschiedenen Winkel, groß sind, und schnell sehr anwachsen, so ist die Interpolation bey ihnen weniger sicher, wenn nicht die Glieder, zwischen welchen die Einschaltung vorgenommen wird, weit genug berechnet werden. Ein Hülfsmittel gewährt die Formel,

$$\cot A = 2 \cot 2A + \tang A,$$

da die $\cot 2A$ sich leichter mit Sicherheit finden läßt, als $\cot A$. Diese Formel, oder die ihr gleichgültige,

$$\tang(\tfrac{1}{2}R + A) - \tang(\tfrac{1}{2}R - A) = 2 \tang 2A,$$

ist dadurch sehr brauchbar, daß sie bey der gleich vorher angewiesenen Interpolation einer Tangente zwischen zwey andern gegebenen die Anzahl der dadurch zu findenden Tangenten auf die Hälfte herunter bringt.

Die Secanten und Cosecanten werden leicht durch Addition und Subtraction gefunden. Es ist, (Goniometrie, 43. 44.),

$$\sec 2A = \tang 2A + \tang(45^\circ - A),$$

$$\operatorname{cosec} 2A = \cot 2A + \tang A.$$

Setzt man für A eine arithmetische Reihe von Werthen, so werden für die Winkel der Secanten die Unterschiede doppelt so groß als in jener. Diese Unterschiede zu halbiren, dient die Formel,

$$\sec B = \tfrac{1}{2}(\sec A + \sec C) - \sec A . \sec B . \sec C (1 + 2 \cos(B - A) - \cos 2B) \times \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

wo A, B, C, in arithmetischer Proportion sind. In dem zweyten Terminus der Formel mag für sec B der erste Terminus gesetzt, oder der Werth aus den schon berechneten Tafeln genommen werden, so weit ihn diese liefern.

Aus dieser Behandlung der cyklometrischen Reihen sieht man, wie mancherley Veranstaltungen erforderlich seyn können, um eine analytische Reihe zum genauen arithmetischen Gebrauch zuzurichten.

Zur Ersparung der Multiplication und Division mit den großen trigonometrischen Zahlen erdachte Neper (John Napier, Baron von Merchiston in Schottland) seine Logarithmen, die er 1614 bekannt machte. Er setzte den Sinus totus = 10 Millionen, dessen Logarithmus = 0, den Logarithmen der Zahl 9999999 zwischen 1,0000001, und 1,0000000. In der Tafel ist 1 als Logarithme von sin 89° 59′ angesetzt, weil die Winkel nur nach ganzen Minuten fortgehen. Der Logarithme des sin 30° oder von 5000000 ist bey ihm 6931469, der in dem gegenwärtig üblichen System ist —0,3010300, wofür dessen Complement 9,6989700 in unsern Tafeln steht. Das Nepersche System von Logarithmen ist das der natürlichen mit einer gewissen Abänderung. Briggs nahm das Verhältniß 1 : 10 zum Grundverhältnisse, so daß er zuerst den Logarithmen von $\frac{1}{10}$ gleich Eins setzte, hernach aber log 10 = 1 nahm. Er berechnete nach diesem System eine Tafel der logarithmischen Sinus und Tangenten für alle Hunderttheile jedes Grades bis zur vierzehnten Decimalstelle, und eine Tafel der natürlichen Sinus bis zur funfzehnten, der Tangenten und Secanten bis zur zehnten Stelle Diese Tafeln sind zu Gouda, in Adrians Vlacq Verlage gedruckt, und erschienen daselbst 1633 in Folio, unter dem Titel, Trigonometria Britannica. Es ist kein zweyter Abdruck, wie Montücla in der Gesch. der Mathem. II. Th. 27 S. sagt. Briggs begleitete die Tafeln mit einem ausführlichen Unterrichte von der Verfertigung des Canons sowohl der trigonometrischen Linien als ihrer Logarithmen. Der Tod übereilte ihn, da er noch den Unterricht von dem Gebrauche und der Anwendung der Tafeln beyfügen wollte. Dieses leistete an seiner Stelle Heinrich Gellibrand, Professor der Astronomie an dem Greshamischen Collegium zu London, der auf dem Titel als Herausgeber des Werks genannt ist.

Adrian Vlacq, der die von Briggs gelassene Lücke in den Logarithmen der Zahlen von 20000, bis 90000 ausfüllte, und die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000 bis auf die zehnte Decimalstelle in der Arithme-

tica logarithmica, Goudae 1628, fol. 2te Ausgabe lieferte, fügte dieser die Logarithmen der Sinus, Tangenten und Secanten, bis zur zehnten Decimalstelle, für einzelne Minuten, bey. In demselben Jahre, 1633, in welchem die Trigonometria Britannica erschien, gab er einen großen logarithmischen Canon der Dreyecke heraus, worin die Logarithmen der Sinus und Tangenten von 10 zu 10 Secunden auf zehn Decimalstellen enthalten sind, unter dem Titel: Trigonometria artificialis, sive magnus Canon triangulorum logarithmicus, etc. Der Canon des Rhäticus ist dabey zum Grunde gelegt. Wo dieser in den letzten Ziffern Unrichtigkeiten hat, könnten die darauf sich beziehenden Logarithmen auch fehlerhaft seyn. Die Einleitung ist fast ganz aus der Briggisch-Gellibrandischen Ausgabe genommen.

Die beiden großen und seltenen Werke von Blacq hat Vega in einer verbesserten, neu geordneten und vermehrten schönen Ausgabe wieder abdrucken lassen, mit einer Einleitung, worin die neuere Berechnungsart der Logarithmen gezeigt wird, Leipzig 1794, fol. In den beiden ersten und letzten Graden des Quadranten gehen die Logarithmen durch alle einzelne Secunden. Das Werk verdient den Titel: Thesaurus Logarithmorum completus.

Für die Logarithmen der Sinus und Cosinus, sowohl die natürlichen als gemeinen tabularischen, hat Euler in der Introd. in Anal Infin. C. XI. ähnliche numerische Formeln wie für die Sinus und Cosinus selbst geliefert. Es sind die entwickelten Formeln in Cyklometrie. (36, 37.).

$$\text{Log. tabul. sin Arc. } \frac{m}{n} \cdot 90^\circ =$$

$$l\,m + l(2n - m) + l(2n + m) - 3\,l\,n$$

$$+ \quad 9,594059\ 885702$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,070022\ 826605.$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,001117\ 266441.$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000039\ 229146$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000001\ 729270.$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000000\ 084362.$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000\ 004348.$$

$$- \text{etc.}$$

Zweytens ist

$$\text{Log. tabul. cos. Arc. } \frac{m}{n} \cdot 90^\circ =$$

$$l(n - m) + l(n + m) - 2\,l\,n$$

$$+ \quad 10,000000\ 000000$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,101494\ 859341.$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,003187\ 294065$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000209\ 485800$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000016\ 848348.$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000001\ 480193.$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}000000\ 136502$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}000000\ 012981.$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}000000\ 001261$$

— etc.

Der Punct am Ende bedeutet, daß die folgenden Ziffern mehr als 5 in der 13ten Stelle betragen. Der Charakteristik sind 10 geliehen, wie gewöhnlich ist.

Euler hat diese Logarithmen bis zur 15ten Decimalstelle berechnet. In den Tables portatives de Logarithmes, par Callet, à Paris 1795, sind sie bis zur 20sten aufgeführt. Eben daselbst sind diese numerischen Formeln auch nach den analytischen in Cyklometrie (40.), und noch nach drey auf ähnliche Art convergirend gemachten, berechnet mitgetheilt, jede auf 20 Decimalstellen. Ich setze zur Vergleichung das vierte Paar dieser Formeln her, bis zur 12ten Decimalstelle, und bis zur achten Potenz von $\frac{m}{n}$.

$$\text{Log. sin}\frac{m\pi}{2n} = l\,m + l(2n-m) + l(2n+m)$$
$$+ l(4n-m) + l(4n+m) + l(6n-m)$$
$$+ l(6n+m) + l(8n-m) + l(8n+m)$$
$$+ l(10n-m) + l(10n+m) - 11\,l\,n$$

$$+ \quad 3{,}02745\ 74282\ 95$$

$$-\frac{m^2}{n^2} \cdot 0{,}01968\ 68907\ 79.$$

$$-\frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}00002\ 67539\ 61$$

$$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}00000\ 00863\ 59.$$

$$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}00000\ 00003\ 69.$$

— etc.

$$\text{Log.}\cos\frac{m\pi}{2n} = l(n-m) + l(n+m) + l(3n-m)$$
$$+ l(3n+m) + l(5n-m) + l(5n+m) + l(7n-m)$$
$$+ l(7n+m) + l(9n-m) + l(9n+m)$$
$$- 10\,l\,n$$
$$+ \quad 4{,}04913\ 63829\ 81$$
$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0{,}02164\ 33246\ 69.$$
$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}00003\ 54913\ 42.$$
$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}00000\ 01379\ 59.$$
$$- \frac{m^3}{n^8} \cdot 0{,}00000\ 00007\ 09.$$

Die abgesonderten Logarithmen machen die Rechnung bey kleinern Winkeln beschwerlich, daher diese letztern Formeln nur bey größern Winkeln zu gebrauchen sind.

Nach diesen Formeln kann man nun die Logarithmen der Sinus und Cosinus, deren Winkel eine arithmetische Reihe ausmachen, berechnen, und je zwey auf einander folgende so nahe bringen, daß die Reihe, oder ein Stück derselben, bis zu einer gewissen Stelle der Decimalen eine arithmetische der dritten oder zweyten Ordnung sey, deren dritte oder zweyte Unterschiede bis dahin beständig sind. Darauf nehme man das Interpoliren vor, wie bey den Sinus und Cosinus selbst angewiesen ist. Wo die Formeln die Arbeit zu langwierig machen möchten, suche man die Logarithmen unmittelbar aus den Zahlwerthen der Sinus und Cosinus. Dazu wird in dem Artikel, Logarithme, für große Zahlen Anleitung gegeben.

Man hat nur nöthig die Logarithmen der Sinus und Cosinus in dem ersten Drittheil des Quadranten zu berechnen. Denn da $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ ist, so ist . . $\log.\sin 2A = \log.\sin A + \log.\cos A + \log. 2$. Aber man muß in dem ersten Drittheil von doppelt so vielen Sinus

und Cosinus die Logarithmen berechnet haben, als in dem zweyten Drittheil sollen gefunden werden, oder in diesem sich durch die Interpolation helfen können.

Die Logarithmen der Sinus und Cosinus kann man durch diese selbst oder andere goniometrische Functionen interpoliren. Es seyn A, B, C, drey Winkel in arithmetischer zunehmender Proportion, so ist aus Goniometrie (28.)

$$\sin C = 2 \sin B . \cos(B - A) - \sin A.$$

Man setze $2 \sin B . \cos(B - A) = p$; $\sin A = q$, so ist

$$\log . \sin C = \log . (p - q) = \log . q + \log . \left(\frac{p}{q} - 1\right).$$

Man mache $\frac{p}{q} - 1 = \frac{1 + y}{1 - y}$, so ist

$$\log . \text{nat.} \left(\frac{p}{q} - 1\right) = 2\left(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}\right),$$ (s. Logarithmen). Jene Gleichung giebt $\frac{p}{q} = \frac{2}{1 - y}$, oder

$$1 - y = \frac{2q}{p}, \text{ und } y = \frac{p - 2q}{p} = \frac{\sin C - \sin A}{\sin C + \sin A}$$

$$= \frac{\text{tg} \frac{1}{2}(C - A)}{\text{tg} \frac{1}{2}(C + A)},$$ oder $y = \text{tg}(B - A) . \cot B$. Folglich ist

$$\log . \text{nat.} \sin C = \log . \text{nat.} \sin A + 2\left(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}\right).$$

Zweytens, es ist aus Goniometrie (28.)

$$\cos C = 2 \cos B . \cos(B - A) - \cos A.$$

In der vorhergehenden Rechnung vertausche man die Sinus der Winkel mit den Cosinus, und y mit $-z$, so ist

$$z = \frac{\cos A - \cos C}{\cos A + \cos C} = \text{tang} \tfrac{1}{2}(C - A) . \text{tang} \tfrac{1}{2}(C + A),$$

oder $z = \text{tang}(B - A) . \text{tg} B$, und

$$\log . \text{nat.} \cos C = \log . \text{nat.} \cos A - 2\left(z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \text{etc.}\right).$$

Bey diesen Rechnungen ist zu bemerken, daß die Logarithmen der Sinus und Cosinus, als eigentlicher Brüche, negativ sind, und daß der Logarithmus eines kleinern Bruchs, der Quantität nach größer ist, als der eines größern Bruchs. Daher ist in der Rechnung für die Sinus, $\log\left(\frac{p}{q}-1\right)$ positiv, und $\frac{p}{q}-1$ größer als die Einheit, so daß diese Größe durch die Form $\frac{1+y}{1-y}$ dargestellt werden konnte. Hingegen in der Rechnung für die Cosinus ist $\log\left(\frac{p}{q}-1\right)$ negativ, also $\frac{p}{q}-1$ kleiner als die Einheit, weswegen diese Größe die Form . . . $\frac{1-z}{1+z}$ erhalten muß, wenn z einen positiven Werth erhalten soll.

Da die Logarithmen in beiden Formeln die natürlichen sind, so hat man noch diese mit dem Modulus des Briggischen Systems zu multipliciren. Dieser ist . . . . $= 0{,}434294481 90 \ldots = M$. Dadurch wird

$$\log.\text{tab}.\sin C = \log.\text{tab}.\sin A + 2M\left(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}\right).$$

$$\log.\text{tab}.\cos C = \log.\text{tab}.\cos A - 2M\left(z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \text{etc.}\right).$$

Hat man eine Reihe von Logarithmen der Sinus und Cosinus, deren Winkel in arithmetischer Progression sind, aus den angeführten Formeln oder unmittelbar aus den Zahlwerthen berechnet, so kann man durch Hülfe dieser Formeln die erste Einschaltung vornehmen. Es müssen nur y und z so klein seyn, daß man sie selbst und ihre Potenzen durch Hülfe der Logarithmen mit der erforderlichen Genauigkeit berechnen könne. Die Multiplication mit 2 M ist leicht, da man sich dazu eine Tafel der Vielfachen dieses beständigen Factors verfertigen kann. Die ursprünglichen Glieder der Reihen können zur Probe der Rechnung dienen, die in einer successiven Herleitung jedes Logarithmen aus vorhergehenden besteht.

Exempel. Es sey aus log. sin 10° 0′ der log. 10° 20′ herzuleiten. Hier ist $A = 10°$; $B = 10°\,10′$; $C = 10°\,20′$. Aus dem Vegaischen Thesauro Logarithmorum ist

log. tab. tang. 10	=	7, 46372 73420 — 10
log. cot. 10° 10′	=	10, 74635 22558 — 10
log y	=	8, 21007 95978 — 10
log y^3	=	4, 63023 88 — 10
log y^5	=	1, 05039 — 10

Daher

$y = 0,\ 01622\ 10737\ 1$

$y^3 = 0,\ 00000\ 42681\ 4$

$y^5 = 0,\ 00000\ 00911\ 2$

$2M(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5) = 0,\ 01409\ 06815$

log sin 10° $= 9,\ 23967\ 02300 - 10$

log sin 10° 20′ $= 9,\ 25376\ 09115 - 10$

welcher von dem in den Tafeln nur um + 1 in der letzten Ziffer verschieden ist. Die Zahl y ist aus ihrem Logarithmen durch einfache Proportionaltheile gefunden. Die zweyten Unterschiede der Logarithmen haben in diesem Falle keinen Einfluß auf die 10te Decimalstelle.

Die in Frankreich nach der Decimal-Eintheilung des Quadranten berechneten trigonometrischen Tafeln haben den Titel: Tables trigonométriques décimales, ou Table des logarithmes des sinus, sécantes et tangentes, suivant la division du Quart de cercle en 10 degrés, du degré en 100 minutes, et de la minute en 100 sécondes, précédées de la Table des logarithmes des nombres depuis dix mille jusqu'à cent mille, et de plusieurs tables subsidiaires; calculées par Ch. Borda, revues, augmentées et publiées par J. B. J. Delambre. A Paris, An IX. in 4. 51 Bogen. Die trigonometrischen Tafeln gehen in den drey ersten Decimalgraden durch alle Zehner von Secunden, wie die von Hobert und Ideler herausgegebenen; in den folgenden durch einzelne Minuten, auch wie jene. Sie enthalten aber noch die Proportionaltheile für die einzelnen

Secunden in den drey ersten Graden, und für Zehner von Secunden in den übrigen; zugleich mit den Logarithmen der Secanten und Cosecanten, welche in den Berlinischen Tafeln das Format beyzufügen nicht erlaubte. In diesen sind bloß die ganzen Unterschiede der Logarithmen beygefügt. Dagegen enthalten eben dieselben die natürlichen Sinus und Tangenten selbst, die oft gebraucht werden, und in der französischen Ausgabe zum Nachtheil des Werks fehlen. Die Logarithmen gehen in dieser bis zu der siebenten Decimalstelle, wie in der deutschen Ausgabe; es ist aber eine wichtige Hülfstafel beygefügt, welche die Logarithmen der Sinus und Tangenten von 10 zu 10 Secunden bis zu der zehnten Minute, und dann von 10 zu 10 Minuten bis auf die eilfte Decimalstelle liefert. Diese dient den Logarithmen eines Sinus oder einer Tangente bis auf die zehnte Decimalstelle zu finden. Borda verstarb, wie Briggs, in der Zeit, da er die Vorrede und Einleitung aufsetzte. Diese hat Delambre, der erste Rechner in Frankreich, vollendet. Sie ist sehr lehrreich, und enthält theils eine Methode, die Logarithmen der trigonometrischen Linien und der Zahlen zu berechnen, theils eine Sammlung von bequemen Formeln zur Berechnuug sphärischer Dreyecke.

Das Verfahren, welches Delambre zur Berechnung der Logarithmen der trigonometrischen Linien angiebt, ist folgendes. Zuerst giebt er eine Reihe für log. sin. φ; log. cos φ, und log. tang φ. Diese sind die in Cyklometrie (23, 24, 25) angegebenen. Er findet sie aber auf eine andere Art, nämlich aus den Werthen der Sinus und Cosinus, mittelst der Formel,

$$\log.\text{nat.}(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \text{etc.}$$

Durch diese Reihen sollen die Logarithmen der Sinus und Cosinus bis zum fünften Grade berechnet werden. Die Logarithmen der Sinus größerer Winkel werden nach der Reihe durch eine der folgenden beiden Formeln gefunden, worin M der Modulus des briggischen Systems ist.

$$l\sin(\varphi+\omega) = l\sin\varphi + l\cos\omega + M[\cot\varphi.\tan\!g\,\omega - \tfrac{1}{2}\cot\varphi^2.\tan\!g\,\omega^2 + \tfrac{1}{3}\cot\varphi^3.\tan\!g\,\omega^3 - \text{etc.}];$$

und

$$l\sin(\varphi + \omega) = l\sin\varphi + 2M[\cot(\varphi + \tfrac{1}{2}\omega) . tg\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{3}\cot(\varphi + \tfrac{1}{2}\omega)^3 . tg\tfrac{1}{2}\omega^3 + \tfrac{1}{5}\cot(\varphi + \tfrac{1}{2}\omega)^5 . tg\tfrac{1}{2}\omega^5 + \text{etc.}].$$

Die zweyte ist diejenige, welche ich schon oben zur Berechnung der Logarithmen der Sinus angegeben habe. Die erste beruht auf der Formel,

$$\sin(\varphi + \omega) = \sin\varphi . \cos\omega + \cos\varphi . \sin\omega$$
$$= \sin\varphi . \cos\omega(1 + \cot\varphi . \tan\omega).$$

Aus dieser ist

$$l\sin(\varphi + \omega) = l\sin\varphi + \log\cos\omega + l(1 + \cot\varphi . tg\,\omega).$$

er dritte Terminus wird in eine Reihe entwickelt, nach der Formel, $\log nat(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \text{etc.}$ wozu denn noch der Modulus der tabularischen Logarithmen als Factor zu setzen ist.

Mittelst der Formel, $\sin 2A = 2\sin A . \cos A$, wird aus dem Logarithmen des Sinus und Cosinus eines Winkels der Logarithme des Sinus des doppelten Winkels gefunden. Zugleich findet man den Logarithmen des Cosinus dieses Winkels vermittelst einer der Formeln,

$$\cos A^2 = 1 - \sin A^2$$
$$\cos 2A = 1 - 2\sin A^2$$
$$\cos 2A = \frac{1 - \tan A^2}{1 + \tan A^2};$$

und der Formel, $\log(1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \text{etc.}$ Man kann dadurch die logarithmischen Sinus für alle Decimalgrade finden, indem man durch fortgesetzte Halbtheilung bis zu einem Winkel gelangen kann, der klein genug ist, um die Reihe für den Logarithmen des Sinus und Cosinus sehr convergirend zu machen, woraus man dann successiv durch die Sinus der mittlern Winkel zu dem Sinus des gegebenen gelangt.

Zur Interpolation der Logarithmen, wo die vierten Differenzen so klein sind, und sich so wenig verändern, daß man sie als unveränderlich ansehen kann, gebraucht Delambre allgemeine Formeln, die aber doch nicht bequem genug sind, und auf eine mühsame Art gefunden werden.

Die folgenden Formeln sind leicht gefunden, (Differenzenrechnung, 48.), und leicht anwendbar.

Die Reihe der Winkel sey φ; $\varphi + \omega$; $\varphi + 2\omega$; $\varphi + 3\omega$; u. s. f. so ist das erste Glied der ersten Differenzreihe von den Logarithmen der Sinus, oder

$$\Delta \log. \text{nat.} \sin\varphi = \cot\varphi . \omega - \frac{1}{2 \sin\varphi^2} \omega^2$$
$$+ \frac{\cos\varphi}{3 \sin\varphi^3} \omega^3 - \frac{2 + \cos 2\varphi}{12 \sin\varphi^4} \omega^4$$
$$+ \frac{(5 + \cos 2\varphi) \cos\varphi}{30 \sin\varphi^5} \omega^5 - \text{etc.}$$

Bezeichnet man die Coefficienten von ω durch α, β, γ, δ, ε, etc. so sind die Anfangsglieder der zweyten und folgenden Differenzreihen,

$$\Delta^2 \log\sin\varphi = 2\beta\omega^2 + 6\gamma\omega^3 + 14\delta\omega^4 + 30\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^3 \log\sin\varphi = 6\gamma\omega^3 + 36\delta\omega^4 + 150\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^4 \log\sin\varphi = 24\delta\omega^4 + 240\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^5 \log\sin\varphi = 120\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$$

etc.

Für die tabularischen Logarithmen ist mit dem Modulus derselben, $M = 0,43429\ 44819$ . . zu multipliciren. Es ist $\log M = 9,6377743 - 10$.

Exempel. Es sey $\varphi = 42$ Decimalgrade und . .

$\omega = 1' = \frac{\pi}{20000}$. Man sucht die Anfangsglieder der Differenzreihen der Logarithmen von sin 42°; sin 42° 1'; sin 42° 2'; etc. bis auf die zehnte Demimalstelle.

$lM =$	$9,6377843 - 10$	$lM =$	$9,63778 - 10$
$l\cot\varphi =$	$0,1103177$	$\omega l^2 =$	$2,39224 - 10$
$l\omega =$	$6,1961199 - 10$		$2,03002 - 10$
l. I.	$5,9442219 - 10$	$l2 =$	$0,30103$
		$l\sin\varphi^2 =$	$9,57479 - 10$
		l. II.	$2,15420 - 10$

$$\text{I.} = +0{,}0000879472.$$
$$\text{II.} = -0{,}\ldots\ldots.1426$$
$$\Delta\log.\sin 42^\circ = 0{,}0000879329.$$

Das Anfangsglied der zweyten Differenzreihe ist . . . $= -0{,}000000285$.

Durch dieselben Formel findet man auch die Anfangsglieder der Differenzreihen für die Logarithmen der Cosinus, aber für eine abnehmende Reihe von Winkeln; oder man muß, für eine wachsende Reihe den Unterschied ω negativ nehmen.

Exempel. Man sucht die Anfangsglieder der Logarithmen der Cosinus von 42°; $42^\circ\ 1'$; $42^\circ\ 2'$; etc. Es ist nun $\varphi = 58^\circ$, und $\omega = -1'$. Dadurch

$$M\cot\varphi.\omega = -0{,}0000529159\ 4$$
$$-\frac{M\omega^2}{2\sin\varphi^2} = -0{,}\ldots\ldots.85\ 8$$
$$\Delta\log.\cos 42^\circ = -0{,}0000529245\ 2$$
$$\Delta^2\log.\cos 42^\circ = -0{,}0000000171\ 6.$$

Diese Rechnung stimmt mit den von Hobert und Ideler in der Einleitung zu ihren trigonometrischen Tafeln, S. L. LI. gefundenen Differenzen bis zu der zehnten und eilften Decimalstelle überein. Dort sind die Differenzen aber nicht durch eine allgemeine Formel gefunden.

In den trigonometrischen Tafeln ist der Logarithmus des Halbmessers = 10 gesetzt. Man hat nämlich die trigonometrischen Linien auf einen Halbmesser von 10000 Millionen Theilen bezogen, in den kleinern Tafeln aber von den Zahlwerthen die letztern drey Ziffern abgeschnitten, die Kennziffer der Logarithmen aber noch nach der vollständigen Zahl eingerichtet. Gegenwärtig nimmt man den Halbmesser als Einheit, wodurch die Sinus, und die Tangenten unter 45 Gr. eigentliche Brüche sind. Da die Logarithmen derselben negativ sind, so nimmt man ihr Complement zu 10, und bemerkt entweder ausdrücklich, oder in Gedanken, daß 10 wieder abzuziehen sind. Z. B. es ist $\sin 25^\circ = 0{,}4226183$, oder genauer $0{,}4226183013$, und $\log.\sin 25^\circ = 9{,}6259483 - 10$, anstatt . . . . $-0{,}3740517$. Der erste Theil des Logarithmen ist der

Logarithme eines Zählers, 4226183013, die subtractive 10 ist der Logarithme des Nenners 10000 Millionen. Gewöhnlich braucht man die subtractive 10 nicht hin zu setzen.

Den Logarithmen der Tangenten über 45 Gr. und denen der Secanten die alle positiv sind, giebt man der Gleichförmigkeit wegen auch zwey Theile, wovon der eine die subtractive 10 ist. Z. E. es ist tang 70° = 2,7474774, und log. tang 70° = 10, 4389341 — 10, wofür man auch setzen kann 0, 4389341.

In den Vegaischen kleinern Tafeln sind die natürlichen Sinus und Tangenten als Bruchgrößen, eigentliche oder uneigentliche, angegeben, wie in den gleich vorher angeführten Beyspielen. In den mehresten Tafeln erscheinen sie wie ganze Zahlen. Von diesen hat man, wenn der Sinus totus 10 Mill. Theile hat, 7 Ziffern von der rechten nach der linken Hand als Decimaltheile abzuschneiden. Z. B. wenn sin 30' die Zahl 87265 hat, so ist dafür zu setzen 0,0087265.

Die Tangenten und Secanten der Winkel, die nahe an 90° sind, pflegen für einen kleinern Halbmesser als die übrigen angegeben zu werden, weil der Platz nicht alle Ziffern faßt, und bey großen Zahlen die Zehnmillionentheilchen nicht in Betracht kommen mögen. In den Sherwinschen Tafeln ist dieses auf folgende Art bemerklich gemacht. In den Zahlwerthen aller trigonometrischen Linien sind drey Ziffern durch ein Komma am Ende abgeschnitten, welches beym Ausschreiben Verwechselungen verhütet. Wo in dem gedachten Falle der Halbmesser nur eine Million Theile hat, sind nur zwey Ziffern abgesondert; für den Halbmesser = 100000 ist nur eine abgesondert, und für den Halbmesser 10000 ist das Komma am Ende noch beygefügt. Die Charakteristik der Logarithmen bezieht sich immer auf einen Halbmesser von 10000 Millionen, oder auf den Halbmesser als Einheit durch die Hinzufügung der Zehn. In deutschen Ausgaben der Tafeln findet man oft zwey Ziffern abgeschnitten, und in den großen Tangenten und Secanten eine Ziffer nach dem Puncte, oder einen Punct hinter die Zahl gesetzt.

Zu den vorzüglichsten Ausgaben trigonometrischer Tafeln gehören ausser den vorher schon angeführten

Sherwin's mathematical tables, the third edition, carefully revised and corrected by W. Gardiner. London 1742. gr. 8. Diese Ausgabe wird als sehr genau gerühmt, wie ich sie auch gefunden habe. Die letzte und fünfte vom J. 1770, besorgt von Clark, ist äusserst fehlerhaft gedruckt. Hutton sagt, daß er einige tausend Fehler darin angemerkt hat.

Gardiner gab auch 1742 zu London in groß Quart heraus: Tables of Logarithms, for all numbres from 1 to 102100, and for the sines and tangent, to every ten seconds of each degree in the quadrant, as also for the sines of the first 72 minutes to every single second, with other useful and necessary tables. Von diesen Tafeln ist nur eine kleine Anzahl Abdrücke gemacht, und bloß auf Unterzeichnung, daher sind sie sehr selten. Sie werden wegen ihrer Genauigkeit und Brauchbarkeit ungemein hoch geschätzt. (Hutton in der Einleitung zu seinen mathematischen Tafeln). Kästner hält diese Sammlung irrig für eine zweyte Ausgabe der Sammlung in Octav, weil er die letztere bloß aus Karstens Lehrbegriff kannte. Astron. Abh. II Samml. S. 17.

Ein sauberer Abdruck dieser größern Gardinerschen Tafeln ist zu Avignon 1770 veranstaltet. In diesem sind die logarithmischen Sinus und Tangenten für alle Secunden der ersten vier Grade, von Mouton berechnet, beygefügt. (Kästners astron. Abhandl. 2te Samml. S. 19.). In Frankreich gesteht man, daß diese Ausgabe nicht so correct sey, als die englische.

Schulze Sammlung logarithmischer, trigonometrischer, und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlichen Tafeln. Berlin, 1778. 2 Bände, gr. 8. Darin sind die Logarithmen der Sinus und Tangenten in den beiden ersten Graden von Secunde zu Secunde. Auch sind den Briggischen Logarithmen die Neperischen aus Ursins großem Canon beygefügt. Diese und die trigonometrischen Linien gehen in den vier ersten und vier letzten

Graden durch Zehner von Secunden, in den übrigen durch einzelne Minuten.

Der zu früh den mathematischen Wissenschaften entrissene Vega hat sich durch verschiedene bequeme und sehr genaue Ausgaben logarithmischer und trigonometrischer Tafeln sehr verdient gemacht. Die erste, Wien 1783, enthält alles wesentliche aus Sherwins Tafeln, und dazu noch in den ersten und letzten fünf Graden die Logarithmen der trigonometrischen Größen für Zehner von Secunden. Das logarithmisch-trigonometrische Handbuch, Leipzig 1793, enthält eben das, nur nicht die trigonometrischen Größen selbst. Eine vollständigere Ausgabe ist zu Leipzig 1797 in zwey Bänden, groß Octav, herausgekommen, von welchen der zweyte verschiedene Logarithmische, astronomische und analytische Tafeln oder Formeln enthält. Die große Sammlung in Folio ist oben angeführt.

Eine sehr genaue, bequem eingerichtete und sauber gedruckte Sammlung sind: Tables portatives de Logarithmes, par François Callet. Edition stéréotype, à Paris (1795) An IX, aus Didots Druckerey. Callet hat schon 1783 eine bequeme Ausgabe der größern Gardinerschen Tafeln besorgt, in Jomberts Verlage aus Didots, des Vaters, Druckerey. (Kästners geom. Abh. I. S. 483.) Da eine Auflage von 6000 Exemplaren zu Ende gieng, so war der jüngere Didot auf eine Einrichtung bedacht, wodurch mit der Zeit ein vollkommen fehlerfreyer Druck zu erhalten stünde, und fiel auf das Mittel, den ganzen Satz unverrückbar zu machen, indem die Buchstaben zu einer Masse mit einander verbunden werden. Daher die Benennung édition stéréotype. Die nach und nach entdeckten Fehler werden abgeändert, ohne daß neue Fehler, wie bey einem neuen Satze unvermeidlich ist, sich einschleichen. Den Besitzern der vorhergegangenen Abdrücke werden sie in gelehrten Zeitschriften oder auf andere Art bekannt gemacht. — In den ersten fünf Graden sind die Logarithmen der Sinus und Tangenten für alle Secunden, überhaupt von 10 zu 10 Secunden der Sexagesimal-Eintheilung auf sieben Decimalstellen geliefert. Ferner sind

die Logarithmen der Sinus und Tangenten von Minute zu Minute nach der Centesimal-Eintheilung des Quadranten bis zur siebenten Decimalstelle beygefügt; dann noch die natürlichen Sinus für alle Zehntheile der Decimalgrade mit ihren Logarithmen; beides auf 15 Decimalstellen, zum Gebrauch beym Einschalten, um die Sinus oder ihre Logarithmen für jeden Winkel eben so weit zu erhalten. Um die Interpolation bey ungleichförmigen Differenzen bequemer und sicherer zu machen, ist eine Verbindung zwischen der Tafel der Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen gemacht. Diese beruht darauf, daß kleine Winkel sich sehr nahe wie ihre Sinus oder Tangenten verhalten. Die erste Zahl auf einer Seite der Tafel mit den Logarithmen der Zahlen sey n, so ist über derselben beygefügt $\log \frac{\sin n''}{n''}$, und $\log \frac{\tang n''}{n''}$, nebst den Variationen dieser Logarithmen für die Zunahme 10 der Zahl n. Man kann sich dieses Verfahrens fast eben so leicht bey jeder andern Ausgabe von Tafeln bedienen. Sind n und n + p die Zahlen der Secunden zweyer kleinen Winkel, so ist $\sin(n+p) = \frac{n+p}{n} \sin n$ nahe, so daß log. sin (n + p) gefunden wird, wenn log. sin. n aus den Tafeln genommen wird.

Hutton ward durch die äußerst fehlerhafte fünfte Ausgabe von Sherwins Tafeln veranlaßt, eine neue dieser Art zu veranstalten, die 1785 zu London bey Robinson gedruckt ist. In der Einleitung ist eine Geschichte der trigonometrischen Tafeln und der Logarithmen enthalten, besonders aber eine ausführliche Darstellung aller Methoden, deren man sich zur Berechnung der Logarithmen bedient hat. Diese Einleitung ist mit der Vorrede in der von Maseres veranstalteten großen Sammlung von logarithmischen Schriften eingerückt, T. I. pag. I—CXXI.

Viele litterarische Nachrichten und kleine Auszüge über den Gegenstand dieses und des vorhergehenden Artikels finden sich in Pfleiderers ebenen Trigonometrie, Tübingen 1802.

Cylinder ist ein geometrischer Körper, der zwischen zwey gleichen, sich parallelen Kreisflächen, und einer von diesen begränzten krummen Fläche enthalten ist. Die letztere wird von einer geraden Linie beschrieben, welche mit ihren Endpuncten auf dem Umfange der beiden Kreise, parallel der Linie durch ihre Mittelpuncte, herumgeführt wird.

Die Linie durch die Mittelpuncte der beiden Kreise heißt die Axe des Cylinders; die beiden Kreisflächen heißen die **Grundflächen.**

Wenn die Axe senkrecht auf die Grundfläche steht, so heißt der Cylinder ein **senkrechter** (rectus); ist sie gegen die Grundflächen geneigt, so ist es ein **schiefer** (scalenus). Der senkrechte Cylinder wird durch die Umdrehung eines Rechtecks um eine seiner Seiten beschrieben. Dieses ist die Erklärung, die Euklides giebt, da er nur den senkrechten Cylinder betrachtet. Wenn ein schiefwinklichtes Parallelogramm sich um eine seiner Seiten dreht, so beschreibt zwar die derselben parallele Seite eine cylindrische krumme Fläche, wie an dem senkrechten Cylinder, allein anstatt der ebenen Kreisflächen wird der Körper von zwey Kegelflächen begränzt. Die krumme Oberfläche des schiefen Cylinders ist von jener ganz verschieden.

Der Durchschnitt des Cylinders mit einer den Grundflächen parallelen Ebene ist ein Kreis, so groß als eine der Grundflächen. Geht die schneidende Ebene durch die Axe, oder ist sie einer durch die Axe gelegten Ebene parallel, so ist der Durchschnitt ein Parallelogramm. In jeder andern Lage der schneidenden Ebene, ist der Durchschnitt eines senkrechten Cylinders mit derselben eine Ellipse, und, einen besondern Fall ausgenommen, auch in dem schiefen Cylinder.

Von den Durchschnitten des Cylinders hat ein griechischer Mathematiker, S e r e n u s aus Antissa auf der Insel Lesbos, eine Abhandlung geschrieben, die nebst einer über die Schnitte des Kegels, einigen Ausgaben des großen Werks über die Kegelschnitte von Apollonius beygefügt sind, griechisch und lateinisch in der Halleyischen Ausgabe. Oxford 1710. fol.

Es sey (Fig. 104. Tab. VII.) Ab ein Cylinder, dessen Grundflächen ADBE, adbe sind. Die Axe ist Cc, durch welche das Parallelogramm ABba gelegt ist, welches gegen die Grundfläche geneigt seyn mag, wenn die Axe gegen sie geneigt ist. Der Cylinder werde von einer durch die Linie FG gelegten Ebene geschnitten, und der Durchschnitt derselben mit der Ebene der Grundfläche, IHI sey senkrecht auf die Richtung des Durchmessers AB, nämlich auf die Linie ABH; oder man ziehe auf die Durchschnittslinie IHI durch den Mittelpunct C die senkrechte ACBH, und lege durch AB und die Axe Cc das Parallelogramm ABba. Durch einen Punkt K der Linie FG führe man einen Schnitt parallel mit der Grundfläche. Dieser ist ein Kreis LNMN, dessen Durchmesser der Durchschnitt LM der Kreisfläche mit dem Pgrm Ab ist. Er schneide den durch FG gelegten Schnitt in der Linie NKN. Diese Linie ist parallel mit IHI, weil sie diese nicht schneidet, da die Ebene LNMN mit der Grundfläche parallel ist, und weil sie zugleich mit ihr in derselben Ebene, der durch FH und HI gelegten sich befindet. Weil NKN mit IHI, und LM mit AH parallel sind, so ist der W. LKN = AHI, (Eucl. XI. 10); also ist NKN senkrecht auf LM, und wird von dieser in K halbirt, da LM ein Durchmesser des Kreises ist. Vermöge einer Eigenschaft des Kreises ist KL.KM = KNqu. Man ziehe FO parallel mit LM, so ist KF : KL = FG : FO, und KG : KM = FG : FO; also ist . . . . .

KF.KG : KL.KM = FGqu : FOqu. das ist

KF.KG : KNqu = FGqu. : FOqu

= FGqu : ABqu. Diese Proportion gehört für eine Ellipse, in welcher FG und AB conjugirte Durchmesser sind, und NN eine zugehörige Doppel-Ordinate ist, die wie alle ihr parallelen, von dem Durchmesser FG halbirt wird. Wenn das Parallelogramm Ab auf die Grundfläche senkrecht ist, und der Schnitt durch FG senkrecht auf Ab ist, so ist der Durchschnitt NN der beiden auf Ab senkrechten Ebenen senkrecht auf die Ebene von Ab, und daher senkrecht auf FG. In diesem Falle ist FG eine der

Axen der Ellipse FNGN, und der Durchmesser des Kreises in der Grundfläche ist die conjugirte Axe.

Wenn FG=FO, oder wenn der W. FOG=FGO ist, und sowohl die Ebene Ab senkrecht auf die Grundfläche, als der Schnitt senkrecht auf jene ist, so ist der Schnitt FNGN ein Kreis so groß als die Grundfläche. Dieser Schnitt heißt der Wechselschnitt (sectio subcontraria.)

Die Eigenschaften des Kreises, welche die Verhältnisse der darin gezogenen geraden Linien betreffen, lassen sich auf die Ellipse übertragen, wenn man diese als eine Projection eines Kreises durch parallele Linien mit der Axe eines Cylinders auf eine gegen die Grundflächen geneigte Ebene betrachtet. Durch diese Projection giebt der Mittelpunct des Kreises in der Grundfläche den Mittelpunct der Ellipse; zwey Durchmesser des Kreises, die auf einander senkrecht sind, geben die conjugirten Durchmesser der Ellipse; parallele Linien, in der Ebene des Kreises werden durch die Übertragung auf die Ellipse parallele Linien, die sich wie jene in in dem Kreise verhalten. Auf diese Art erweiset Maclaurin in seinem Treatise on Fluxions, B I. ch. XIV. manche Eigenschaften der Ellipse. Hier folgen ein paar leichte Beyspiele.

Es sey AB (Fig. 105.) derjenige Durchmesser der Grundfläche des Cylinders, welcher mit der Axe in einer auf die Grundfläche senkrechten Ebene liegt, wenn der Cylinder kein senkrechter ist. An den Umfang des Kreises sey in E die berührende EF gezogen, welche der verlängerten AB in F begegne und ED sey senkrecht auf AB. Der elliptische Schnitt sey aeb. An diesen sind die mit der Axe Cc parallelen Aa, Dd, Bb, Ee, gezogen. Die Ebene durch EF und Ee berührt den Cylinder. Ihr Durchschnitt mit der erweiterten Ebene AabB sey Ff, so ist Ff parallel mit Cc. Die Ebene durch abf und de schneide die Ebene EFfe in ef, so ist ef eine berührende an der Ellipse in e, welche die verlängerte Axe ab in f schneidet. Da die Ebene Ab senkrecht auf die Grundfläche steht, und in dieser ED senkrecht auf AB ist, so ist die Ebene Ed senkrecht auf die Ebene Ab. Da der elliptische Schnitt auch darauf senkrecht ist, so ist die

Durchschnittslinie beider Ebenen, ed, senkrecht auf die Ebene Ab, also senkrecht auf den Durchmesser Ab. Die Segmente der Linie AF sind den gleichnamigen auf af proportional. Nun ist in dem Kreise CD:DB=AD:DF, und CD:CB=CB:CF (s. Kreis); also ist auch in der Ellipse, cd:db=ad:df, und cd:cb=cb:cf, wo d der Punct ist, in welchem die senkrechte von dem Berührungspuncte e die Axe trifft. (S. berühr. Linie, 8.)

In der Grundfläche ACBD eines Cylinders (Fig. 106.) sey irgend eine AB gezogen, welche die beiden unter sich parallelen, CD, EF, in G, H schneide. An den elliptischen Schnitt acbd seyn die der Axe parallelen Aa, Cc, Ee, Bb, Ff, Dd gezogen. In der Ebene des Schnittes ziehe man ab, cd, ef, von welchen die erstere die beiden andern in g, h schneide. Nun sind Gg, Hh, der Axe parallel, als Durchschnitte zweyer Ebenen, mit welchen die Axe parallel ist, (s. Ebene). Daher sind Gg und Hh den Aa und Bb parallel, und es ist AG:AH=ag:ah, so wie auch GB:HB=gb:hb, woraus folget

AG.GB:AH.HB=ag.gb:ah.hb.

Eben so ist

CG.GD:EH.HF=cg.gd:eh.hf.

In dem Kreise ist AG.GB=CG.GD, und AH.HB=EH.HF, also ist in der Ellipse.

ag.gb:ah.hb=cg.gd:eh.hf.

Die Linien cd, ef sind parallel, weil sie in derselben Ebene liegend zugleich in den beiden parallelen Ebenen Cd, Ef befindlich sind. Diese sind parallel, weil Cc mit Ee, und CD mit EF parallel sind. (Eucl. XI, 15.).

Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Inhalte eines Prisma über einer Grundfläche von gleicher Größe mit der Grundfläche des Cylinders, und mit derselben Höhe, oder dem senkrechten Abstande der Grundflächen. Der Cylinder ist nämlich die Gränze der vielseitigen Prismen, deren Grundflächen reguläre Figuren sind. Es gilt also von dem Inhalte der Cylinder was von den Prismen gilt,

daß gleiche Grundflächen mit gleichen Höhen gleichen Inhalt geben.

Es sey der Durchmesser der Grundflächen $= d$; der Umfang $= \pi d$; die Höhe $= h$, so ist der Inhalt des Cylinders $= \frac{1}{4} \pi d d h$. Die Einheit ist der Würfel derjenigen Linie, welche die Einheit für die Längen d und h ist.

Das Verhältniß zweyer Cylinder wird zusammengesetzt aus dem gedoppelten Verhältnisse der Durchmesser und dem einfachen der Höhen.

Bey gleichen Cylindern verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die Quadrate der Durchmesser. (Eucl. XII. 15.)

An ähnlichen Cylindern verhalten sich die Höhen, wie die Durchmesser; ihre körperlichen Räume sind daher wie die Würfel der Durchmesser. (Eucl. XII. 12.)

Ist der Inhalt eines Cylinders gegeben, so steht es frey, Höhe oder Durchmesser zu bestimmen.

Die Höhe sey dem Durchmesser gleich, so ist der Inhalt $= \frac{1}{4} \pi d d d$. Ist der Inhalt gegeben, so ist der Durchmesser bestimmt. Der Inhalt sey $= A$, so ist $d = \sqrt[3]{\frac{4A}{\pi}}$. Z. B. ein Berliner Quart oder Maaß halte 64,218 Cubik-Zoll Rheinl. Duod. Maaß, so ist der Durchmesser eines gleich hohen und dicken Cylinders von diesem Inhalte, $d = 4,3402$ Rh. Duod. Zoll.

$$\log. A = 1,8076230$$
$$\log. 4 = 0,6020600$$
$$\log. \frac{1}{\pi} = 9,5028501 - 10$$

$$\log d^3 = 1,9125331$$
$$\log d = 0,6375010,$$

Die krumme Oberfläche eines senkrechten Cylinders ist gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie der Umfang der Grundfläche, und die Höhe der Axe gleich ist. Wenn dieses mit der Höhe an eine Seitenlinie des Cylinders gelegt und so gekrümmt wird, daß die Grundlinie

in den Umfang der einen Grundfläche fällt, so bedeckt es genau die krumme Oberfläche, indem für jeden Punct der Grundlinie, der in einen Punct des Kreisumfanges fällt, die auf jene Grundlinie senkrechte in die Seite des Cylinders fällt, die durch denselben Punct des Kreises senkrecht auf diesen steht. Der Durchmesser sey d, die Höhe h, so ist die krumme Oberfläche $= \pi dh$. Ist die Höhe dem Durchmesser gleich, so ist die krumme Oberfläche $= \pi dd$, so groß als die Oberfläche der eingeschriebenen Kugel.

Die **Oberfläche** eines **schiefen Cylinders** zu finden, führe man (Fig. 107.) durch die Mittelpuncte C, c der Grundflächen ADBD und adbd Schnitte senkrecht auf die Axe, nämlich durch EDFD und edfd, in dem auf beiden Enden fortgesetzten Cylinder. Diese Schnitte sind Ellipsen, deren große Axen DD, dd, und deren kleine EF, ef sind. Die Seitenlinien des Cylinders stehen auf den Umfang der Ellipsen senkrecht. Man construire ein Rechteck, dessen Grundlinie der Umfang der Ellipse, (welcher als angebbar hier betrachtet wird), und dessen Höhe die Axe des Cylinders ist. Legt man dieses Rechteck mit der als Höhe angegebenen Seite an eine auf der krummen Oberfläche zwischen den beiden elliptischen Schnitten der Axe parallele Linie, wie Ee, Ff, und legt die Grundlinie gekrümmt an die Ellipse, so legt sich das Rechteck an die cylindrische Fläche an, und diese ist daher so groß als jenes Rechteck. Der Theil der Cylinderfläche, welcher auf der einen Seite der elliptischen Flächen liegt, ist demjenigen gleich, welcher auf der andern Seite liegt, nämlich der Theil DAED dem DBFD, und der Theil daed dem dbfd. Folglich ist die cylindrische Fläche gleich dem Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange eines auf die Axe senkrechten elliptischen Schnittes, und die Höhe der Axe des Cylinders gleich ist. Der schiefe Cylinder hat eine andere Art Rundung, als der senkrechte. Sie ist in der Richtung des kleinsten Durchmessers abgeplattet. Daher kann der schiefe Cylinder auf einer gemeinen Drehbank nicht gedrechselt werden.

Bey der Abwicklung der Cylinderfläche verwandelt

sich der Umfang der Grundfläche in eine transscendente krumme Linie. Es sey (Fig. 108.) ADBDA die Grundfläche des Cylinders, EDFDA der elliptische senkrecht auf die Axe geführte Schnitt, welcher jene in DCD schneide. Auf dem elliptischen Quadranten DGE nehme man einen Punct G, und ziehe dadurch GH parallel mit der Axe an H in dem Umfange der Grundfläche. Nun verwandle man DG in eine gerade Linie, und setze darauf durch den Endpunct G eine senkrechte gleich GH, so ist deren Endpunct in der abgewickelten DH. Die Linie GH ist = HC . sin HCG. Es ist also nöthig, den W. HCG durch einen mittelst der Abwickelung gegebenen Winkel auszudrücken. Dieser ist DCG, oder der Winkel, welchen die durch die Axe und durch die beiden CD, CG gelegten Ebenen mit einander machen.

Man ziehe in der Grundfläche den Halbmesser CH, und gedenke sich um C eine Kugelfläche mit dem Halbmesser CD beschrieben. Die Linie CG werde bis an diese verlängert. Zwischen den Endpuncten dieser drey Halbmesser der Kugel, CD, CH und der verlängerten CG entsteht ein sphärisches Dreyeck dhg. (Fig. 109.), worin der Bogen dg das Maaß des W. DCG, der Bogen dh des Winkels DCH, und hg des W. HCG ist. Da die Ebene HCG senkrecht auf die Ebene DCG ist, so ist in dem sphärischen Dreyeck der W. hgd ein Rechter. Der Winkel hdg ist der Winkel der Ebenen, worin die Bogen hd und dg liegen, d. i. der Grundfläche und des elliptischen Schnittes, also gleich dem W. ACE. Man setze ACE = α;

$$DCG = \varphi;\ DCH = \omega,\ \text{so ist}\ \tang \omega = \frac{\tang \varphi}{\cos \alpha},$$

und $\sin HCG = \sin \alpha . \sin \omega$, da in dem sphärischen Dreyeck ist $\cos d . \tang hd = \tang dg$, und $\sin hg = \sin d . \sin hd$. Der Halbmesser der Grundfläche sey $= a$, und die Linie $GH = y$, so ist $y = a \sin \alpha . \sin \omega$. Wird nun für irgend einen Winkel φ die Länge des elliptischen Bogens DG durch die dafür gehörige Reihe (s. Rectification) gefunden, wird ferner aus φ der Winkel hergeleitet, und daraus die Linie y berechnet, so hat man ein paar

ordinaten an der krummen Linie, in welche der Umfang der Grundfläche des Cylinders durch die Abwickelung sich verwandelt. Die krumme Linie bekommt eine Gestalt, wie die in (Fig. 110.) gezeichnete, wo die gerade DDD der Umfang der Ellipse ist, DG ein Bogen der Ellipse von dem einen Durchschnittspuncte der Grundfläche mit dem elliptischen Schnitte an genommen, die darauf senkrechte GH das Stück der Seite des Cylinders zwischen jenen beiden Schnitten: EA und FB die größten Ordinaten, jede $= a \sin \alpha$. Die krumme Linie schneidet die Abscissenlinie unter dem Winkel α oder ACE. Der Schnitt eines ausgebreiteten Ärmels, wo er an das Leibstück genehet werden soll, hat eine solche Gestalt, nur daß hier die gerade DD die abgewickelte Kreislinie der Grundfläche eines senkrechten Cylinders, und DABD eine abgewickelte Ellipse seyn mag.

Cylindroid ist erstlich ein cylinderartiger Körper, der zwischen zwey parallelen ebenen Grundflächen, die nicht Kreise sind, und einer krummen Oberfläche, die auf dieselbe Art, wie an dem Cylinder beschrieben wird, eingeschlossen ist. Wenn die Grundflächen elliptisch sind, so ist das Cylindroid zugleich ein Cylinder. Denn so wie man in einem Cylinder immer einen elliptischen Schnitt legen kann, dessen Axen ein gegebenes Verhältniß haben, so kann man auch umgekehrt zu jeder elliptischen Grundfläche für die gegebene Lage der Axe die Lage der circularen Grundfläche finden. Die Schriftsteller, welche den cylindrischen Körper mit elliptischen Grundflächen unterscheiden, worunter auch d'Alembert in dem Dictionn. encyclop. gehört, haben diesen Umstand nicht beachtet.

Zweytens haben Wren und Parent dem Körper, der durch die Umdrehung einer Hyperbel um eine durch den Mittelpunct auf die Hauptaxe senkrechte gerade Linie erzeugt wird, den Namen, Cylindroid, gegeben Hier ist diese Benennung schicklich. Die Oberfläche läßt sich für eine gegebene Höhe desselben auf dieselbe Art finden, wie die eines gedruckten Sphäroids von dem durch den Mittelpunct gelegten Kreise

an genommen. In dem Artikel, Sphäroid, wird dieses gezeigt. Parent hat darüber eine Abhandlung in den Mem. de l'Acad. 1709 geliefert. Der Inhalt eines Abschnittes dieses Körpers, zwischen der Grundfläche und einem dieser parallelen Schnitte ist in dem Artikel, Cubirung. S. 582, gefunden.

D

Dactylonomia oder Chironomia, **Fingerrechenkunst**, ist ein Verfahren, die Finger anstatt der Ziffern zu gebrauchen, und dadurch Zahlen anzugeben. (δακτυλος der Finger, χειρ die Hand). Es ist dabey alles willkührlich. Die einfachste Art wäre, die Ziffern durch die Anzahl der ausgestreckten Finger, die übrigen eingeschlagen, anzudeuten, zuerst die Einer, dann die Zehner, u. s. f. Oder man läßt den Daumen der linken Hand Eins, den Zeigefinger derselben Zwey, und so ferner nach ihrer Folge bedeuten. Oder man bezeichnet die Anzahl der Einer, der Zehner, der Hunderte, der Tausende, jede durch eine gewisse, ganz willkührliche, Stellung der ausgestreckten und eingeschlagenen Finger; die Anzahl der Zehntausende und Hunderttausende durch eine Legung der Hand gegen den Leib. Man müßte ein sehr gutes Gedächtniß haben, die Bedeutungen aller dieser ganz willkürlichen Lagen zu behalten. Abbildungen in Leupolds Theatro Arithm. §. 3. und in Rosenthals natürlicher Magie 7. Bd. 276. S.

Datum, was als bestimmt und bekannt angenommen wird, oder erwiesen ist, in Absicht auf Größe, oder Lage, oder Verhältnisse, s. Gegeben.

Data des Eukloides, eine Sammlung von Lehrsätzen, welche zeigen, wie aus gewissen Verhältnissen oder Größen andere folgen. Sie ist für die Analysis der Alten ein wichtiges Hülfsmittel. Mittelst dieser Sätze sucht man bey der Auflösung einer Aufgabe, was aus den gegebenen Dingen folgt, was aus diesem wieder hergeleitet wird,

u. s. w., bis daß man findet, daß das, was in der Aufgabe zu leisten verlangt wird, gegeben sey. Oder man geht von dem gesuchten als gegeben aus, und sucht, wie man durch Größen und Verhältnisse, deren eins durch das andere gegeben wird, auf etwas gegebenes komme, um von diesem wieder auf das gesuchte zurück zu gehen. Beyspiele. Der 9te Satz in der Ausgabe von Gregory: Wenn zwey oder mehrere Größen zu einander gegebene Verhältnisse haben, und wenn sie zu andern Größen gegebene, wenn auch nicht einerley Verhältnisse haben, so werden diese andern Größen auch gegebene Verhältnisse zu einander haben. Der 66ste Satz: Wenn in einem Dreyeck ein Winkel gegeben ist, so hat das Rechteck von den einschließenden Seiten zu dem Dreyeck ein gegebenes Verhältniß.

Dieses Werk ist zuerst griechisch und lateinisch mit den andern Schriften des Euklides von Dasypodius 1571 zu Straßburg herausgegeben. Eine besondere Ausgabe mit einer neuen Uebersetzung hat Hardy besorgt, Paris 1625. Diese Uebersetzung hat Gregory in seiner schönen Ausgabe der Euklidischen Schriften, Oxford, 1703 fol. mit Verbesserungen dem griechischen Texte beygefügt. Robert Simson hat eine englische Uebersetzung geliefert, worin er Änderungen des Ausdrucks und der Ordnung der Sätze vorgenommen, auch einige neue Sätze hinzugethan hat. Diese Ausgabe hat Schwab ins Deutsche übersetzt, und mit einer Sammlung geometrischer, nach der analytischen Methode der Alten aufgelöseten Probleme begleitet. Stuttgard 1780.

Decimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz der Zehn ist, wie $\frac{23}{100}$; $\frac{478}{1000}$. Da die Rechnung mit dieser Gattung von Brüchen nicht mehr Schwierigkeit macht, als die mit ganzen Zahlen, so werden in der Mathematik fast keine andere gebraucht.

So wie man die ganzen Zahlen aus Einheiten, in einer nach dem Zehnfachen aufsteigender Folge von den Einern an zusammensetzt, so setze man auch die eigentlichen Brüche aus Einheiten in einer nach dem Zehnfachen her-

absteigenden oder abnehmenden Folge aus Zehntheilchen, Hunderttheilchen, Tausendtheilchen, u. s. f. zusammen. Und wie man den Werth der Zahlziffern linker Hand hin mit jeder Stelle zehnfach größer werden läßt, so lasse man, von der Stelle der Einer nach der Rechten hin, die Werthe der Ziffern mit jeder Stelle zehnmahl kleiner werden, dann kann man die Nenner der Brüche ersparen, und die Bruchrechnung völlig wie mit ganzen Zahlen verrichten. Nur muß man die Stelle der Einer durch ein Zeichen, als einen Punct, oder wie es gewöhnlich ist, durch ein Komma bemerken. Solchergestalt hat man die Zahl 43,85304 zu lesen: 43 Einer, 8 Zehnth., 5 Hunderttth., 3 Tausendth., 0 Zehntausendth., 4 Hunderttausendth. Wenn keine Ganze vorhanden sind, so wird in die Stelle der Einer die 0 gesetzt, wie 0,693. Fehlen auch die Zehntheilchen, Hunderttheilchen u. m. so wird deren Stelle auch durch 0 ausgefüllt, wie 0,048; 0,004314.

Die nach dem Komma stehenden Ziffern, mit Weglassung der Nullen, die etwa unmittelbar nach dem Komma folgen, sind der Zähler eines Bruches, dessen Nenner die Eins mit so vielen Nullen ist, als durch das Komma Ziffern und Nullen rechter Hand abgesondert sind. Z. B. $43,85304 = 43\frac{85304}{100000}$; $0,048 = \frac{48}{1000}$.

Einem auf angezeigte Art ausgedruckten Decimalbruche kann man so viele Nullen anhängen, als man will, weil der Werth jeder Ziffer durch das Komma bestimmt ist. Aber für jede Stelle, die das Komma rechter Hand hin fortrückt, wird die Zahl mit 10 multiplicirt, und für jede Stelle, die es linker Hand hinaufrückt, durch 10 dividirt.

Einen jeden Bruch verwandelt man in einen Decimalbruch, wenn man Zähler und Nenner mit einer Potenz von 10 multiplicirt. und das Product aus dem Zähler in diese Potenz durch den Nenner dividirt, wobey aber oft ein Rest bleibt, den man inzwischen beliebig vermindern kann, da die Potenz der 10 nach Belieben groß genommen werden mag.

Z. B. $\frac{9}{17} = 0,5294117 \ldots$

Ein Rest bleibt immer, wenn der Nenner andere Factoren als 2 und 5 hat, vorausgesetzt, daß der Bruch auf die kleinste Zahlen gebracht sey.

Addition. Decimalbrüche werden wie ganze Zahlen addirt, nachdem man sie so geordnet hat, daß die Kommata, und also die Einheiten von gleichem Werthe, über einander stehen.

Beyspiel.

```
  84,732
   7,5048
 432,14
   0,05389
-----------
Summe = 524,43069
```

Subtraction. Diese geschieht auf die nämliche Art.

```
43,06847        537,48
17,487           12,5934
--------        --------
25,58147        524,8866
```

Multiplication. Man verfährt, als wenn man ganze Zahlen mit Weglassung des Komma zu multipliciren hätte, und schneidet von dem Producte so viele Ziffern von der rechten nach der linken Hand ab, als in beiden Factoren zusammen abgeschnitten sind.

Beyspiele.

7526	7,526	75,26	0,274
3,47	3,47	0,347	0,0426
526,82	0,52682	0,52682	1644
3010,4	3,0104	3,0104	548
22578	22,578	22,578	1096
26115,22	26,11522	26,11522	0,0116724

In dem letzten Exempel sind die Nullen vor den bedeutenden Ziffern in den Partialproducten zur Bequemlichkeit weggelassen.

Division. I. Fall, wenn Dividendus und Divisor ganze Zahlen sind. Ist jener größer als dieser, und es bleibt ein Rest, nachdem die Einer in dem Quotienten gefunden sind, so macht man diesen durch Hinzusetzung einiger Nullen zu Decimaltheilen, welches folgweise geschehen mag, nämlich den ersten Rest zu Zehntheilchen, den folgenden Rest zu Hunderttheilchen u. s. f. wodurch die Theile des Quotienten nach der Reihe in gleichnamigen Decimaltheilen gefunden werden. Wenn die Reduction eines Restes auf eine zehnfach kleinere Einheit zur Division nicht genügt, so bringt man ihn auf eine noch kleinere Einheit, bis er durch den Divisor theilbar wird. Ist der Dividendus kleiner als der Divisor, so verwandelt man ihn in Decimaltheile, wie schon gewiesen ist.

Exempel.

37	872	23, 567 567 567 . . .
74	132	Einer
111	210	Zehnth.
185	250	Hundertth.
222	280	Tausendth.
259	210	Zehntausendth.

Die Producte aus dem Divisor in jeden Theil des Quotienten sind zur Seite gesetzt. Da der Rest 21 Tausendth. schon, was die Ziffern betrifft, bey den Einern vorgekommen ist, so kehren dieselben Ziffern von den Zehntheilchen an, wieder. In jedem nicht vollständigen Decimalbruche giebt es solche Perioden, wovon hernach.

II. Fall, wenn der Dividendus allein Decimaltheile enthält. Die Division wie vorher, nur daß das Komma in dem Quotienten um so viele Stellen nach der linken Hand fortrückt, als Ziffern in dem Dividendus abgeschnitten sind.

37	8, 72	0, 23567 567 . . .

III. Fall, wenn der Divisor Decimaltheile enthält. Man rückt das Komma in denselben vorwärts bis zur letz-

ten Ziffer, und das Komma in dem Dividendus um eben so viele Stellen, in welche man für die etwa fehlenden Ziffern Nullen setzt.

Exempel.

	3, 7	87, 2	
das ist	37	872 ‖	23, 567 567 ...

oder

0, 37	872	
37	87200 ‖	2356, 7567 ..

Perioden der Decimalbrüche.

Wenn ein Rest, zu welchem keine Ziffer aus dem Dividendus zu nehmen war, wieder kommt, was nämlich die Ziffern, ohne Rücksicht auf ihre Einheit betrifft, so kehren die Ziffern in dem Dividendus, von derjenigen an, die aus jenem Reste entstanden ist, wieder, wie das vorige Beyspiel gezeigt hat. Nun können nicht mehr verschiedene Reste Statt haben, als der Divisor Einheiten weniger eine hat. Daher hat jeder Decimalbruch, der einem rationalen Bruche gleich ist, wenn er nicht abbricht, von einer Stelle an Perioden wiederkehrender Ziffern. Man braucht die wirkliche Division nicht weiter als bis zu dem Ende einer Periode fortzusetzen. Alle folgenden Ziffern sind dadurch gegeben.

Die Perioden können aber auch weniger Ziffern enthalten als der um Eins verminderte Divisor Einheiten hat.

Wenn der Divisor die Form $10^m - 1$ hat, so enthält jede Periode des Quotienten m Ziffern. Denn es sey der Bruch $= \frac{N}{D}$, und $D = 10^m - 1$, so ist $\frac{N}{D} = N(10^{-m} + 10^{-2m} + 10^{-3m} + \text{etc.})$. (Buchstabenrechnung, 26.). Z. B.

$$\frac{247386}{9999} = 24,7386$$

```
            24,7386
                 24 7386
                      24 7386
                           247 . . .
---------------------------------------
            24,7410 7410 7410. . . .
```

Eben das findet Statt, wenn der Divisor ein Factor von $10^m - 1$ ist. Es sey nämlich $D = \frac{10^m - 1}{a}$, wo a eine ganze Zahl ist, so ist $\frac{N}{D} = \frac{N.a}{10^m - 1}$.

Da $10^{2m} - 1 = (10^m - 1)(10^m + 1)$ ist, so geben Divisoren, welche die Form $10^m + 1$ haben, oder Factoren einer Zahl von dieser Form sind, Perioden von 2m Ziffern.

Es ist

$10 - 1 = 9.1 = 3.3$	$10^3 - 1 = 9.3.37$
$10^2 - 1 = 9.11$	$10^4 - 1 = 9.11.101$

$10^5 - 1 = 9.41.271$

$10^6 - 1 = 9.3.7.11.13.37.$

Auch $10^4 + 1 = 73.137$,

Die Primzahlen, die hier als Factoren vorkommen, geben als Divisoren Perioden von so viel Ziffern, als der Exponent der Potenz von 10 in dem niedrigsten zugehörigen Producte $10^m - 1$ Einheiten enthält. Die Factoren 73 und 137 von $10^4 + 1$ geben Perioden von 2 mahl 4 Ziffern.

Eine allgemeinere Theorie als diese fragmentarische ist, giebt Gauß in den Disquisitionibus arithmeticis, sect. VI. Aus dieser ist folgende Tafel für die einfachen Divisoren bis 97, und die Anzahl der Ziffern in den Perioden der Quotienten gezogen. Der Divisor ist mit D, die Anzahl der Ziffern in den Perioden mit Z bezeichnet.

D	Z	D	Z
3	1	47	46
7	6	53	13
11	2	59	58
13	6	61	60
17	16	67	33
19	18	71	35
23	22	73	8
29	28	79	13
31	15	83	41
37	3	89	44
41	5	97	96
43	21		

Der Nenner D des Bruchs $\frac{N}{D}$ sey das Product von zwey Primzahlen A und B. Der Quotient $\frac{1}{A}$ enthalte Perioden von m Ziffern, der Quotient $\frac{1}{B}$ enthalte Perioden von n Ziffern, so bestehen die Perioden des Bruches $\frac{N}{A.B}$ aus so viel Ziffern, als die kleinste Zahl, worin m und n aufgehen, Einheiten hat, also aus m n Ziffern, wenn m und n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Zum bessern Verständniß des Beweises diene vorläufig folgendes Exempel.

$\frac{1}{7} = 0,\ 142857\ 142857\ 142857 \ldots$

$\frac{1}{101} = 0,\ 0099\ 0099\ 0099\ 0099 \ldots$

Hier ist $m = 6$; $n = 4$, und die kleinste Zahl, worin beide aufgehen, ist 12; also hat $\frac{1}{7 \times 101}$ Perioden von 12 Ziffern. Es ist

$$\frac{1}{7 \times 101} = 0,001414127157\ 00141\ldots$$

Man bemerke hierbey, daß die beiden ersten Perioden des Bruches $\frac{1}{7}$ sich durch den Nenner des andern Bruches, so wie die vier ersten Perioden dieses zweyten sich durch den Nenner des ersten ohne Rest theilen lassen.

Es sey nun, wenn m und n einen gemeinschaftlichen Theiler haben, $m : n = p : q$, wo $p : q$ die kleinsten Zahlen für dieses Verhältniß sind. Man bezeichne die Ziffern in einer Periode des Bruches $\frac{1}{A}$ durch . . . a, b, c . . . . k, etc. die zum Theil o seyn können, so daß $\frac{1}{A} = a.10^{-1} + b.10^{-2} + c.10^{-3} \ldots + k.10^{-m} + a.10^{-m-1} \ldots + k10^{-2m} + a^{-2m-1} \ldots + k.10^{-qm} + \frac{1}{A.10^{qm}}$. Der Rest am Ende der ersten Periode ist nämlich $= 1.10^{-m}$, am Ende der zweyten . . . $= 1.10^{-2m}$; am Ende der qten $= 1.10^{-qm}$. Dieser Rest mit A dividirt giebt die Ergänzung des Decimalbruchs zu dem vollständigen Werthe des Bruches $\frac{1}{A}$.

Demnach ist

$$10^{qm} - 1 = (a.10^{qm-1} + b.10^{qm-2} \ldots + k) A.$$

Man bezeichne nun auch die Ziffern in einer Periode des Bruches $\frac{1}{B}$ durch $\alpha, \beta, \gamma,$ . . . . $\varkappa$, so ist auf dieselbe Art

$$10^{pn} - 1 = (\alpha, 10^{pn-1} + \beta.10^{pn-2} \ldots + \varkappa) B$$

Da $pn = qm$ ist, so ist $(a, 10^{qm-1} \ldots + \varkappa) A = (\alpha.10^{pn-1} \ldots + \varkappa) B$. Folglich ist A ein Theiler des Factors von B, so wie B ein Theiler des Factors von

A ist, da A und B Primzahlen sind. Also ist auch A ein Theiler von $\alpha . 10^{-1} + \beta . 10^{-2} \ldots + \varkappa . 10^{-pn}$, so wie B ein Factor von $a . 10^{-1} + b . 10^{-2} \ldots + k . 10^{-qm}$. Wird nun der ohne Ende fortlaufende Decimalbruch $\frac{1}{A}$ durch B dividirt, so geht die Division bey je q m Ziffern, von der Stelle der Zehntheilchen angefangen, ohne Rest auf, und in den Stellen $- qm - 1$; $- 2qm - 1$; $- 3qm - 1$; etc. kehren dieselben Ziffern wieder. Eben so verhält es sich, wenn der Decimalbruch $\frac{1}{B}$ durch A dividirt wird. Mit je pn Stellen kommen dieselben Ziffern wieder. Der Bruch $\frac{1}{A . B}$ enthält also Perioden von q m, das ist, pn Ziffern. Kürzer sind die Perioden nicht, weil die obigen Producte nur dann gleich sind, wenn $10^{qm} - 1 = 10^{pn} - 1$, oder wenn $qm = pn$ ist.

Der Bruch $\frac{N}{A . B}$ enthält daher auch Perioden von qm ($= pn$) Ziffern, Denn bey der Multiplication des Decimalbruchs $\frac{1}{A . B}$ durch N enthalten die Partialproducte durch die Theile von N jedes q m ($= pn$) Perioden, und werden in allen Perioden von $\frac{1}{A . B}$ auf gleiche Art unter einander geordnet.

Der Decimalbruch $\frac{N}{A . B . C}$, wo A, B, C Primzahlen sind, enthält so viele Ziffern in jeder Periode, als die kleinste Zahl, worin das Product der Ziffer-Menge in den Perioden von $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$ aufgeht, Einheiten enthält. Auf ähnliche Art verhält es sich bey noch mehr untheilbaren Factoren in dem Divisor.

Wenn der Divisor eine Potenz von 2, oder von 5,

oder von beiden enthält, so ist die Ziffer-Menge in den Perioden dieselbe, welche in dem Decimalbruche, nach Absonderung jener Factoren, Statt hat. Denn $\frac{1}{2}$ ist $\frac{5}{10}$; $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$; $\frac{1}{8} = \frac{125}{1000}$; etc. und $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$; $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$, etc. Die Division durch die Potenzen von 10 verändert die Ziffern nicht, nur ihre Stellen in Absicht auf die Stelle der Einer; und die Multiplication durch die Zähler verändert den Umfang der Perioden nicht. Bey der Bestimmung der Größe der Perioden in einem Decimalbruche hat man daher die Factoren 2 und 5, wenn solche in dem Divisor vorhanden sind, abzusondern.

Zu vergleichen: Wallisii Algebra, cap. 89.

Eulers Algebra, §. 525. ff.

Robertson on the theory of circulating Decimal Fractions. Philos. Trans. 1768.

Bernoulli sur les fractions décimales périodiques. Mem. de Berlin 1771.

Gauss disquisitiones arithmeticae. §. 312. s. s. Lipsiae 1801.

Decimalmaaß ist die Eintheilung der Einheit zum Messen oder Zählen, in Zehntheile, Hunderttheile u. s. f. nach der Decimalprogression. Man sagt Fuße, Zolle, Linien, Decimalmaaß, oder Decimalfuß, Decimal-Zoll, Decimallinie. Ein Decimalfuß bezieht sich auf eine Ruthe als Einheit; ein Fuß schlechtweg ist eine willkürliche Einheit für sich selbst. Man hat jetzt angefangen, den Quadranten eines Kreises in Decimaltheile zu theilen, so daß der zehnte Theil des Quadranten, ein Decimalgrad, der hundertste Theil eine Decimalminute heißen müßte, wenn man die alten Benennungen neben den neuen Theilen behalten wollte. Die französischen Mathematiker nennen den hundertsten Theil des Quadranten einen Decimalgrad; den hundertsten Theil dieses Grades eine Decimal-Minute; den hundertsten der Minute, eine Decimal-Secunde, (Tables trigonométriques décimales par Borda et Delambre, pag. 18). Die Benennung Centesimale wäre bestimmter.

Die Eintheilung nach der Decimalprogression ist ohne Streit die bequemste, weil man nach derselben die Bruchtheile wie ganze Zahlen, ohne die umständliche Reduction, die bey andern Eintheilungen nöthig ist, behandeln kann. Freylich werden die trigonometrischen und astronomischen Tafeln, die nach der Sexagesimaltheilung eingerichtet sind, dadurch fast unbrauchbar, und man muß sich an ganz neue Zahlen für bekannte individuelle Größen in der Physik und Astronomie gewöhnen. Allein die viel größere Leichtigkeit der Rechnungen nach dem Decimalmaaße vergütet das alles. Wenn die astronomischen Tafeln mit den neuesten Verbesserungen nach dem Decimalsystem abgefaßt sind, so wird jeder Astronom seine Rechnungen nach demselben machen müssen, da die ältern Tafeln ihm nicht die gehörige Genauigkeit gewähren würden. In kleinern Rechnungen z. E. bey geodätischen, wird man sich der bisherigen Eintheilung noch bedienen können, so lange die Instrumente nach derselben verfertigt sind.

Decimal-Rechnung, ist das Verfahren mit Decimalbrüchen zu rechnen. Sie ist in dem Artikel, Decimalbruch, vorgetragen. Regiomontanus hat die Veranlassung zu dieser Rechnung gegeben, da er die Sexagesimal-Eintheilung des Halbmessers eines Kreises mit der bequemern in zehn Millionen Theile vertauschte. Um die Mitte des sechszehnten Jahrhunderts zeigten Buckley und Recorde in England und Ramus in Frankreich, wie die Bruchtheile bey der Ausziehung der Quadratwurzel in Decimaltheilen auszudrücken sind, da man vorher irgend einen andern Bruch der ganzen Wurzelzahl angehängt hatte. Simon Stevin scheint die Rechnung mit Decimaltheilen wirksam empfohlen zu haben, in einer besondern Schrift, die 1585 in einer französischen Uebersetzung herausgekommen, und seiner praktischen Arithmetik, in der Sammlung seiner Werke beygefügt ist, worin er den Nutzen der Eintheilung und Rechnung nach Zehnen zeigt.

Er bedient sich noch nicht des jetzt gewöhnlichen Komma oder Punctes, die Stelle der Einer anzuzeigen. Er giebt jeder Stelle einen eignen Namen: Primen, Secunden f. s. welches die Feldmesser lange Zeit beybehalten haben.

Decken s. Congruenz.

Decrementa, die Unterschiede der Glieder einer fallenden oder abnehmenden Reihe von den nächst vorhergehenden. Man begreift diese auch unter dem Namen, Incrementa, die in diesem Falle negative Zunahmen, d. i. Abnahmen sind. Die Benennung, Differenz, begreift beides. Gewöhnlich wird das vorhergehende Glied von dem folgenden abgezogen, so daß die Differenz negativ ist, wenn jenes größer als dieses ist, beide positiv genommen.

Decussare, sich schneiden, wird von Linien gebraucht. Decussis hieß bey den Römern ein Gewicht von zehn Pfund, decem asses. Dieses ward durch X bezeichnet, daher auch diese Figur selbst decussis hieß.

Deficiens hyperbola ist nach Newton eine Gattung von Linien aus der dritten Ordnung, welche nur eine Asymptote haben, an welcher sie mit zwey Schenkeln nach entgegengesezten Richtungen hinlaufen. Sie heißen mangelnde, weil die Hyperbel, welche ein Kegelschnitt ist, zwey Asymptoten mit vier Schenkeln hat. Unter den Linien der dritten Ordnung giebt es auch Hyperbeln mit drey Asymptoten und sechs Schenkeln. Diese nennt Newton hyperbolas redundantes.

Die Gleichung für die hyperbola deficiens ist . . $xyy + ax^3 + bx^2 + cx + ey + d = o$, wo b, c, e, d negativ seyn können, a aber positiv ist. Nimmt man die Ordinaten y auf der Asymptote, so schränkt sich für ein unendlich großes y und unendlich kleines x die Gleichung auf die Glieder $xyy + ey$ ein, daher die Gränzgleichung ist $xy + e = o$, eine Gleichung für die gemeine Hyperbel, wenn die Abscissen von dem Mittelpuncte aus auf der einen Asymptote genommen werden, und die Ordinaten der

anderen Asymptote parallel sind. Die Hyperbel nähert sich mit denjenigen beiden Schenkeln, die zu der Asymptote der Curve gehören, dieser ohne Ende. Sechs Arten der defectiven Hyperbel haben keinen Durchmesser; sieben Arten haben einen, der nämlich die mit der Asymptote parallelen Doppelordinaten halbirt. Diese Hyperbeln können mit einer Ovale, einer knopfartigen Biegung, einem Knoten, einer Spitze verbunden seyn. Newtoni enum. linearum tertii ordinis. Fig. 43 — 53. S. Krumme Linien vom dritten Grade.

Deficiens numerus, eine Zahl, deren aliquote Theile zusammen genommen, weniger betragen als die Zahl selbst. Z. B. Die Zahl 105, deren einfache Factoren sind 3, 5, 7, und deren Theiler sind 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, von welchen die Summe ist 87. Die Formeln, wodurch Zahlen von dieser Beschaffenheit gefunden werden, sind denen ähnlich, wodurch die überschießenden Zahlen (numeri abundantes) gefunden werden, nur daß das Zeichen der Ungleichheit entgegen gesetzt zu nehmen ist. S. abundans numerus. Eine Zahl deren Theiler zusammen der Zahl selbst gleich sind, heißt eine **vollkommene Zahl**. Dieser Zahlen sind sehr wenige.

Definition. s. Erklärung

Dekadik, dekadisches Zahlensystem, dekadische Form der Zahlen, ist die Vertheilung der Zahlen in Classen von zehnfach steigenden Einheiten, deren jede Classe zehn enthält, so daß zehn Einheiten einer Classe eine Einheit der nächst höhern Classe ausmachen. Die Einheiten der vier ersten Classen heissen: **Einer, Zehner, Hunderte, Tausende.** Die Tausende zählen wir wie Einer bis zu tausend Tausenden, das ist einer **Million**; die Millionen wie Einer bis zu einer Million derselben oder einer **Billion.** Von dieser steigen wir zu einer **Trillion, Quadrillion, Quinquillion,** u. s. f., welche Einheiten jede eine Million mahl größer sind, als die nächst vorhergehende. In der Fortschreitung nach Zehnern ist auch die Fortschreitung nach Tausenden enthalten, so daß wir mit

den Tausenden der Einer, der Tausende selbst, der Millionen, einen Ruhepunct im Zählen machen, daher wir die Tausende als Ordnungen der Zahlen, jede von drey Classen ansehen können. Die Abtheilung der Zahlen in Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. rührt von einem Niederländischen Mathematiker, **Albert Girard**, her, s. Algebra.

Die Bezeichnung der Zahlen geschieht auf eine dieser Vertheilung gemäße Art. Die Einer, Zehner, Hunderte, u. s. f. werden alle durch dieselben Zeichen, deren nur neun nöthig sind, angedeutet; die Größe oder die Beschaffenheit der Einheit wird durch die Stelle des Zeichens angezeigt. Die Einer nehmen den ersten Platz rechter Hand ein, die Zehner den zweyten, die Hunderte den dritten, u. s. f. die Einer von Millionen den siebenten, die Einer von Billionen den dreyzehnten, die Einer von Trillionen den neunzehnten, u. s. w. Die Stelle der Millionen kann man oben mit einem Striche, der Billionen mit zwey Strichen u. s. w. bezeichnen; odee man rückt die Millionen, die Billionen, u. s. f. oder die Abtheilungen von je sechs Ziffern ein wenig von einander ab. Wenn eine Gattung von Einheiten fehlt, so wird ihre Stelle durch 0 ausgefüllt. Die Sache ist so bekannt, daß es an einem Beyspiele genügen wird. Die folgende Zahl,

$$18''' 446744'' 073709' 551615$$

ist die Summe der Körner, welche man erhält, wenn für das erste Feld eines Schachbrettes eins, für das zweyte zwey, für das dritte vier, und so immer weiter doppelt gerechnet werden. Das Zeichen 5 zeigt fünf an, aber in der ersten Stelle bedeutet es fünf Einer, in der fünften fünf Zehntausende, in der sechsten fünf Hunderttausende. So auch für jede andere Zahlziffer.

Die alten Völker, selbst die Griechen, haben fast alle sehr unbequeme Bezeichnungsarten der Zahlen gehabt. Die Indier haben die gegenwärtig allgemein gebräuchliche erfunden; von diesen ist sie durch die Araber nach Europa gekommen. Die Geschichte der verschiedenen Bezeichnungsarten ist in dem Artikel: **Zahlzeichen**, anzutreffen.

Dekadische Arithmetik. Die Rechnung mit Zahlen von der dekadischen Form. Zu vergleichen sind die Artikel; dodekadische und dyadische Arithmetik.

Dekagonalzahl ist eine ganze Zahl von der Form $n(4n-3)$. Sie gehört unter die Polygonalzahlen. Siehe diesen Artikel.

Delische Aufgabe ist eine bey den Alten sehr berühmte Aufgabe von der Verdoppelung eines Würfels, das ist, die Seite eines Würfels zu finden, welcher doppelt so groß ist als ein gegebener. Sie führt darauf, daß zwischen zwey gegebenen Linien zwey in stetiger Proportion gefunden werden. Denn das Verhältniß zweyer Würfel ist das dreyfache (triplicata) ihrer Seiten. In der stetigen Progression, $a : b : c : d$, ist das Verhältniß $a : d$ auch das dreyfache des Verhältnisses $a : b$, indem es aus den drey gleichen Verhältnißen $a : b$; $b : c$; $c : d$ zusammen gesetzt wird, (s. Verhältniß) Sind a und b die Seiten zweyer Würfel, so verhalten sich diese Körper wie $a : d$, und umgekehrt ist das Verhältniß der Würfel gegeben, so ist das Verhältniß ihrer Seiten das von $a : b$ oder $c : d$, wo b und c die beiden mittlern Proportionalen zwischen a und d sind. Diese können durch die gemeine Geometrie nicht gefunden werden; daher ward die Aufgabe für die Alten von Wichtigkeit, indem sie zu Untersuchungen höherer Art führte. Sie ist auch durch Sagen von der Veranlassung dazu verherrlicht. Der König Minos, ist die eine Sage, habe seinem Sohn Glaukus ein Grabmahl errichten lassen. Da die Bauleute es hundert Fuß lang, breit und hoch gemacht hatten, fand er es zu klein, und verlangte, daß es noch einmahl so groß sollte gemacht werden. Hier entstand die Frage, wie die Seiten zweyer Würfel sich verhalten, deren einer doppelt so groß ist, als der andere. Die zweyte Sage ist, das Orakel zu Delos habe einmahl befohlen, den Altar des Apollo, welcher ein Würfel war, zu verdoppeln. Da man dieses nicht zu bewerkstelligen wußte, habe man bey Plato dazu die Anweisung gesucht. Dieses erzählt Eratosthenes in

einem Schreiben an den König Ptolemäus Evergetes, worin er ein von ihm erfundenes Instrument zur Erfindung zweyer oder auch mehrerer stetiger mittlern Proportionallinien beschreibt. Das Schreiben hat Eutocius in seinem Commentar über des Archimedes Schrift von Kugel und Cylinder aufbehalten. Plutarch in der Schrift von dem Genius des Sokrates führt die zweyte Sage noch mit mehrern Umständen an. Eine Pest in Griechenland habe veranlaßt das Orakel in Delos zu befragen, worauf man jene Antwort erhalten; da man aber die Vergrößerung des Altars auf unrechte Weise gemacht, und die Pest nicht nachgelassen habe, so sey man bey wiederholter Anfrage belehrt worden, daß die Form cubisch bleiben müßte. Plato habe den an ihn Abgeordneten geantwortet; dem Gott sey eigentlich an der Verdoppelung seines Altars nichts gelegen; er verweise dadurch den Griechen ihre Gleichgültigkeit gegen die Geometrie, befehle ihnen den Kriegen zu entsagen, und vermahne sie, sich der Erwerbung von Kenntnissen mit Ernst zu befleißigen. Vielleicht hat Plato selbst den Ausspruch des Orakels veranlaßt. Die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels ist älter. Denn Hippokrates von Chios, der durch die Quadratur der Lunula bekannt ist, ist schon vor Platons Zeit darauf gefallen, und hat auch eingesehen, daß die Auflösung auf die Erfindung zweyer mittlern Proportionallinien ankomme.

Die Aufgabe hat die vornehmsten Geometer unter den Alten beschäftigt. Ihre Auflösungen hat uns Eutocius a. a. O. aufbewahrt. Die von Eratosthenes, Nikomedes und Hero gegebenen hat Pappus in seine mathematischen Sammlungen aufgenommen, im 3ten Buche, wozu er noch eine von ihm gefundene fügt. Plato gebraucht eine Art von Parallellinial zur mechanischen Auflösung. Archytas von Tarent, ein vertrauter Freund des Plato, gab eine verwickelte, bloß intellectuelle Auflösung, welche gewisse Bewegungen von einem Dreyeck und einer Kreisfläche gebraucht. Menächmus, der, wie es scheint, zuerst die Kegelschnitte

betrachtet hat, gebrauchte den Durchschnittspunct einer Parabel und Hyperbel, desgleichen auch den Durchschnittspunct zweyer Parabeln, mit einem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte. Apollonius von Pergä hat nach dem Berichte des Pappus auch die Kegelschnitte zur Auflösung unserer Aufgabe angewandt, aber sein Verfahren ist nicht zu uns gekommen. Seine mechanische Construction ist dieselbe, wie die von Hero angegebene, welcher sie vielleicht von ihm entlehnt hat. Da man von der Aufgabe Gebrauch bey den Kriegsmaschinen machen konnte, wenn man die Verhältnisse der Hauptmaaßen, nach der Wirkung, die sie leisten sollten, zu bestimmen hatte, so war man auf praktische Constructionen bedacht, die durch Probiren das Gesuchte geben. Solche gaben Hero von Alexandrien, und Philo von Byzanz. Die Auflösung des erstern beruhte darauf, daß eine gerade Linie durch einen gegebenen Punct so gelegt ward, daß die Durchschnittspuncte mit den Schenkeln eines rechten Winkels von einem bestimmten Puncte, der Mitte zwischen dem gegebenen Puncte und dem Scheitel des rechten Winkels, gleiche Abstände bekamen. Davon mußte man sich durch unmittelbare Messung versichern. Die Construction des Philo ist etwas leichter. Durch einen gegebenen Punct in dem Umfange eines gegebenen Kreises wird eine gerade Linie so gelegt, daß die Theile derselben zwischen dem Umfange des Kreises und den Schenkeln eines rechten Winkels gleich groß ausfallen. Eratosthenes, der wegen seiner astronomischen und geographischen Untersuchungen berühmt ist, erdachte ein Instrument, zwey oder mehrere mittlere Proportionallinien zwischen zwey gegebenen zu finden. Er schätzte dieses so hoch, daß er es in einem Tempel mit einer Beyschrift in Versen aufhängen ließ, und auch in einem Schreiben an den König Ptolemäus die Einrichtung und den Gebrauch erklärte. Pappus nennt es ein Mesolabum. Nikomedes erfand die Conchoide, und ein Instrument zu ihrer Zeichnung, um dadurch unsere Aufgabe aufzulösen. Er gebraucht sie, um zwischen zwey

geraden Linien eine von gegebener Größe so zu legen, daß ihre Verlängerung durch einen gegebenen Punct geht. Sie dient ihm also das Versuchen, das ohne sie nöthig seyn würde, zu vermeiden. Die Construction an sich, auch ohne den Gebrauch der Conchoide, ist sinnreich, und die künstlichste von allen, so daß man Mühe hat, die Analysis, wodurch der Urheber dazu gekommen ist, zu errathen. Diokles gebrauchte die Cissoide, um durch ihren Durchschnitt mit einer gegebenen geraden Linie zwey mittlere Proportionalen zu finden. Er fand durch eine Construction mehrere Puncte derselben, und zog durch diese eine krumme Linie, die für die Cissoide selbst gelten konnte. Seine Absicht scheint die Anwendung auf Wurfgeschütze gewesen zu seyn. Er hat seine Auflösung in einer Schrift περι πυριων (de pyriis) vorgetragen, in welcher vermuthlich diejenige Art von Wurfgeschütz beschrieben ist, womit brennende Dinge geworfen wurden. Die Auflösung, welche Pappus (mathem. Samml. 3. B. 5. S. und 8. B. 11. S.) giebt, ist im Wesentlichen dieselbe mit der von Diokles gegebenen, nur daß er den Punct, den dieser durch die Cissoide findet, empirisch mittelst der Gleichheit zweyer Abschnitte auf einer um einen festen Pucnt gedrehten geraden Linie findet. Die Auflösung des Sporus, welche Eutocius ebenfalls anführt, ist von der nach Pappus gar nicht verschieden.

In den neuern Zeiten ist die Aufgabe von zwey mittlern stetigen Proportionalen oft vorgenommen worden. Orontius Finäus (Oronce Finée), Professor der Mathematik zu Paris im 16ten Jahrhundert, glaubte auf mehrerley neue Arten die Aufgabe auflösen zu können, aber irrig, welches Buteo und Nonius zeigten. Dasselbe ist mehrern begegnet, die nicht hinlängliche Kenntniß der Geometrie besassen. Vieta gab eine Auflösung mittelst des Kreises und gerader Linien, wobey aber, wie in mehrern Constructionen der Alten eine gerade Linie durch einen gegebenen Punct so gezogen werden muß, daß der durch zwey gegebene Linien auf ihr abgeschnittene Theil

dem Halbmesser des Kreises gleich sey. (Opp. mathem. p. 242). Für den Fall, da die beiden gegebenen Linien sich wie 1 : 2 verhalten, hat er noch eine besondere Auflösung (a. a. O. p. 354).

Die analytische Behandlung der Geometrie, welche Des-artes lehrte, gab die völlige Aufklärung über die Beschaffenheit dieser Aufgabe. Man sah, daß sie nur ein sehr besonderer Fall derjenigen ist, jede Gleichung vom dritten oder vierten Grade durch eine geometrische Construction aufzulösen, wozu man nothwendig einen Kegelschnitt in Verbindung mit einem andern, oder bequemer mit einem Kreise gebraucht. Die alten Geometer haben allerdings eingesehen, daß die Aufgabe von den beiden mittlern Proportionalen ein problema solidum sey, wozu Linien aus einem Körper geschnitten, das ist Kegelschnitte, erfordert werden, welches Pappus deutlich bezeuget (Collect. mathem. pag. 7.). Weil die Kegelschnitte nicht leicht zu zeichnen sind, so haben sie, sagt er, zu einer bequemen und schicklichen Construction, die mit der Hand auszuführen ist, verschiedene sinnreiche Werkzeuge erdacht. Wir sehen den Grund deutlich ein aus der Beschaffenheit der Gleichung, welche die Ordinaten oder Abscissen zu den Durchschnittspuncten zweyer Linien angiebt.„ Soll eine Gleichung durch die Durchschnitte zweyer Linien construirt werden, so kann das Product der Exponenten ihrer Ordnungen nicht niedriger seyn, als der Grad der Gleichung. Die Gleichung für die erste der mittlern Proportionalen zwischen a und b ist $aab = z^3$. Denn es seyn die beiden ersten in der Progression, a und z, so ist die dritte $\frac{z^2}{a}$ und die vierte $\frac{z^3}{a^2}$. Heißt diese b, so ist $a^2 b = z^3$. Man müßte eine Linie vom dritten Grade construiren, wenn die andere eine gerade Linie seyn sollte. Dieses könnte nur auf sehr beschwerliche Art durch einzelne Puncte geschehen. Man muß also zwey krumme Linien nehmen, zwey Kegelschnitte, worunter auch der Kreis mit

begriffen seyn mag. Diese Linien sind vom zweyten Grade, und dienen daher zwar schon zur Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade, aber auch derer vom dritten Grade, die durch die Multiplication mit der unbekannten Größe zu einer Gleichung vom vierten hinaufsteigen, wie $a^2 b z = z^4$. Eine Wurzel ist $= 0$, so wie in der Construction für den einen Durchschnittspunct die Ordinate $= 0$ ist.

Descartes gebraucht hier, wie überhaupt für Gleichungen vom dritten und vierten Grade, den Kreis mit der Parabel, weil der Kreis leicht beschrieben wird. Sein Commentator, der P. Rabuel, zeigt (p. 530) wie man auf zweyerley Art die Hyperbel mit dem Kreise verbinden könne, und bringt auch die Construction des Menächmus mit zwey Parabeln bey, die in Absicht der Deduction die leichteste ist. De Slüse zeigte in der Schrift, die er Mesolabum betitelte, wie die beiden Proportionalen auf mancherley Art durch zwey Kegelschnitte gefunden werden können, synthetisch nach der Form der alten Geometrie, (s. oben S. 61.). Einige solche Constructionen findet man in Wolfs Elementis Analyseos finit. §. 624. Newton theilt in der Arithm. universali in Append. de aequat. constr. lineari drey Constructionen mit. Sie beruhen darauf, daß entweder zwischen zwey der Lage nach gegebenen geraden Linien, oder zwischen einem Kreise und einer geraden Linie, oder zwischen zwey Kreisen eine gerade Linie so gelegt werde, daß sie durch einen gegebenen Punct gehe. Bey den beiden ersten ist die Conchoide anwendbar. Die erste von allen dreyen ist die eine von Vieta angegebene mit einer geringen Abänderung. Newton setzt auch hinzu, daß diese Construction bekannt sey.

Von den manchen Auflösungen setze ich hierher eine vorzügliche unter den alten, die von Nikomedes gegebene, mit ihrem geometrischen Beweise, und die einfachste unter den neuern, nach Descartes mit der analytisch-geometrischen Herleitung.

Auf die Schenkel eines rechten Winkels EAF (Fig. 111. Tab. VII.) trage man die beiden äußern der vier

Proportionalen AB, AC von dem Scheitelpuncte aus, und vollende das Parallelogramm, ABDC. Die Linie AB halbire man in G, und AC in H. Durch D und G ziehe man die gerade DG, welche den nach K verlängerten Schenkel FA in K schneide. In H errichte man die senkrechte HL, und ziehe von C aus an dieselbe die CL = AG. Durch K und L werde KL gezogen, und mit dieser die Parallele CM. Durch L lege man die gerade LNF so, daß das zwischen CF und CM abgeschnittene Stück NF = AG sey. Dieses geschieht (wenn man sich keines empirischen Verfahrens bedienen will) vermittelst einer Conchoide, die aus dem Pol L über der Grundlinie CM mit der gegebenen AG beschrieben wird. Nun ziehe man durch F und D die gerade FDE, welche den andern Schenkel des rechten Winkels in E schneidet, so sind die Linien DC : CF : BE : BD, oder AB : CF : BE : AC in stetiger Proportion.

Es wird eine Übung in der geometrischen Analysis seyn, den Weg zu suchen, auf welchem Nikomedes zu seinem synthetischen Beweise gelangt seyn mag.

Nachdem das Parallelogramm ABDC gezeichnet ist, ziehe man die Linie EDF willkührlich, so ist DC : CF = EB : BD. Die vier Linien sind immer proportionale, und in einem besondern Falle stetige. Man setze, sie seyn stetige proportionale, so ist DC : CF = CF : EB, wodurch auch CF : EB = EB : BD ist. Die erste dieser Proportionen giebt $CF^2 = DC . EB$. Um die beiden Theile der Gleichung sich ähnlich zu machen, nehme man anstatt des Verhältnisses DC : CF das ihm gleiche AE : AF, so ist AE : AF = CF : EB, und daher AE . BE = AF . CF. Halbirt man AB in G, und AC in H, so ist $AE . BE + BG^2 = EG^2$, und $AF . CF + HC^2 = FH^2$, (Euklides II. 6.). Ist AC kleiner als AB, so ist HC kleiner als BG, und da AE . BE = AF . CF ist, so ist FH kleiner als EG. Um eine Gleichung zu behalten, addire man zu FH^2 ein Quadrat so groß, daß die Summe gleich EG^2 sey. Zu dem Ende errichte man in H auf AC die senkrechte HL, und setze, daß $FH^2 + HL^2 = EG^2$

seyn. Es ist also AF.CF + HC² + HL² = AE.BE + BG². Da die beiden Rechtecke AF.CF und AE.BE gleich sind, so ist HC² + HL² = BG². Zieht man CL, so ist HC² + HL² = CL², also CL = BG, folglich ist die Linie HL gegeben. Man ziehe FL, so ist FL = EG. Es werde nun NF = BG genommen, so ist LN = EB. Nun ziehe man CN, und mit dieser die parallele LK bis an die verlängerte FA, so ist FN:NL = FC:CK, das ist, BG:BE = FC:CK. Es ist aber BE:AB = (ED:DF =) AC:CF, also ist BG:AB = AC:CK. Da BG die Hälfte von AB ist, so ist AC die Hälfte von CK, oder AK = AC, also ist K ein gegebener Punct. Da man nun von dem als gegeben angenommenen, aber gesuchten Puncte F auf einen gegebenen gekommen ist, so kann man auch von diesem zu jenem gelangen. Das giebt die von Nikomedes vorgetragene Construction.

Die analytisch = geometrische Auflösung ist eine Construction der Gleichung, $x^3 = aab$, oder der, $y^3 = abb$. Denn es seyn a und b die zwey gegebenen Größen, x die erste der beiden mittlern Proportionalen, und y die zweyte, so ist $a:x = x:y$ und $x:y = y:b$. Aus jener wird erhalten $x^2 = ay$; aus dieser, $y^2 = bx$. Jene Gleichung quadrirt wird $x^4 = a^2y^2$, also ist $x^3 = aab$. Eben so ist $y^3 = abb$. Die Construction dieser Gleichungen ist in der allgemeinen begriffen, die in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, II. S. 134. gelehrt ist. Aus jener folgt für diesen Fall folgende Construction der Gleichung $y^3 = abb$. Man zeichne (Fig. 112. Tab. VII.) eine Parabel AM, deren Parameter = b, und Axe AX ist. Auf AX nehme man $AB = \frac{1}{2}b$, und setze auf AB in B die senkrechte $BC = \frac{1}{2}a$, beschreibe aus C mit dem Halbmesser AC durch den Scheitel A einen Kreis, welcher die Parabel in M schneide, und ziehe durch M die senkrechte MP auf AX, so ist AP = x; PM = y.

Aus dieser Construction folgen umgekehrt die beiden Gleichungen $x^2 = ay$ und $y^2 = bx$. Die letztere ist die Gleichung für die angenommene Parabel. Man ziehe

CQ senkrecht auf MP, so ist $MC^2 = (x - \frac{1}{2}b)^2 + (y - \frac{1}{2}a)^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2 + y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$. Da $MC^2 = AC^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$, und $bx = y^2$ ist, so ist $x^2 = ay$, welches die erste jener Gleichungen ist. Folglich sind $a:x:y:b$ continuirlich proportionale.

Der geometrische Beweis dieser Auflösung ist folgender. Der Kreis schneide die Axe der Parabel außer in A noch in D, und die Ordinate außer in M noch in N, so ist $AB = BD$, und $MQ = NQ$, da die senkrechte aus dem Mittelpuncte eines Kreises auf eine Chorde sie halbirt. An der Parabel ist $AD \times AP = PM^2$, da AD oder 2AB der Parameter ist. Es ist, in dem Falle der Figur, . . $AD = AP + PD$, und $PM = 2PQ + PN$, daher ist $APqu + AP \times PD = 2PQ \times PM + PM \times PN$. An dem Kreise ist $AP \times PD = PM \times PN$; folglich ist $APqu = 2PQ \times PM = 2CB \times PM$. Daraus ist $2CB : AP = AP : PM$. An der Parabel ist $AP : PM = PM : 2AB$. Folglich sind $2CB : AP : PM : 2AB$ continuirlich proportionale.

Die Construction befriedigt den Verstand vollkommen. Die Ausübung verlangt ein leichteres Verfahren, das schärfer ist als die Zeichnung sinnlicher Linien seyn kann. Dieses ist die Ausziehung der Cubikwurzel aus aab und abb, wenn a und b als Zahlgrößen gegeben werden. Da diese den Alten Schwierigkeit machte, so waren ihnen geometrische Constructionen nöthig. Diese zogen sie auch wegen ihrer intellectuellen Vollkommenheit der arithmetischen Annäherung vor.

Montucla histoire des recherches sur la quadrature du Cercle — avec une addition concernant les problêmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle, à Paris 1754. 8.

Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, auct. N. Th. Reimer. Gottingae 1798. 222 pag. 8. ist eine mit philologischer Gelehrsamkeit und mathematischen Einsichten abgefaßte Schrift. Die Auflösungen der Alten sind darin alle mit

mancherley Bemerkungen vorgetragen. Von den neuern ist eine kurze Anzeige geschehen.

Demonstration, s. Beweis.

Denominator Fractionis, s. Nenner.

Denominator rationis ist entweder einerley mit dem Exponenten eines Verhältnisses, oder wie Wolf es annimmt, der Quotient von der Division des größern Gliedes durch das kleinere, (Elem. Anal. §. 113.). Allein für allgemeine Rechnungen, in welchen die Quantität nicht bestimmt wird, ist diese Einschränkung hinderlich.

Derivations-Rechnung ist die Methode, eine Function einer oder mehrerer veränderlichen Größen so zu entwickeln, daß die Glieder der entwickelten Function nach einem bestimmten Gesetze aus einander hergeleitet werden. Arbogast, Mitglied des französischen National-Instituts, und Professor der Mathematik zu Straßburg, hat diese Methode in einem besondern Werke vorgetragen, und auf verschiedene schwere Untersuchungen angewandt. Der Titel ist: Du calcul des dérivations, par L. F. A. Arbogast. à Strasbourg, An. VIII. (1800), 404 pag. gr. in — 4. Ich werde aus diesem Werke die Derivations-Rechnung in ihrer Anwendung auf den leichtesten Fall erklären, und einige Erläuterungen hinzufügen. Das scharfsinnige und gelehrte Werk verdient von den Liebhabern der höhern Analysis ganz und mit Fleiß studirt zu werden.

1. Die Art, wie in einer Reihe von Größen jede bestimmt wird, ist in der allgemeinen Form verschieden. Ein Glied der Reihe kann eine bestimmte Function der Stelle desselben seyn. Es kann aber auch nach einem gewissen Gesetze aus dem vorhergehenden, aus einigen, ja aus allen vorhergehenden Gliedern bestimmt werden. Diese Art der Verknüpfung unter den Gliedern einer Reihe ist eine Derivation. Die Glieder der entwickelten Potenz eines Binomium $(a+b)^m$, sind ein Beyspiel einer einfachen Derivation. Zwey auf einander folgende Glieder der Potenz seyn $Pa^{m-n}b^n$ und $Qa^{m-n-1}b^{n+1}$, so ist . . .

$Q = \frac{P(m-n)}{n+1}$. Ein anderes Beyspiel dieser Art von Derivation geben die Glieder der Reihe für den Bogen oder Winkel φ durch den Sinus, oder des Sinus durch den Winkel. Alle successiven Differentiale einer Function, durch die constanten Differentiale der Functionalgröße dividirt, geben eine solche einfache Derivation. La Grange hat daher auch diese Quotienten dérivées genannt, und ein neues sehr fruchtbares System von analytischen Operationen darauf gegründet. Wenn man zu einer Function einer veränderlichen Größe das Differential derselben als Factor setzt, dann das Integral nimmt, mit diesem wieder so verfährt, und so immer weiter geht, so entsteht auch eine Reihe von einfach derivirten Größen.

2. Die Derivation kann auch eine zusammengesetzte, mehr oder weniger verwickelte, seyn, wenn sie nicht bloß nach einem gewissen Gesetze aus dem vorhergehenden Gliede einer Reihe geschieht, sondern dabey noch die Größen einer andern Reihe, ja auch mehrerer Reihen, eingeführt werden, doch so, daß die Verknüpfung derselben mit den einfachen Derivationen nach einem gewissen Gesetze geschehe, so viele Glieder der andern Reihe auch genommen werden müssen. Ein Beyspiel giebt die Potenz eines Polynomium, $p = a + bz + cz^2 + dz^3 +$ etc. Es sey $p^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. so werden die Coefficienten in dieser Reihe jeder aus allen vorhergehenden, und eben so vielen Coefficienten in der Wurzel nebst dem gleichstelligen in derselben nach einem allgemeinen Gesetze hergeleitet, s. combinatorische Analysis (52.). Die unabhängigen Werthe dieser Coefficienten, welche das Verfahren in (35.) daselbst liefert, werden ebenfalls durch Vertauschung jedes einzelnen Coefficienten a, b, c, d, etc. mit dem nächstfolgenden b, c, d, e, etc. und Division mit der Anzahl derselben in jeder Combination hergeleitet. Z. B. es ist

$$E = \mathfrak{A} a^{m-1} e + \mathfrak{B} a^{m-2} (2bd + c^2) + \mathfrak{C} a^{m-3} . 3b^2 c + \mathfrak{D} a^{m-4} b^4,$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, die Binomialcoefficienten in der mten

Potenz sind. Durch die angegebene Vertauschung und Division wird der folgende Coefficient,

$$F = \mathfrak{A} a^{m-1} f + \mathfrak{B} a^{m-2} (2be + 2cd) + \mathfrak{C} a^{m-3} (3b^2 d + 3bc^2) + \mathfrak{D} a^{m-4} \, 4 b^3 c + \mathfrak{E} a^{m-5} b^5.$$

Die Derivationen der zweyten Art, oder die zusammengesetzten, sind es, womit sich die Derivationsrechnung vornämlich beschäftigt.

3. Die leichteste Aufgabe für die Derivationsrechnung ist die Entwickelung einer unbestimmten Function einer zweytheiligen Größe. Diese geschieht mittelst des Taylorschen Lehrsatzes. Die zweytheilige Größe sey $\alpha + x$, wo α eine veränderliche Größe ist, deren Differential unveränderlich genommen wird, und x eine von derselben unabhängige Größe bedeutet. Irgend eine Function von beiden zusammen, werde durch $F(\alpha + x)$ bezeichnet, so ist

$$F(\alpha + x) = F\alpha + \frac{dF\alpha}{1.d\alpha} x + \frac{d^2 F\alpha}{1.2.d\alpha^2} x^2 + \frac{d^3 F\alpha}{1.2.3.d\alpha^3} x^3 + \frac{d^4 F\alpha}{1\ldots4.d\alpha^4} x^4 + \text{etc.}$$

Die Differentialquotienten hängen von der Beschaffenheit der Function $F\alpha$ ab, und werden jeder aus dem vorhergehenden allein, auf eine gleichmäßige Art nach den Regeln der Differentialrechnung hergeleitet. Der Lehrsatz macht die Grundlage der Derivationsrechnung.

4. Es sey x eine aus Potenzen einer andern unbestimmten Größe z mit unveränderlichen Coefficienten zusammengesetzte Reihe, und die entwickelte Function, $F(\alpha + x)$, werde nach den Potenzen dieser Größe z geordnet, so bestehen die Coefficienten von z theils aus den Coefficienten derselben z in der Functionalgröße, theils aus den Differentialquotienten der Function $F\alpha$; aber die Factoren, welche aus jenen zusammmengesetzt werden, sind von diesen Quotienten unabhängig. Die Form jener Factoren ist nicht allein unabhängig von der Relation und der Quantität der Coefficienten in der durch x bezeichneten Reihe, sondern auch unabhängig von der Art und Beschaffenheit der Function.

5. Die Differentialquotienten, $\frac{dF\alpha}{d\alpha}$, $\frac{d^2F\alpha}{d\alpha^2}$, $\frac{d^3F\alpha}{d\alpha^3}$; etc. bezeichnet Arbogast durch $\mathrm{D}F\alpha$, $\mathrm{D}^2F\alpha$, $\mathrm{D}^3F\alpha$, u. s. f. wo der Buchstab D aus der kleinen Capitalschrift genommen ist, um diese Operation von der Differentiation, und zugleich das Zeichen derselben von dem Symbol D eines Coefficienten zu unterscheiden. Die Operationen, wodurch die Größen $\mathrm{D}F\alpha$, $\mathrm{D}^2F\alpha$, $\mathrm{D}^3F\alpha$, etc. die erste aus $F\alpha$, die andern jede aus der nächst vorhergehenden hergeleitet werden, nennt er Derivationen. Die Größen selbst werden derivirte genannt.

6. Diesem nach ist $F(\alpha+x)=F\alpha+\frac{\mathrm{D}F\alpha}{1}x$

$$+\frac{\mathrm{D}^2F\alpha}{1.2}x^2+\frac{\mathrm{D}^3F\alpha}{1.2.3}x^3+\frac{\mathrm{D}^4F\alpha}{1.2.3.4}x^4+\text{etc.}$$

7. Wenn $F\alpha=\alpha$ genommen wird, so ist . .

$\mathrm{D}\alpha=\frac{d\alpha}{d\alpha}=1.$ Arbogast setzt $d\alpha=1$, weil es unveränderlich ist. Allein dieses verursacht einen Anstoß, da ein Differential mit keiner endlichen Größe verglichen werden kann.

8. Die Functionalgröße sey $\alpha+\beta x$, so ist $F(\alpha+\beta x)=$

$F\alpha+\frac{\mathrm{D}F\alpha}{1}\beta x+\frac{\mathrm{D}^2F\alpha}{1.2}\beta^2x^2+\text{etc.}$ Um β mit in den derivirten Größen zu begreifen, gebraucht Arbogast das Derivationszeichen mit einem Puncte dahinter, folgendermaßen:

$$F(\alpha+\beta x)=F\alpha+\frac{\mathrm{D}.F\alpha}{1}x+\frac{\mathrm{D}^2.F\alpha}{1.2}x^2$$

$$+\frac{\mathrm{D}^3.F\alpha}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

so daß $\mathrm{D}^n.F\alpha=\mathrm{D}^nF\alpha.\beta^n$ ist.

9. Eben diese Bezeichnung gebraucht Arbogast auch auf eine allgemeinere Art bey der Entwickelung der Function,

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}),$$

so daß die entwickelte Function folgendergestalt bezeichnet wird,

$$\varphi\alpha + \frac{D.\varphi\alpha}{1}x + \frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

wo die punctirten Derivationszeichen Zusammensetzungen aus den Coefficienten β, γ, δ, etc. und den derivirten von $\varphi\alpha$ bedeuten. Kurz, das Derivationszeichen ohne Punct zeigt eine einfache Derivation, das mit einem Puncte verbundene eine zusammengesetzte, oder eine Derivation der zweyten Art an.

10. Die Coefficienten in der entwickelten Reihe zu bestimmen giebt Arbogast zwey Methoden an, deren erstere er gegen die zweyte zurücksetzt, wiewohl sie doch über die Derivation der Coefficienten sehr guten Aufschluß giebt. Das Verfahren ist folgendes.

Von der Function $F(\alpha + \beta x)$ nehme man wieder eine Function, deren Beschaffenheit durch φ bezeichnet wird, nämlich $\varphi F(\alpha + \beta x)$, wie z. B. log. sin ω eine solche Doppelfunction von dem Winkel ω ist. Es ist

$$\varphi F(\alpha + \beta x) = \varphi F\alpha + \frac{d\varphi F\alpha}{1.d\alpha}\beta x + \frac{d^2\varphi F\alpha}{1.2.d\alpha^2}\beta^2 x^2 + \text{etc.}$$

oder in Derivations-Ausdrücken,

$$\varphi F(\alpha + \beta x) = \varphi F\alpha + \frac{D.\varphi F\alpha}{1}x + \frac{D^2.\varphi F\alpha}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\varphi F\alpha}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

Da die Functionalgröße, nämlich $F(\alpha + \beta x)$, eine Reihe ist, die in (8.) entwickelt worden, so hat man hier die Entwickelung einer Function einer vieltheiligen Größe zu machen, deren Glieder aber von einander abhängig sind.

Man setze, um abzukürzen, $F\alpha = a$, so ist nach der Bezeichnung in (9.)

$$\varphi(a + \frac{D.a}{1} x + \frac{D^2.a}{1.2} x^2 + \frac{D^3.a}{1.2.3} x^3 + \text{etc.})$$

$$=$$

$$\varphi a + \frac{D.\varphi a}{1} x + \frac{D^2.\varphi a}{1.2} x^2 + \frac{D^3.\varphi a}{1.2.3} x^2 + \text{etc.}$$

Es sind nun die Werthe von $D.\varphi a$; $D^2.\varphi a$, etc. durch $D\varphi a$, $D^3\varphi a$, etc. und durch $D.a$, $D^2.a$, etc. auszudrucken, oder die zusammengesetzten Derivationen auf einfache zu bringen.

11. So wie in (8.) ist $D.F\alpha = DF\alpha.\beta$, so ist hier $D.\varphi a = D\varphi a.D.a$. indem die in der Functionalgröße befindlichen, zu x^2 und den folgenden Potenzen gehörigen Coefficienten auf den von x in der entwickelten Function keinen Einfluß haben, und in Absicht auf diesen als nicht vorhanden zu betrachten sind. Allein bey den folgenden Derivationen kommen die derivirten von $D.a$, nämlich $D^2 a$; $D^3.a$, etc. allerdings nach einander in Rechnung, so weit als die mit ihnen in der Function $\varphi(a + \frac{D.a}{1} x + \text{etc.})$ verbundenen Potenzen es erfordern. Das Verfahren ist dem ähnlich, welches bey der Differentiation eines Products aus zwey oder mehreren veränderlichen Factoren angewandt wird. Die derivirte jedes Factors wird in das Product der übrigen Factoren multiplicirt.

Die derivirte $D^2.\varphi a$ entsteht durch eine Derivation der zweyten Art aus $D.\varphi a$, oder aus $D\varphi a.D.a$. Es ist $D.(D.a) = D^2.a$, aus der Reihe für $F(\alpha + \beta x)$, und $D.D\varphi a = D^2\varphi a.D.a$, eben so wie aus $D.\varphi a$ hergeleitet ist $D\varphi a.D.a$. Also ist

$$D^2.\varphi a = D\varphi a.D^2.a + D^2\varphi a.(D.a)^2.$$

Auf ähnliche Art wird die derivirte $D^3.\varphi a$ gefunden. Es ist $D.(D^2.a) = D^3.a$, und $D.(D.a)^2 = 2D.a \times D^2.a$,

indem für jeden der beiden Factoren der derivirte zu setzen ist. Auch ist $D.(D^2 \varphi a) = D^3 \varphi a. D. a.$ Folglich ist

$$D^3. \varphi a = D \varphi a. D^3. a + D^2 \varphi a. D. a. D^2. a$$
$$+ D^2 \varphi a \times 2 D. a. D^2. a + D^3 \varphi a. (D. a)^3$$
$$= D \varphi a. D^3. a + 3 D^2 \varphi a. D. a. D^2. a$$
$$+ D^3 \varphi a. (D. a)^3.$$

Ferner ist

$$D^4. \varphi a = D \varphi a. D^4. a + D^2 \varphi a (4 D. a. D^3. a + 3 (D^2. a)^2)$$
$$+ 6 D^3 \varphi a. (D. a)^2. D^2. a + D^4 \varphi a. (D. a)^4.$$

u. s. w.

12. Die Derivation der Größen $D^4. \varphi a$; $D^3. \varphi a$, u. s. f. jeder aus der nächst vorhergehenden geschieht auf eine sehr einfache Art. Es werden nur die Derivirten $D. a$, $D^2. a$, $D^3. a$. etc. und $D \varphi a$, $D^2 \varphi a$, $D^3 \varphi a$, etc. mit den nächstfolgenden vertauscht; und den letztern wird bey der Vertauschung noch $D. a$ als Factor beygefügt.

13. Zur deutlichen Einsicht in diese Herleitungen ist es dienlich die Differentialrechnung, die bey dem ganzen Proceß zum Grunde liegt, unmittelbar anzuwenden. Arbogast hat dieses nicht für nöthig gehalten.

Es ist $D. \varphi a = \frac{d \varphi a}{d \alpha} \beta$, zufolge der Form des Taylorschen Lehrsatzes für $\varphi F (\alpha + \beta x)$ in Derivations-Ausdrücken (10.). Da hier das Differential im Nenner nicht das Differential der Functionalgröße ist, so drucke man diese Derivirte so aus: $\frac{d \varphi a}{d a} \cdot \frac{d a}{d \alpha} \beta$. Diese ist nach der angenommenen Bezeichnung, $D \varphi a. D a. \beta$. Es ist nämlich $\frac{d \varphi a}{d a}$ der Coefficient von x in der Entwickelung der Function $\varphi (a + x)$, und $\frac{d a}{d \alpha}$ oder $\frac{d F \alpha}{d \alpha}$ in der Entwickelung der Function $F (\alpha + x)$.

Um $D^2.\varphi a$ zu finden, bemerke man, daß dieser Ausdruck $= \frac{d^2\varphi a}{d\alpha^2}.\beta^2$ ist, zufolge der Form des Taylorschen Lehrsatzes für $\varphi F(\alpha+\beta x)$. Nun ist

$$\frac{d^2\varphi a}{d\alpha} = d\left(\frac{d\varphi a}{d\alpha}\right) = d\left(\frac{d\varphi a}{da}.\frac{da}{d\alpha}\right)$$

$$= \frac{d\varphi a}{da}.\frac{d^2 a}{d\alpha} + \frac{d^2\varphi a}{da}.\frac{da}{d\alpha}.$$ Beide Factoren der Größe, die differentirt wird, sind endliche Functionen, ohne Differentiale, daher die Veränderlichkeit von $d\alpha$ nicht in Betracht kommt, indem der Divisor, $d\alpha$, nur anzeigt, daß dieses Differential durch die Division weggeschafft sey. Also ist

$$\frac{d^2\varphi a}{d\alpha^2} = \frac{d\varphi a}{da}.\frac{d^2 a}{d\alpha^2} + \frac{d^2\varphi a}{da^2}.\frac{da^2}{d\alpha^2}.$$

Hier ist $\frac{d^2\varphi a}{da^2}$ der Coefficient von x^2 in der Entwickelung der Function $\varphi(a+x)$, so wie $\frac{d\varphi a}{da}$ der von x in derselben ist, wenn da als constant betrachtet wird. In dieser Rücksicht wird dieser durch $D\varphi a$, jener durch $D^2\varphi a$ bezeichnet. Eben so sind $\frac{da}{d\alpha}$ und $\frac{d^2 a}{d\alpha^2}$, jener der Coefficient von x, dieser von x^2 in der Entwickelung von $F(\alpha+x)$, wenn $d\alpha$ unveränderlich genommen wird, und in dieser Rücksicht werden sie durch $DF\alpha$ und $D^2F\alpha$ oder $D\alpha$ und $D^2 a$ bezeichnet. Es ist nun

$$D^2.\varphi a = (D\varphi a.D^2 a + D^2\varphi a.Da^2)\beta^2.$$

Auf diese Art wird auch $D^3.\varphi a$ gefunden. Es ist nämlich diese $= \frac{d^3\varphi a}{d\alpha^3}\beta^3$, (10.). Nun ist

$$\frac{d^3 \varphi a}{d\alpha^3} = d\left(\frac{d^2 \varphi a}{d\alpha^2}\right) = \frac{d\varphi a}{da} \cdot \frac{d^3 a}{d\alpha^3}$$

$$+ \frac{d^2 \varphi a}{da} \cdot \frac{d^2 a}{d\alpha^3} + \frac{d^2 \varphi a}{da^2} \cdot \frac{2da . d^2 a}{d\alpha^3}$$

$$+ \frac{d^3 \varphi a}{da^3} \cdot \frac{da^3}{d\alpha^3},$$ durch Differentiation des gleich vorher gefundenen Werthes von $\frac{d^2 \varphi a}{d\alpha^2}$. Wegen $\frac{d^2 \varphi a}{da^2}$ ist dasselbe zu bemerken, was vorher wegen $\frac{d\varphi a}{da}$ erinnert ist; es ist aus $\frac{d\varphi a}{da}$, einer endlichen Function von a, die keine Differentiale enthält, entstanden, und das Differential da ist aus dem Differential dieser Function weggeschafft. Wir haben nun

$$\frac{d^3 \varphi a}{d\alpha^3} = \frac{d\varphi a}{da} \cdot \frac{d^3 a}{d\alpha^3} + \frac{3 d^2 \varphi a}{da^2} \cdot \frac{da . d^2 a}{d\alpha^3}$$

$$+ \frac{d^3 \varphi a}{da^3} \cdot \frac{da^3}{d\alpha^3},$$

und daher

$$D^3 . \varphi a = (D\varphi a . D^3 a + 3 D^2 \varphi a . Da . D^2 a$$
$$+ D^3 \varphi a . Da^3)\beta^3.$$

Wenn man in diesen Formeln $Da . \beta$ mit $D.a$; $D^2 a . \beta^2$ mit $D^2 . a$; $D^3 a . \beta^3$ mit $D^3 . a$ vertauscht, so erhält man die vorher durch Derivation gefundenen Werthe.

14. Nun soll die Function

$$\varphi\left(a + bx + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 + \text{etc.}\right)$$

in eine Reihe von der Form

$$A + Bx + \frac{C}{1.2} x^2 + \frac{D}{1.2.3} x^3 + \frac{E}{1.2.3.4} x^4 + \text{etc.}$$

verwandelt werden.

Die Werthe von B, C, D, E, etc. lassen sich aus den vorher für $\text{D}.\varphi a$; $\text{D}^2.\varphi a$; $\text{D}^3.\varphi a$; etc. gefundenen herleiten. Denn wenn $b = \text{D}.a$; $c = \text{D}^2.a$; $d = \text{D}^3.a$ u. s. f. ist, so ist, da $A = \varphi a$ bleibt, aus (11).

$$B = \text{D}\varphi a.b$$

$$C = \text{D}\varphi a.c + \text{D}^2\varphi a.b^2$$

$$D = \text{D}\varphi a.d + \text{D}^2\varphi a.3bc + \text{D}^3\varphi a.b^3$$

$$E = \text{D}\varphi a.e + \text{D}^2\varphi a(4bd + 3c^2) + \text{D}^3\varphi a.6b^2c + \text{D}^4\varphi a.b^4$$

etc.

Nun kommt es, zufolge der Bemerkung in (4.), nicht auf die bestimmte Quantität und Relation der Coefficienten von x in der zu entwickelnden Function an, sondern die Form der Coefficienten in der entwickelten Function bleibt, wie auch jene sich verhalten mögen. Also gilt die gefundene Entwickelung allgemein, wie auch die gegebene Function beschaffen seyn mag.

15. Man sieht nun, wie auch in dieser allgemeinen Form die Größen B, C, D, E, etc. die erste aus A oder φa, die andern jede aus der vorhergehenden entstehen. Sie sind wie Derivirte zu betrachten, jede in Absicht auf die vorhergehende, indem b, c, d, e, etc. auch als solche angesehen werden.

Bey den successiven Derivationen von φa wird jedesmahl der Factor b zugesetzt. So kommt für $\text{D}\varphi a$ die derivirte $\text{D}^2\varphi a.b$; für $\text{D}^2\varphi a$ eben so $\text{D}^3\varphi a.b$, u. s. f.

16. Man habe nun die Function

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})$$

in eine Reihe von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

zu verwandeln, so ist, wenn die gehörigen Substitutionen in (14.) gemacht werden,

$$A = \varphi\alpha$$

$$B = D\varphi\alpha . \beta$$

$$C = D\varphi\alpha . \gamma + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 . 2} \beta^2$$

$$D = D\varphi\alpha . \delta + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 . 2} . 2\beta\gamma + \frac{D^3\varphi\alpha}{1 . 2 . 3} \beta^3$$

$$E = D\varphi\alpha . \varepsilon + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 . 2} (2\beta\delta + \gamma^2)$$

$$+ \frac{D^3\varphi\alpha}{1 . 2 . 3} . \beta^2 2\gamma + \frac{D^4\varphi\alpha}{1 . 2 . 3 . 4} . \beta^4$$

u. s. f.

17. Diese Werthe der Coefficienten treffen mit denen in dem Artikel, combinatorische Analysis (43.) überein, wenn die gehörigen Vertauschungen der Buchstabenzeichen gemacht werden. Für die Derivationen $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$, $D^3\varphi\alpha$, etc. kommen dort α, 2β, 6γ, etc. Hier ist nun auch der Grund der Bemerkung gefunden, die daselbst (46.) über die Derivation der schon gefundenen Formen der Coefficienten gemacht ward.

18. Arbogast findet die Coefficienten B, C, D, etc. noch auf eine zweyte Art durch successive Entwickelung der Derivirten, die entstehen, wenn die ganze Reihe, $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. als der zweyte Theil eines Binomium betrachtet wird. Die zu entwickelnde Function ist

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}).$$

Man setze

$$\pi = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.}$$

so ist, nach dem Taylorschen Lehrsatze,

$$\varphi(\alpha+\pi x)=\varphi\alpha+D\varphi a.\pi x+\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\pi^2 x^2$$
$$+\frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\pi^3 x^3+\text{etc. (I.)}$$

Hier wird die Functionalgröße als ein Binomium behandelt. Betrachtet man sie als eine polynomische, so ist, nach der Bezeichnung in (9.), die entwickelte Function

$$\varphi\alpha+\frac{D.\varphi\alpha}{1}x+\frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2}x^2+\frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3}x^3$$
$$+\text{etc. (II.)}$$

Substituirt man in jener erstern Reihe für die Potenzen von πx ihre entwickelten Werthe, so erhält man die Werthe der Coefficienten in der zweyten Reihe. Anstatt die Potenzen von πx nach dem polynomischen Lehrsatze zu entwickeln, behandelt Arbogast sie wie Functionen einer polynomischen Größe, welchen er die Form in (9.) giebt. Es ist nämlich

$$\pi=\beta+\frac{D.\beta}{1}x+\frac{D^2.\beta}{1.2}x^2+\frac{D^3.\beta}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$
$$\pi^2=\beta^2+\frac{D.\beta^2}{1}x+\frac{D^2.\beta^2}{1.2}x^2+\frac{D^3.\beta^2}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$
$$\pi^3=\beta^3+\frac{D.\beta^3}{1}x+\frac{D^2.\beta^3}{1.2}x^2+\frac{D^3.\beta^3}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

etc. etc.

Bey der Substitution dieser Reihen in (I.) nehme man die Glieder, welche dieselbe Potenz von x enthalten, zusammen, so werden dadurch die Coefficienten in (II.) erhalten. Es ist nämlich

$$D \cdot \varphi\alpha = D\varphi\alpha \cdot \beta$$

$$\frac{D^2 \cdot \varphi\alpha}{1 \cdot 2} = D\varphi\alpha \cdot \frac{D \cdot \beta}{1} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2} \cdot \beta^2$$

$$\frac{D^3 \cdot \varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} = D\varphi\alpha \cdot \frac{D^2 \cdot \beta}{1 \cdot 2} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D \cdot \beta^2}{1} + \frac{D^3\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \beta^3$$

$$\frac{D^4 \cdot \varphi\alpha}{1 \cdot\cdot 4} = D\varphi\alpha \cdot \frac{D^3 \cdot \beta}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^2\beta^2}{1 \cdot 2} + \frac{D^3\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{D \cdot \beta^3}{1} + \frac{D^4\varphi\alpha}{1 \cdot\cdot 4} \cdot \beta^4$$

$$\frac{D^5 \cdot \varphi\alpha}{1 \cdot\cdot 5} = D\varphi\alpha \cdot \frac{D^4 \cdot \beta}{1 \cdot\cdot 4} + \ldots + \frac{D^4\varphi\alpha}{1 \cdot\cdot 4} \cdot \frac{D \cdot \beta^4}{1} + \frac{D^5\varphi\alpha}{1 \cdot\cdot 5} \cdot \beta^5$$

etc. etc.

19. Um die Derivationen von β und deren Potenzen zu machen, betrachte man β als das erste Glied des Polynomium $\beta + \gamma x + \delta x^2 + \epsilon x^3 +$ etc. und setze dem zu folge in den jetzt gefundenen Formeln $\varphi\beta$ für $\varphi\alpha$, und γ für β. Nun ist $\varphi\beta$ eine Potenz von β oder β selbst. Es sey $\varphi\beta + \beta^n$, so ist $D\varphi\beta = n\beta^{n-1}$; $D^2\varphi\beta = n \cdot n - 1 \cdot \beta^{n-2}$; $D^3\varphi\beta = n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot \beta^{n-3}$; u. s. f.

Dadurch ist für $\varphi\beta = \beta$, und $n = 1$, $D\varphi\beta = 1$, und alle folgenden Derivirten von $\varphi\beta$ sind $= 0$, so daß $D \cdot \beta = 1 \cdot \gamma$; $\frac{D^2 \cdot \beta}{1 \cdot 2} = 1 \cdot D \cdot \gamma$; $\frac{D^3 \cdot \beta}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1 \cdot \frac{D^2 \cdot \gamma}{1 \cdot 2}$; $\frac{D^4 \cdot \beta}{1 \cdot\cdot 4} = 1 \cdot \frac{D^3 \cdot \gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, u. s. f.

Ferner nehme man $\varphi\beta = \beta^2$, so ist $D\varphi\beta = 2\beta$; $D^2\varphi\beta = 2 \cdot 1$; $D^3\varphi\beta = 0$; und dadurch ist aus den Formeln in (18.)

$$D.\beta^2 = 2\beta\gamma$$

$$\frac{D^2.\beta^2}{1.2} = 2\beta.D.\gamma + \frac{2.1}{1.2}\gamma^2$$

$$\frac{D^3.\beta^2}{1.2.3} = 2\beta.\frac{D^2.\gamma}{1.2} + \frac{2.1}{1.2}.D.\gamma^2$$

$$\frac{D^4.\beta^2}{1..4} = 2\beta.\frac{D^3.\gamma}{1.2.3} + \frac{2.1}{1.2}.\frac{D^2.\gamma^2}{1.2}$$

etc. etc.

Dann nehme man $\varphi\beta = \beta^3$, so ist $D\varphi\beta = 3\beta^2$; $D^2\varphi\beta = 3.2\beta$; $D^3\varphi\beta = 3.2.1.\beta$, und dadurch

$$D.\beta^3 = 3\beta^2\gamma$$

$$\frac{D^2.\beta^3}{1.2} = 3\beta^2.D.\gamma + \frac{3.2.\beta}{1.2}.\gamma^2$$

$$\frac{D^3.\beta^3}{3} = 3\beta^2.\frac{D^2.\gamma}{1.2} + \frac{3.2\beta}{1.2}.D.\gamma^2$$

$$+ \frac{3.2.1}{1.2.3}.\gamma^3$$

etc. etc.

Noch nehme man $\varphi\beta = \beta^4$, so ist $D\varphi\beta = 4\beta^3$; .... $D^4\varphi\beta = 4.3.2.1$, und

$$D.\beta^4 = 4\beta^3\gamma$$

$$\frac{D^2.\beta^4}{1.2} = 4\beta^3.D.\gamma + \frac{4.3\beta^2}{1.2}.\gamma^2$$

$$\frac{D^3.\beta^4}{1.2.3} = 4\beta^3.\frac{D^2.\gamma}{1.2} + \frac{4.3\beta^2}{1.2}.D.\gamma^2$$

$$+ \frac{4.3.2\beta}{1.2.3}\gamma^3$$

$$\frac{D^4.\beta^4}{1...4} = 4\beta^3.\frac{D^3.\gamma}{1.2.3} + \frac{4.3\beta^2}{1.2}.\frac{D^2.\gamma^2}{1.2}$$

$$+ \frac{4.3.2\beta}{1.2.3}.D.\gamma^3 + \frac{4..1}{1..4}.\gamma^4$$

etc. etc.

Auf ähnliche Art werden die Derivationen von den folgenden Potenzen gefunden.

20. Bey den Derivationen von γ und deren Potenzen betrachte man γ als erstes Glied des Polynomium $\gamma + \delta x + \varepsilon x^2 +$ etc. Folglich hat man nur in den jetzt gefundenen Formeln γ für β, und δ für γ zu setzen. Auf ähnliche Art werden daraus die Derivationen von δ und deren Potenzen gemacht, hieraus die von ε u. s. f.

Es ist also

I. $\text{D}.\beta = \gamma$; $\frac{\text{D}^2.\beta}{1.2} = \delta$; $\frac{\text{D}^3.\beta}{1.2.3} = \varepsilon$;

$\frac{\text{D}^4.\beta}{1..4} = \zeta$; etc.

II. $\text{D}.\beta^2 = 2\beta\gamma$; $\frac{\text{D}^2.\beta^2}{1.2} = 2\beta\delta + \gamma^2$

$\frac{\text{D}^3.\beta^2}{1.2.3} = 2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta$; $\frac{\text{D}^4.\beta^2}{1..4} = 2\beta\zeta + 2\gamma\varepsilon + \delta^2$,

etc.

III. $\text{D}.\beta^3 = 3\beta^2\gamma$; $\frac{\text{D}^2.\beta^3}{1.2} = 3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2$

$\frac{\text{D}^3.\beta^3}{1.2.3} = 3\beta^2\varepsilon + 3\beta.2\gamma\delta + \gamma^3$;

$\frac{\text{D}^4.\beta^3}{1..4} = 3\beta^2\zeta + 3\beta(2\gamma\varepsilon + \delta^2) + 3\gamma^2\delta$

etc.

IV. $\text{D}.\beta^4 = 4\beta^3\gamma$; $\frac{\text{D}^2.\beta^4}{1.2} = 4\beta^3\delta + 6\beta^2\gamma^2$;

$\frac{\text{D}^3.\beta^4}{1.2.3} = 4\beta^3\varepsilon + 6\beta^2.2\gamma\delta + 4\beta\gamma^3$;

$\frac{\text{D}^4.\beta^4}{1..4} = 4\beta^3\zeta + 6\beta^2(2\gamma\varepsilon + \delta^2) + 4\beta.3\gamma^2\delta + \gamma^4$

etc.

21. Man bezeichne die aus $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc.$)$ entwickelte Function durch $A + Bx$

$+ Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ etc. so daß $B = \mathrm{D}.\varphi\alpha$; $C = \frac{\mathrm{D}^2.\varphi a}{1.2}$; $D = \frac{\mathrm{D}^3.\varphi\alpha}{1.2.3}$; u. s. f. Es ist nun, wenn in den Werthen der Coefficienten (18.) die entwickelten Werthe (20.) gesetzt werden,

$$A = \varphi\alpha$$

$$B = \mathrm{D}\varphi\alpha.\beta$$

$$C = \mathrm{D}\varphi\alpha.\gamma + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}\beta^2$$

$$D = \mathrm{D}\varphi\alpha.\delta + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.2\beta^5\gamma + \frac{\mathrm{D}^3\varphi a}{1.2.3}.\beta^3$$

$$E = \mathrm{D}\varphi\alpha.\varepsilon + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}(2\beta\delta + \gamma^2)$$
$$+ \frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.3\beta^2\gamma + \frac{\mathrm{D}^4\varphi\alpha}{1..4}.\beta^4$$

$$F = \mathrm{D}\varphi\alpha.\zeta + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}(2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta)$$
$$+ \frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}(3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2) + \frac{\mathrm{D}^4\varphi\alpha}{1..4}.4\beta^3\gamma$$
$$+ \frac{\mathrm{D}^5\varphi\alpha}{1..5}.\beta^5$$

u. s. f. eben so, wie in (16.) gefunden ist.

22. Dieses Verfahren ist weit kürzer als das von Arbogast gebrauchte. Er entwickelt eine Derivirte von β^n erstlich zu Derivirten von γ und deren Potenzen, diese wieder zu Derivirten von δ u. s. f., bis keine Derivationen mehr übrig bleiben. Hier findet er bey der Vergleichung der letzten Entwickelungen von $\frac{\mathrm{D}^5.\beta^4}{1..5}$ und $\frac{\mathrm{D}^6.\beta^4}{1..6}$ das Gesetz der Formation, welches in dem Artikel, combinatorische Analysis (45.) angemerkt und auch bewiesen ist. Der Beweis, den A. giebt, ist verwickelt. Hernach zeigt er ein leichteres Verfahren, die Derivirten, wie z. B. $\mathrm{D}.\beta^4$; $\frac{\mathrm{D}^2.\beta^3}{1.2}$; $\frac{\mathrm{D}^3 2\beta^4}{1.2.3}$, u. s. f.

jede aus den vorhergehenden hergeleitet werden können. Der Weg dazu ist etwas lang, und das Verfahren selbst beruht auf einer Induction.

23. Bequemer und natürlicher ist es, die unbestimmte Potenz eines Polynomium durch die Combinationslehre zu finden, und die Formel für dieselbe zu den Substitutionen bey den Potenzen von π (18.) anzuwenden, wie es in dem Artikel, combinatorische Analysis (43.), geschehen ist. Arbogast hat ein durchgängig gleichförmiges Verfahren beobachten wollen, und hat deswegen auch den polynomischen Lehrsatz nach seiner Methode behandelt.

24. Dieser Analyst läßt zwar der Hindenburgischen Combinations-Rechnung Gerechtigkeit wiederfahren, allein er giebt doch seiner Methode in Absicht auf die Principien, die Rechnungsweise und die Bezeichnung den Vorzug.

Die Principien der Derivations-Rechnung seyn mehr befassend, da sie mit der allgemeinen Theorie der Functionen verknüpft ist, und einen Zweig derselben ausmacht.

Das von ihm angewandte Verfahren bey der Entwickelung der Functionen sey leichter, auch mehr analytisch, als das combinatorische. Nach dem letztern würden die von ihm so genannten Polynomialgrößen (die aus β, γ, δ, ε, etc. zusammengesetzten) stückweise gefunden, zuerst die Literalproducte, dann die numerischen Factoren. Hingegen gebe sein Verfahren die vollständigen Terminos der Entwickelungen durch eine zusammenhangende Rechnung, Literalgrößen mit den numerischen Coefficienten zugleich, und die Polynomialgrößen eine von der andern hergeleitet, ganz reducirt (durch β, γ, δ, ε, etc. dargestellt), so daß es fast nichts als die Mühe des Schreibens erfordere; man habe weder zum voraus berechneter Combinationstafeln, noch anderer, gleichsam mechanischer Hülfsmittel, durch Vertheilung in Fächer, nöthig, um die Polynomialgrößen zu berechnen.

25. Inzwischen ist zu bemerken, daß die Derivations-Rechnung ihren Weg durch die Differential-Rechnung nimmt, oder doch der Methoden dieser Rechnung benöthigt ist, um die Derivationen der Function $\varphi\,\alpha$ bequem zu

finden. Die Derivations-Größen sind nichts anders als Differential-Quotienten. Es möchten daher die Gränzen der beiden Hauptheile der Analysis mit einander vermischt werden, oder wenigstens bliebe in einem System, wo die Derivations-Rechnung vor der Differentialrechnung voran gienge, das Verfahren der successiven Derivationen etwas dunkel. Hingegen ist die Combinations-Rechnung in ihren Anfängen sehr einfach, so wie in der Ausübung leicht, und stellt sich gleich bey dem Eingange in die Analysis als eine ganz unabhängige Methode dar. Sie dient als fruchtbares Hülfsmittel bey allen Operationen des Multiplicirens und des Zerlegens in gleiche oder ungleiche Factoren; und eben daher, weil sie alle Vorarbeiten liefert, kann sie zur Entwickelung der Functionen, mit Zuziehung des Taylorschen Lehrsatzes, sehr bequem gebraucht werden. Daß die Literalproducte der Größen und die numerischen Coefficienten abgesondert von einander gefunden werden, ist nicht als ein Umschweif anzusehen; es sind ganz verschiedene Operationen. Die Literalproducte sind die verschiedenen Gattungen der Combinationen, die in einem Factor zusammen genommen werden, die numerischen Coefficienten zeigen die möglichen Versetzungen der Elemente in den Combinationen an, und beide zusammen geben alle Variationen der Verbindungen der Elemente. Es ist daher etwas sehr wesentliches, den Ursprung der numerischen Coefficienten, als Versetzungszahlen, zu kennen, welches die Derivations-Rechnung nicht erfahren läßt. In der That ist es bequemer, zuerst die Combinationen zu bilden, und dann die Versetzungszahlen beyzufügen, als wenn man, um beides zugleich zu thun, die Aufmerksamkeit theilen muß. Allein die combinatorische Rechnung kann, eben so gut wie die Derivations-Rechnung, das Gesetz angeben, nach welchem die Combinationen der Coefficienten aus der Functionalgröße und ihre numerischen Begleiter in der entwickelten Function folgweise aus einem Coefficienten in den andern hergeleitet werden, wie es in der combinat. Analysis (45.) geschehen ist. Zugleich sieht man den Ursprung sowohl der Combinationen als ihrer numerischen

Begleiter durch sie deutlich ein. Wenn übrigens die Combinationslehre bey ihrer Anwendung auf die Analysis nicht selten zum voraus berechnete Combinationstafeln aufstellt, auch wohl die Größen zuweilen in Fächer vertheilt, so geschieht das keinesweges deswegen, als ob die combinatorische Methode solche gleichsam mechanische Hülfsmittel nicht entbehren könnte. Die combinatorische Entwickelung und Darstellung der Größen ist immer leicht, und kann gleich da vorgenommen werden, wo man sie braucht. Vorgearbeitete Tafeln haben die Bequemlichkeit anderer Tafeln, und sind auch zur Vergleichung brauchbar; die Vertheilung in Fächer dient dazu, den Zusammenhang mehrerer Grössen untereinander anschaulich darzustellen und nachzuweisen.

26. Arbogast wendet die Derivationsrechnung auf verschiedene schwierige analytische Entwickelungen an. Er zeigt, wie Producte von mehrern Polynomien und Functionen eines Polynomium gemacht, und wie Functionen von zwey oder mehrern einfachen Polynomien entwikkelt werden. Er erweitert seine Methode auf Functionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen, und macht die Anwendung davon theils auf die rücklaufenden Reihen, sowohl einfache, als gedoppelte oder dreyfache, theils auf die allgemeine Umkehrung der Reihen. Zuletzt zeigt er ihren Gebrauch in der Differential- und Integralrechnung. Noch fügt er nützliche Anwendungen derselben bey, die sich bey den Reihen mit Sinus oder Cosinus von Winkeln in arithmetischer Progression, bey Producten von Factoren in einer solchen Fortschreitung, und in der Differenzen-Rechnung machen lassen.

27. Eine der Derivations-Rechnung ähnliche Methode hat schon von Segner in den Elementis Anal. Infin. P II. §. 543. angewandt, ein Polynomium auf eine unbestimmte Potenz zu erheben. Sie verdient hier mitgetheilt zu werden, aber auf eine deutlichere, kürzere und allgemeinere Art, als sie daselbst vorgetragen ist.

28. Es sey $Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.}$ wo α, β, γ, δ, ε, etc. unabhängige Größen sind. Es

soll irgend eine Function von Z durch die gleichnahmige Function von α, und durch die gegebenen Größen, nach Potenzen von z geordnet, ausgedruckt werden.

Zu dem Ende sehe man z als die endliche Veränderung Δx einer veränderlichen x an, und α als eine Function von x. Den andern Größen, β, γ, δ, ε, etc. gebe man man abhängige Werthe, nämlich $\beta = \frac{d\alpha}{dx}$;

$$\gamma = \frac{d\beta}{2dx}; \delta = \frac{d\gamma}{3dx}; \varepsilon = \frac{d\delta}{4dx}; \zeta = \frac{d\varepsilon}{5dx};$$

u. s. f. Also ist Z eine Function $y + \Delta y$ von $x + \Delta x$, wenn y die gleichnamige von x ist.

Nun ist nach dem Taylorischen Lehrsatze

$$y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \frac{d^2 y}{1.2 dx^2} \cdot \Delta x^2$$
$$+ \frac{d^3 y}{1.2.3 dx^3} \cdot \Delta x^3 + \frac{d^4 y}{1..4 dx^4} \cdot \Delta x^4 + \text{etc.}$$

Dadurch ist $y = \alpha$, und die ganze Reihe ist mit der Reihe für Z dieselbe, wenn $\Delta x = z$ genommen wird, bey der für jetzt eingeschränktern Bedeutung von β, γ, δ, etc.

Es sey nun $\varphi(y + \Delta y)$ irgend eine zu entwickelnde Function von $y + \Delta y$. Man setze

$$\varphi(y + \Delta y) = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 + E\Delta^4 + \text{etc.}$$

wo A, B, C, D, etc. Functionen von x sind. Da $\varphi(y + \Delta y) = \varphi y + \Delta.\varphi y$, so kommt anstatt y in der obigen Formel hier φy, und anstatt Δy daselbst hier $\Delta.\varphi y$, folglich ist $A = \varphi y$; $B = \frac{dA}{dx}$; $C = \frac{dB}{2dx}$;

$D = \frac{dC}{3dx}$; $E = \frac{dD}{4dx}$, u. s. f.

Da $y = \alpha$, so ist $A = \varphi\alpha$, und $B = \frac{d\varphi\alpha}{dx}$, oder

$B = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx}$, das ist, $B = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \cdot \beta$.

Da $\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}$ eine endliche Größe ist, so ist . . .

$d . \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} = \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha}$, und es ist $dB = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} . d\beta$

$+ \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha} . \beta = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} . 2\gamma dx + \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2} . \beta d\alpha.$

also

$$C = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} . \gamma + \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2} . \tfrac{1}{2}\beta^2.$$

Hieraus ist

$$dC = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} . d\gamma + \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2} (\gamma da + \beta d\beta)$$
$$+ \frac{d^3\varphi\alpha}{dx^3} . \tfrac{1}{2}\beta^2 d\alpha,$$

und dadurch

$$D = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} . \delta + \frac{d^2\varphi\alpha}{2d\alpha^2} . 2\beta\gamma$$
$$+ \frac{d^3\varphi\alpha}{6d\alpha^3} . \beta^3.$$

Das Differential dD giebt nach den gehörigen Substitutionen, durch $4dx$ dividirt,

$$E = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} . \varepsilon + \frac{d^2\varphi\alpha}{2d\alpha^2} (2\beta\delta + \gamma^2)$$
$$+ \frac{d^3\varphi a}{6d\alpha^3} . 3\beta^2\gamma + \frac{d^4\varphi\alpha}{24d\alpha^4} . \beta^4.$$

u. s. f.

Verändert man die Function α von x auf irgend eine Art, so bekommen β, δ, ε, etc. andere Werthe, ohne daß die Art der Zusammensetzung der mit den Differential-Quotienten verbundenen Factoren sich ändert. Die Beschaffenheit der Function $\varphi\alpha$ bestimmt nur die Form der Differentialquotienten, nicht die Form der sie begleitenden Factoren. Daher bleibt bey der Entwickelung der Fun-

ction, $\varphi(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.})$ die Form der Coefficienten von z dieselbe, welche hier gefunden ist, wenn gleich die Coefficienten β, γ, δ, etc. ganz unabhängig von einander sind. Auch braucht α nicht mehr als eine Function von x betrachtet zu werden, und z nicht als die Veränderung von x. Die Größe α kann eine absolute veränderliche Größe, oder eine Function von einer veränderlichen seyn, und z ist irgend eine willkührliche, unabhängige Größe.

28. Zur Vergleichung der Derivations-Rechnung mit der combinatorischen Methode, und zugleich zur deutlichern Einsicht in jene dient vortrefflich eine akademische Schrift von Prof. Hindenburg: Functionum polynomiorum evolutionem per series, adhibito calculo derivationum nuperrime invento, ad substitutiones in substitutiones operosas deducere, et in combinatorias tandem, quibus nullo modo carere potest, operationes et involutiones facillimas desinere. Lipsiae 1801. Ich würde die bescheidene Unpartheylichkeit des Verfassers rühmen, wenn man sie nicht bey einem solchen Gelehrten, wie derselbe ist, voraussetzen müßte. Eine ausführlichere Vergleichung beider Methoden ist in einer Sammlung hierher gehöriger Abhandlungen anzutreffen: Über combinatorische Analysis und Derivationscalcul. Einige Fragmente, gesammelt und zum Druck befördert von Carl Friedrich Hindenburg. Leipzig, bey Schwikkert, 1803. Die erstern französisch geschriebenen Aufsätze darin: Caracteristique combinatoire; Développement général aux fonctions arbitraires; Polynome combinatoire, sind von Professor Bürmann, und haben die Absicht, Ausländern die combinatorische Analysis bekannter zu machen und zu empfehlen. Die letzte Abhandlung vom Professor Hindenburg: Derivationscalcul und combinatorische Analysis in Beziehung auf einander, dient zur nähern und ausführlichern Vergleichung beider Methoden gegen einander.

Determinirt, s. Bestimmt.

Diacaustica ist die Brennlinie durch Brechung, das ist, die Linie, auf welcher die Durchschnittspuncte je zweyer nächsten, nach Art der Lichtstrahlen von einer Linie gebrochenen, geraden Linien liegen, wenn diese, wie die zugehörigen auffallenden Linien in stetiger Folge genommen werden. Oder, sie ist die Linie, welche von allen solchergestalt gebrochenen geraden berührt wird.

1. Es ist CMNO (Fig. 113.) die brechende Linie. An diese sind von einem gegebenen Puncte A die Linien AM, AN gezogen, welche nach MS, NS gebrochen werden, wodurch sie sich in S schneiden. Die Normalen in M und N sind MR, NR, deren Durchschnittspunct R ist. Alle Linien liegen in einer Ebene. Es soll die Gränze gefunden werden, welcher sich der Abstand MS des Durchschnittspunctes S von M immer mehr nähert, je näher die Puncte M, N einander liegen.

Zu diesem Ende müssen die Unterschiede der auffallenden Strahlen AM, AN, der gebrochenen SM, SN, der Bogen CM, CN, und die Unterschiede der Winkel jener Linien mit ihren zugehörigen Normalen als Differentiale behandelt werden, da ihre Quadrate und höhere Potenzen nicht mit in Rechnung gezogen werden können, ohne der Voraussetzung, daß eine Gränze gefunden werden soll, zu widersprechen.

2. Es sey $AM = z$, $SM = u$, der Winkel der Normale MR mit Ma, der Verlängerung von AM, oder der Einfallswinkel $RMa = \varphi$; der Brechungswinkel $RMS = \omega$. Der Bogen CM sey $= s$, der Halbmesser der Krümmung in $M = r$. Das Brechungsverhältniß sey $m : n$, so daß $m : n = \sin\varphi : \sin\omega$.

3. Die Linie NR schneide Ma in P. Es ist $RPa = RMa + MRN$, und $APN = RNb - MAN$. Daher ist jene Summe diesem Unterschiede gleich, und daraus ist

$$MRN + MAN = RNb - RMa.$$

Die Linie NR schneide MS in Q, so ist der Winkel

RQS = RMS + MRN, und auch = RNS + MSN, also ist

$$MRN - MSN = RNS - RMS.$$

4. Man beschreibe mit AM als Halbmesser den Kreisbogen Mm innerhalb des Winkels MAN, und mit SN den Kreisbogen Nn innerhalb des Winkels MSN. Der Winkel NMm ist = RMa, weil beide mit NMa einen Rechten ausmachen, und der W. NMn = 90° — RMS.

5. Weil die Unterschiede der Bogen MN, Mm, Nn, von der geraden Linie hier nicht in Betrachtung kommen können, so ist Mm = MN.cos RMa; Nn = MN.cos RMS. Ferner ist der W. MAN = $\frac{Mm}{AM}$ = $\frac{\partial s.\cos\varphi}{z}$; MSN = $\frac{Nn}{SM}$ = $\frac{\partial s.\cos\omega}{u}$.

Auch ist MRN = $\frac{\partial s}{r}$. Es ist nämlich MR die Gränze der Durchschnittsweite zweyer Normalen, so wie MS der Durchschnittsweite zweyer zurückgeworfenen Strahlen; daher ist für MR der Halbmesser der Krümmung in M zu setzen. Die Quotienten bedeuten Kreisbogen für den Halbmesser gleich der Einheit. Nun ist aus (3.)

$$\text{I. } \frac{\partial s}{r} + \frac{\partial s.\cos\varphi}{z} = \partial\varphi,$$

$$\text{II. } \frac{\partial s}{r} - \frac{\partial s.\cos\omega}{u} = \partial\omega.$$

6. Da m sin ω = n sin φ, so ist m cos ω. ∂ω = n cos φ. dφ, und

$$\text{III. } \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \frac{m\cos\omega}{n\cos\varphi}.$$

7. Aus den Gleichungen I. II. wird noch ein Werth des Quotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ erhalten. Dieser giebt mit dem in III. die Gleichung

$$\frac{uz + r\dot{u}\cos\varphi}{uz - rz\cos\omega} = \frac{m\cos\omega}{n\cos\varphi}.$$

Hieraus wird erhalten

$$u = \frac{mrz\cos\omega^2}{mz\cos\omega - nz\cos\varphi - nr\cos\varphi^2}.$$

Setzt man in diesem Werthe für m und n ihre proportionalen $\sin\varphi$ und $\sin\omega$, so wird

$$u = \frac{rz\sin\varphi.\cos\omega^2}{z\sin(\varphi - \omega) - r\sin\omega.\cos\varphi^2}.$$

8. Wenn φ und $\omega = 0$ sind, so ist . . . .

$u = \frac{mrz}{(m-n)z - nr}$. Den Vereinigungspunct auf dem senkrecht einfallenden, ungebrochenen Strahle nehme man zum Anfangspuncte der Brennlinie.

9. Wenn $m:n = \varphi:\omega$ gesetzt wird, so ist . . .

$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = \frac{n}{m}$, und daraus $u = \frac{mrz\cos\omega}{(m-n)z - nr\cos\varphi}$.

Diese Formel ist in der Dioptrik nützlich, wo bey den Linsengläsern kleine Einfalls- und Brechungswinkel vorkommen, die man nicht als verschwindend ansehen, nur als ihren Sinus proportional annehmen darf. Die Länge u ist nun nicht auf dem ungebrochenen Strahle, sondern auf dem gebrochnen zu nehmen.

10. Für eine gegebene krumme Linie ist die Gleichung zwischen AM und dem Winkel derselben mit einer Anfangslinie AB gegeben, dadurch der Winkel der AM mit der in M berührenden, also der Winkel mit der Normale (hier φ); ferner der Halbmesser der Krümmung, und durch das Brechungsverhältniß der Sinus von ω. Solchergestalt läßt sich die Lage der gebrochnen Linie MS, und durch die für u gefundene Formel die Länge von MS bestimmen. Im Allgemeinen aber ist es sehr mühsam, aus der Gleichung für die brechende Linie die Gleichung für ihre Diacaustica zu finden.

11. Für den Kreis ist r eine gegebene Größe. Für eine gerade Linie ist r unendlich groß. Daher ist für die

Diacaustica der letztern $u = -\frac{m\cos\omega^2}{n\cos\varphi^2} z$. Die Brennlinie liegt auf derselben Seite mit dem strahlenden Puncte.

12. Wenn die Strahlen oder Linien parallel unter sich auffallen, so ist z unendlich groß, also

$$u = \frac{m r \cos\omega^2}{m\cos\omega - n\cos\varphi}.$$

13. Ist $m = -n$, so verwandelt sich die Diacaustica in die Catacaustica. Für diese ist, $m = -n$, und $\omega = -\varphi$ gesetzt,

$$u = \frac{r z \cos\varphi}{2z + r\cos\varphi}.$$

In dem Artikel, Catacaustica (13. S. 411), ist $u = \frac{r z \cos\omega}{2z - r\cos\omega}$ gefunden. Daselbst liegen die Puncte R und S auf derselben Seite der zurückwerfenden Linie mit dem strahlenden Puncte; hier würden sie auf der andern Seite, als wo dieser liegt, sich befinden. Daher sind hier u und r den u und r in jenem Artikel entgegengesetzt. Übrigens ist ω daselbst was hier φ ist.

14. Die Diacaustica wird von der gebrochnen berührt. Denn wenn man die Puncte der Brechung in endlichen Abständen von einander nimmt, so wird durch die successiven Durchschnitte der gebrochenen Linien eine geradlinichte vielseitige Figur gebildet, indem auf jede gebrochene zwey Durchschnittspuncte fallen. Je näher die Puncte der Berührung sich kommen, desto kleiner werden die Seiten des Polygons, und bey einer stetigen Folge der Brechungspuncte ist jede Seite in die Lage eines Elements der Brennlinie gerückt, das ist in die Lage einer berührenden.

15. Die Diacaustica ist rectificabel, wenn die brechende eine geometrische Linie ist. Denn es sey BST (Fig. 113.) ein Bogen der Diacaustica zu der brechenden CMNO, und CB die berührende in B, welche mit AC in gerader Linie liege, wenn nämlich AC senkrecht auf die

brechende ist. Man stelle sich BC als einen gespannten Faden vor, der in B die Diacaustica berührt, und successiv an BST angelegt wird. Während dieser Bewegung wird der Faden an dem Ende bey C allmählig verkürzt, und diese Verkürzung ist für jede unendlich kleine Veränderung der Lage das Differential $-\partial u$. Für unendlich kleine Veränderungen ist $Nm = NM . \sin NMm = NM . \sin RMa$; und $Mn = MN . \cos NMn = MN . \sin RMS$, das ist $\partial z = \partial s . \sin \varphi$, und $-\partial u = \partial s . \sin \omega$. Daher ist $\partial z : -\partial u = m : n$, und die momentane Verkürzung ist $= \frac{n \partial z}{m}$. Die Summe aller Verlängerungen der auffallenden Strahlen ist $AM - AC$; also die Summe aller Verkürzungen der gebrochnen Strahlen an der Seite der brechenden Linie ist $\frac{n}{m}(AM - AC)$. Folglich ist $BC = BS + SM + \frac{n}{m}(AM - AC)$, also der Bogen $BS = BC - SM - \frac{n}{m}(AM - AC)$.

16. Für die krumme Linie CMD, (Fig. 114), welche alle von A auffallenden Strahlen in einen einzigen Punct B durch die Brechung vereinigt, ist $\frac{n}{m} AM + BM = Const.$ Denn für diese wird der Bogen BS der Brennlinie in Fig. 113. $= 0$, und SM daselbst hier BM; folglich ist $\frac{n}{m}(AM - AC) = BC - BM$, oder $\frac{n}{m} AM + BM = \frac{n}{m} AC + BC$. Der zweyte Theil dieser Gleichung ist eine gegebene Größe. Ist C auf der geraden AB, so geht der Strahl AC ungebrochen durch, und ist senkrecht auf die krumme Linie. Die AB verlängert schneide sie in D, so ist $\frac{n}{m} AD + BD$

$= \frac{n}{m} AC + BC$. Es ist hier nur die eine Hälfte der Linie gezeichnet.

Von C bis an den Punct E, wo die krumme Linie von einer aus A gezogenen Linie AE berührt wird, fallen die von A ausgehenden Strahlen auf die convexe Seite der Linie. Jenseits jenes Punctes E fallen sie auf die concave Seite, und hier liegen die auffallenden und die gebrochenen auf derselben Seite der berührenden. Wenn dieses gleich im physischen Sinne keine Brechung heißen kann, so mag man sie doch als eine geometrische ansehen. Der Winkel, dessen Sinus $= \frac{n}{m} \sin \varphi$ ist, kann so gut stumpf als spitz seyn. Von C bis an den Berührungspunct E ist dieser Winkel spitz, von E bis D ist er stumpf. Man mag es auch als eine Zurückwerfung betrachten, nur daß die Winkel des auffallenden und zurückgehenden Strahls nicht gleich groß sind.

17. Diese krumme Linie ist von Descartes zuerst betrachtet worden. Geometriae L. II. pag. 42. et 50 seqq. edit. Amstel. Er nennt sie eine Ellipse der zweyten Gattung, und giebt noch die Construction von drey andern Curven dieser Art, die er Ovalen nennt. Für alle ist $m : n = \sin \varphi : \sin \omega$. Die abgelenkte Linie kann viererley Lagen um den Brechungspunct bey der geometrischen Behandlung haben. Daher entstehen die vier Ovalen. Descartes giebt die Art, wie er auf sie gekommen ist, nicht an, sondern zeigt aus andern Gründen, daß sie die von einem Puncte auffallenden Linien nach einem gegebenen hinlenken. Er wollte sie in der praktischen Optik anwenden, zu Linsengläsern ohne Zerstreuung der Strahlen. Allein es ist theils nicht möglich, durchs Schleifen die gehörige Krümmung genau zu erhalten, theils aber wird die Farbenzerstreuung durch keine Art der Krümmung gehoben. S. Ovalen des Descartes.

18. Huygens ist zwar der erste, der die Diacaustica betrachtet hat, allein er hat sie nur für einen besondern Fall durch Bestimmung einzelner Puncte gezeichnet. Ja-

cob Bernoulli ist der erste, der eine allgemeine Construction angab, für jede brechende krumme Linie mittelst ihrer Krümmungshalbmesser die Puncte der Diacaustica zu bestimmen. Acta Er. 1693 und Opp. T. I. nr. 56, wo der Herausgeber, Cramer, den Beweis beygefügt hat. Aus seinen nachgelassenen Papieren ist in den Opp. T. II. nr. 103. art. 17. eine Auflösung mitgetheilt, die mit der hier vorgetragenen in einigen Stücken übereinkommt, doch aber sowohl in Absicht der angewandten geometrischen Construction als der ganzen Form der Rechnung verschieden ist. Joh. Bernoulli hat von der Brennlinie durch Brechung am Ende der Lectionum Hospitalianarum gehandelt. Sein Verfahren ist aber sehr unbequem. Er sucht die Länge des gebrochnen Strahls aus der Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten an der brechenden Curve. Bey parallelen auffallenden Strahlen ist die Rechnung noch erträglich; allein für divergirende Strahlen ist Bernoulli gezwungen sie unvollendet zu lassen. Die Länge des gebrochenen Strahls hängt von einer gewissen Linie ab, für welche die Gleichung unentwickelt bleibt.

L'Hopital hat in der Analyse des infiniment petits, nr 133. eine analytische Auflösung gegeben, die leicht genug ist, aber wegen der Differenzen der Einfalls-Sinus und der Brechungs-Sinus noch einen Anstoß lassen möchte. Er hat daraus die von Jakob Bernoulli gegebene Construction hergeleitet. Das Verfahren ist im Wesentlichen dasselbe mit dem von Cramer dieser Construction beygefügten Beweise, und dem von Kästner in dem Lehrbegriffe der Optik, S. 226 gebrauchten. Die in diesem Artikel vorgetragene Auflösung wird vollkommen scharf seyn; sie gebraucht die Hülfe der Geometrie nicht weiter, als es die Natur der Frage nothwendig macht.

19. Ein besonderer Fall bey der Brechung durch den Kreis, wo die nach einem Puncte hin zielenden Strahlen nach einem einzigen hin gebrochen werden, verdient noch Bemerkung.

Es ist AMB (Fig. 115.) ein Halbkreis aus C über AB beschrieben. In M falle ein Strahl LM auf, der nach

einem gegebenen Puncte D auf der Verlängerung von AB gerichtet ist. Man nehme AD:AE gleich dem Brechungsverhältnisse, so ist ME der gebrochne Strahl.

Das Brechungsverhältniß sey m:n. der Einfallswinkel CMD $= \varphi$, der Brechungswinkel CME $= \omega$, Es ist

$$\sin\varphi : \sin D = CD : CM$$
$$\sin E : \sin\omega = CM : CE,$$
$$\text{also } \sin\varphi . \sin E : \sin\omega . \sin D = CD : CE.$$
$$\text{oder } m \times MD : n \times ME = CD : CE.$$

Damit für den gegebenen Vereinigungspunct D der auffallenden Strahlen auch der für die gebrochenen E derselbe bleibe, muß das Verhältniß MD:ME unveränderlich seyn. Der Kreis hat die Eigenschaft, daß das Verhältniß MD:ME für jeden Punct M einem gegebenen gleich bleibt, wenn die Puncte D, E so genommen werden, daß die Verhältnisse AD:AE und BD:BE dem gegebenen gleich sind, s. Kreis. Es sey nun AD:AE $=$ BD:BE, so ist

$$AD : AE = AD + BD : AB = AB + 2BD : AB$$
$$= CD : CB, \text{ also}$$
$$AD : AE = CD : CB.$$

Daraus ist ferner

$$AD : AE = AD - CD : AE - CB = AC : CE$$
$$= CB : CE,$$
$$\text{also } AD : AE = CB : CE.$$

Aus dieser Proportion und der vorher gefundenen folgt

$$AD\,qu : AE\,qu = CD : CE, \text{ und } AD : AE$$
$$= \frac{CD}{AD} : \frac{CE}{AE}.$$ Da MD:ME $=$ AD:AE, so

ist $m : n = \frac{CD}{AD} : \frac{CE}{AE}$, also $m : n = AD : AE$.

Hieraus ist $m^2 : n^2 = CD : CE$.

Huygens hat diesen Satz in dem tract. de Lumine, Opp. reliqu. I. p. 82, ohne Beweis.

Diagonalfläche ist eine Ebene, die durch zwey parallele Seitenlinien eines Parallelepipedum, welche nicht zu derselben Seitenfläche gehören, gelegt wird. Sie theilt den Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile. Eine Ebene, durch eine Seitenlinie der einen Grundfläche eines Prisma, und eine ihr parallele Diagonallinie der andern Grundfläche, ist auch eine Diagonalfläche. Ein Schnitt durch die Diagonale der Seitenfläche eines dreyeckigen Prisma und eine der beiden gegen über liegenden Ecken ist es auch.

Diagonal-Linie oder **Diagonale** ist eine gerade Linie, welche in einer geradlinichten Figur durch zwey Winkelpuncte, die nicht zunächst bey einander liegen, gezogen ist.

In einem Parallelogramm seyn die beiden Seiten a, b, der eingeschlossene spitze Winkel $= \varphi$, die gegen über liegende Diagonale $= d$, so ist $dd = aa + bb - 2ab\cos\varphi$; und das Quadrat der andern Diagonale D, welche dem stumpfen Winkel, $2R - \varphi$, gegen über liegt, ist $D^2 = aa + bb + 2ab\cos\varphi$, (s. Dreyeck und Formeln d. ebenen Trigon.). In der Lehre von der Zusammensetzung der Bewegungen sind diese Sätze nöthig. Bey Zeichnung von Grundrissen ist es nützlich, die Diagonalen zu wissen.

Diagramma, eine geometrische Zeichnung zum Verständniß des Beweises eines Satzes, oder der Auflösung einer Aufgabe, es sey in der reinen, oder in der angewandten Mathematik. Das Wort wird nur bisweilen statt Figur im Lateinischen gebraucht.

Diagramma Hipparchi heißt insbesondere die Zeichnung von der Lage der Sonne, des Mondes und der Erde bey Finsternissen, mit den dazu gehörigen Linien, weil Hipparchus durch Beobachtungen der Finsternisse den Abstand der Erde von der Sonne zu bestimmen gesucht hat.

Diameter, s. Durchmesser.

Diametralzahl ist ein Product aus zwey Factoren, von deren Quadraten die Summe das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Z. B. 12 ist das Product von 3 und 4, deren Quadrate addirt das Quadrat von 5 geben. Eine Diametralzahl druckt den Inhalt eines Rechtecks aus, dessen Diagonale und Seiten rationale Verhältnisse gegen einander haben. Stifel hat in seiner Arithmetica integra diese Form einer Zahl, die jetzt nicht gebraucht wird, umständlich abgehandelt.

Differentia, differentialis numerus, heißt in Nepers Canone mirifico Logarithmorum, der Unterschied der Logarithmen von dem Sinus und Cosinus eines Winkels, oder der Logarithme von der Tangente dieses Winkels. Diese ist nämlich die vierte Proportionallinie zu dem Cosinus, dem Sinus und dem Sinus totus. Den letztern nimmt Neper zwar . . = 1000 0000, aber den Logarithmen desselben setzt er in seinem System = 0. In der neuern Trigonometrie wird der Sinus totus gewöhnlich = 1 gesetzt, daher dessen Logarithme in unsern System auch = 0 ist. In des Ursinus Canone triangulorum logarithmico, dem erweiterten Neperischen, ist die Benennung, differentialis, für den Logarithmen der Tangente auch beybehalten.

Differentiiren ist das Verhältniß der Differentiale zweyer oder mehrerer zusammen gehörigen Größen finden, s. Differentialformeln und Differentialgleichung.

Differenz *) ist allgemein der Theil, um welchen eine Größe vermehrt oder vermindert einer andern Größe gleich wird, was mit einem deutschen Worte, der Unterschied heißt. Insbesondere ist Differenz die Veränderung der Function einer veränderlichen Größe, welche jener zukommt, wenn diese um einen beliebigen Theil ver-

*) Bey den Artikeln, welche die Differenzen- und Differentialrechnung betreffen, ist die systematische Anordnung der alphabetischen vorgezogen, weil sie nothwendig in der Ordnung, wie sie hier folgen, gelesen werden müssen.

mehrt oder vermindert wird; oder die Veränderung einer Function mehrerer veränderlichen Größen, deren jede um einen beliebigen Theil verändert wird, wofern sie von einander unabhängig sind, oder um einen solchen Theil, wie es die Verbindung derselben erfordert. Sind x und y zwey mit einander verknüpfte Größen, so ist jede eine Function der andern, und ihre Differenz angeben, ist die zusammengehörigen Veränderungen derselben mit einander vergleichen. Eben so, wenn mehr als zwey veränderliche Größen mit einander in Verbindung stehen. Es kommt hier also darauf an, zusammengehörige Veränderungen von Größen mit einander zu vergleichen, und hierdurch sind Differenzen den Differentialen analog, nur daß letztere sich mit keiner endlichen Größe vergleichen lassen. Deswegen soll auch die Benennung, Differenz, für diejenige Art des Unterschiedes, welche die allgemeine Veränderung einer Function durch die Veränderung ihrer veränderlichen Größe darstellt, eigen bleiben. In englischen Schriften pflegt diese Art des Unterschiedes Incrementum genannt zu werden, welches aber nicht immer eine Vergrößerung anzeigt. Die deutsche Benennung, Unterschied, werde gebraucht von dem Unterschiede zweyer bestimmten Zahlen, oder dem Unterschiede unveränderlicher, der Quantität nach unbestimmter Größen, so fern er ohne Rücksicht auf den Unterschied anderer Größen auf irgend eine Art angegeben wird, dergleichen in algebraischen, analytischen und geometrischen Sätzen häufig vorkommt, z. B. in dem Satze, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Die Differenz einer veränderlichen Größe, als x, y, z, wird durch das vorgesetzte Zeichen Δ bezeichnet, nämlich Δx, Δy, Δz. Diese Symbole sind einfache Größenzeichen, wenn gleich der Figur nach zusammengesetzt. Sie bedeuten Größen, die mit x, y, z, gleichartig sind. Wird für die veränderliche Größe x eine Größe von einer gewissen Form gesetzt, so muß sie durch einen Punct von dem Differenzzeichen abgesondert werden. Z. B. $\Delta . x^2$ bedeutet die Veränderung von x^2, dagegen Δx^2 das Quadrat von Δx bedeutet. Auf gleiche Art sind $\Delta . x^n$ und Δx^n

zu unterscheiden. Auch bedeutet $\Delta . xy$ die Veränderung des Products xy, aber $y \Delta x$ das Product aus y in die Veränderung von x.

In allgemeinen Rechnungen bedeutet Δz eine Zunahme der veränderlichen Größe z, weil man in einer Reihe von Größen die größern auf die kleinern folgen zu lassen pflegt, lieber als umgekehrt. Inzwischen kann Δz auch negativ werden, so wie z selbst von dem positiven Werthe, den es unter den zum Grunde der Rechnung gelegten Umständen hat, unter andern Umständen zu einem negativen übergehen kann. Ein negatives Δz bedeutet eine Abnahme von z. Ist nämlich $\Delta z = V \Delta x$, wo V eine Function von x allein, nebst Δx, oder auch von x und z, bedeutet, so wird für ein positives Δx die Differenz Δz negativ, wenn V negativ wird.

In besondern Fällen zeigt man die Abnahme einer veränderlichen Größe z durch $-\Delta z$ an, so daß Δz schlechtweg die Quantität der Abnahme bedeutet. Wird dieses negativ, so verwandelt sich das Abnehmen in ein Zunehmen.

Wenn die durch z allgemein bezeichneten Glieder einer Reihe nicht gleichförmig zunehmen, so läßt sich aus den Differenzen eine neue Reihe von Unterschieden derselben, bilden, aus den Unterschieden derselben, wenn sie nicht alle sich gleich sind, wieder eine Reihe, und so ferner, entweder ohne Ende fort, oder bis man auf beständige Unterschiede kommt. Ein Glied aus der Reihe der zweyten Unterschiede wird allgemein durch $\Delta^2 z$, aus der Reihe der dritten durch $\Delta^3 z$, u. s. f. bezeichnet.

Differenzen-Rechnung (Methodus incrementorum; Methode des différences; Calcul aux différences finies) ist die Rechnung, wodurch die Relation der Differenz einer Function zu der Differenz der Functionalgröße, oder umgekehrt die Function aus der Relation der Differenzen gefunden wird. Auch mag die Function mehr als eine veränderliche Größe begreifen. Die Rechnung erstreckt sich auch auf die Differenzen höherer Ordnungen.

Die Differenzen-Rechnung steht in genauer Beziehung auf die Differentialrechnung. Diese sieht aber die Reihe

der veränderlichen Größen als eine stetige an, daher jede Potenz der Differenzen gegen diese verschwindet.

I. Differenzen rationaler Functionen.

1. Es sey $z = x^n$, und $z + \Delta z = (x + \Delta x)^n$, so ist, nach dem binomischen Lehrsatze,

$$\Delta z = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n.n-1.}{1.2} x^{n-2} \Delta x^2$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} x^{n-3} \Delta x^3 + \frac{n \ldots n-3}{1 \ldots 4} x^{n-4} \Delta x^4$$

$+$ etc.

2. Also ist $\Delta . x^2 = 2 x \Delta x + \Delta x^2$

$$\Delta . x^3 = 3 x^2 \Delta x + 3 x \Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\Delta . x^4 = 4 x^3 \Delta x + 6 x^2 \Delta x^2 + 4 x \Delta x^3 + \Delta x^4$$

u. s. w.

3. Wenn n eine negative ganze Zahl, oder eine gebrochene ist, so bricht die Reihe nicht ab, z. B.

$$\Delta . x^{-1} = \Delta . \frac{1}{x} = - x^{-2} \Delta x + x^{-3} \Delta x^2 - x^{-4} \Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta . x^{-2} = \Delta . \frac{1}{x^2} = - 2 x^{-3} \Delta x + 3 x^{-4} \Delta x^2 - 4 x^{-5} \Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta . x^{\frac{1}{2}} = + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Delta x - \frac{1}{8} x^{-\frac{3}{2}} \Delta x^2 + \frac{1}{16} x^{-\frac{5}{2}} \Delta x^3 - \text{etc.}$$

Die beiden ersten Reihen geben negative Werthe für die Differenz der Function, für zunehmende x. Ein Bruch nimmt ab, wenn der Nenner wächst.

4. Man bemerke, daß die Zahl-Factoren der Potenzen von Δx jeder aus dem mit der nächst vorhergehenden verbundenen durch die Multiplication mit dem Exponenten von x in diesem, und durch die Division mit der Stellenzahl des Factors selbst entstehen. Der Zahl-Factor des

ersten Gliedes ist der Exponent der Function. Dieses rührt von der Form der Binomial-Coefficienten her. Die Exponenten von x werden folgweise um 1 vermindert.

5. Es sey $z = a + bx + cx^2 + dx^3$, so ist

$$\Delta z = (b + 2cx + 3dx^2)\Delta z + (c + 3dx)\Delta x^2 + d\Delta x^3.$$

Die Factoren der Differenzen werden nach dem in (4) bemerkten Gesetze aus einander nach der Reihe hergeleitet.

6. Es seyn t und u zwey veränderliche Größen, und $z = tu$, so ist

$$z + \Delta z = (t + \Delta t)(u + \Delta u), \text{ also}$$

$$\Delta z = u\Delta t + t\Delta u + \Delta t . \Delta u.$$

7. Es sey $z = tuv$, so ist

$$\Delta z = uv\Delta t + tv\Delta u + tu\Delta v + v\Delta t.\Delta u + u\Delta t.\Delta v + t\Delta u.\Delta v + \Delta t.\Delta u.\Delta v.$$

8. Sind t und u Functionen von x, so sind Δt und Δu Functionen von x und Δx. Z. B. Es sey . . . $t = a + bx + cx^2$, und $u = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, so ist $\Delta t = (b + 2cx)\Delta x + c\Delta x^2$; und $\Delta u = (\beta + 2\gamma x)\Delta x + \gamma\Delta x^2$. Ist $z = tu$, so ist

$$\Delta z = (a\beta + b\alpha + 2(a\gamma + b\beta + c\alpha)x + 3(b\gamma + c\beta)x^2 + 4c\gamma x^3)\Delta x + (a\gamma + b\beta + c\alpha + 3(b\gamma + c\beta)x + 6c\gamma x^2)\Delta x^2 + (b\gamma + c\beta + 4c\gamma x)\Delta x^3 + c\gamma\Delta x^4.$$

Aus dem Factor von Δx werden die übrigen zufolge der Bemerkung in (4.) leicht hergeleitet.

9. Es ist

$$\Delta . x(x+1) = (2x+1)\Delta x + \Delta x^2$$

$$\Delta . x(x+1)(x+2) = (3x^2 + 6x + 2)\Delta x + (3x+3)\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\Delta . x(x+1)(x+2)(x+3) = (4x^3 + 18x^2 + 22x + 6)\Delta x + (6x^2 + 18x + 11)\Delta x^2 + (4x+6)\Delta x^3 + \Delta x^4.$$

Diese Differenzen zu erhalten, entwickele man das Product in der Function, suche daraus den ersten Terminus, der bloß Δx enthält, und daraus nach (4.) die folgenden.

Setzt man $\Delta x = 1$, so ist

$$\Delta . x(x+1) = 2(x+1)$$

$$\Delta . x(x+1)(x+2) = 3(x+1)(x+2)$$

$$\Delta . x(x+1)(x+2)(x+3) = 4(x+1)(x+2)(x+3)$$

u. s. f.

10. Die Differenzen für $\Delta x = 1$ erhält man unmittelbar, wenn man in jedem der Producte $x+1$ für x setzt, und es von dem solchergestalt veränderten abzieht, da beide Producte nur in einem Factor verschieden sind. Auf diese Art wird auch erhalten

$$\Delta . (mx+a)(mx+m+a) = 2m(mx+m+a)$$

$$\Delta . (mx+a)(mx+m+a)(mx+2m+a)$$
$$= 3m(mx+m+a)(mx+2m+a).$$

10. Es sey $z = \frac{t}{u}$, so ist

$$z + \Delta z = \frac{t+\Delta t}{u+\Delta u}$$

$$\Delta z = \frac{u\Delta t - t\Delta u}{u(u+\Delta u)}.$$

Exempel. $z = \frac{\alpha+\beta x}{a+bx}$

$$\Delta z = \frac{(a\beta - b\alpha)\Delta x}{(a+bx)(a+bx+b\Delta x)}.$$

12. Wenn $\Delta x = 1$ genommen wird, so ist

$$\Delta . \frac{1}{mx+a} = \frac{-m}{(mx+a)(mx+m+a)};$$

$$\Delta . \frac{1}{(mx+a)(mx+m+a)} =$$

$$\frac{-2m}{(mx+a)(mx+m+a)(mx+2m+a)}$$

u. s. f.

13. Es sey zwischen zwey veränderlichen Größen, x, y, eine rationale Gleichung, wie folgende, gegeben:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

so ist das Verhältniß der Differenzen Δx und Δy in folgender Gleichung enthalten,

$$(2ax + by + d)\Delta x + (bx + 2cy + e)\Delta y$$
$$+ a\Delta x^2 + b\Delta x\Delta y + c\Delta y^2 = 0.$$

Die beiden ersten Glieder der Gleichung werden erhalten, wenn für jeden Factor x gesetzt wird Δx, und für jeden Factor y eben so Δy. Aus diesen Gliedern entstehen die drey übrigen eben so, nur daß durchgehends durch 2 dividirt wird.

II. Differenzen irrationaler Functionen.

14. Für diese mag es an einem Beyspiele genügen. Es sey $z = \sqrt{(aa + xx)}$, so ist $z + \Delta z = \sqrt{(aa + xx + 2x\Delta x + \Delta x^2)}$. Wird die Quadratwurzel aus dem Quadrinomium, oder auch aus dem Trinomium $zz + 2x\Delta x + \Delta x^2$, nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, so erhält man eine Reihe, die nach den Potenzen von Δx fortschreitet. Bequemer gebraucht man hier die Methode der unbestimmten Coefficienten. Es sey, wenn das einfache Buchstabenzeichen u für Δx gesetzt wird,

$$z + \Delta z = z + Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + Eu^5$$
$$+ \text{etc.}$$

so ist, wenn auf beiden Seiten das Quadrat genommen, und für $(z + \Delta z)^2$ sein Werth gesetzt wird,

$$aa + xx + 2xu + u^2 = z^2 + 2Azu + (2Bz + A^2)u^2$$
$$+ (2Cz + 2AB)u^3 + (2Dz + 2AC + B^2)u^4$$
$$+ (2Ez + 2AD) + 2BC)u^5 + \text{etc.}$$

Die Coefficienten derselben Potenzen von u in beiden Theilen der Gleichung gleich gesetzt, wird, da $aa + xx = zz$ ist, erhalten

I. $Az = x$, und $A = \frac{x}{z}$.

II. $2Bz + A^2 = 1$; daraus $B = \frac{a^2}{2z^3}$.

III. $2Cz + 2AB = 0$; daraus $C = -\frac{a^2x}{2z^5}$.

IV. $2Dz + 2AC + B^2 = 0$, daraus

$$D = \frac{a^2(4x^2 - a^2)}{8z^7}.$$

V. $2Ez + 2AD + 2BC = 0$, daraus

$$E = -\frac{a^2x(4x^2 - 3a^2)}{8z^9}.$$

u. s. w.

Wenn man von den Coefficienten die Differentiale nach den Regeln der Differentialrechnung nimmt, so ist $B = \frac{\partial A}{2\partial x}$; $C = \frac{\partial B}{3\partial x}$; $D = \frac{\partial C}{4\partial x}$; $E = \frac{\partial D}{5\partial x}$, u. s. f. Es ist ein ähnliches Verfahren, wie das in (4.) angezeigte.

III. Allgemeine Form der Differenzen.

15. Die Formel für ein Glied einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung in dem Artikel, arithmetische Reihen höherer Ordnungen, S. 200, §. 10. wird uns dienen, sowohl die Gestalt der für die Differenz Δz gehörigen Reihe zu bestimmen, als auch die Derivation der Coefficienten zu den Potenzen von Δx, jedes aus den vorhergehenden, zu entdecken. In dieser Formel, nämlich

$$y = A + u \cdot \frac{\Delta A}{\Delta u} + \frac{u(u - \Delta u)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$$
$$+ \frac{u(u - \Delta u)(u - 2\Delta u)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3} + \text{etc.}$$

ist y eine veränderliche Größe, die nach demselben Gesetze, wie die Größen einer Reihe, die in gleichen Abständen von

von einander nach A folgen, durch ihren Abstand u von dem Anfangsgliede A der Reihe gebildet wird. Die außer A gegebenen Größen der Reihe erscheinen in der Formel nicht selbst, sondern mittelbar durch die Anfangsglieder der Differenzreihen, ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, etc. Der Abstand jeder von der nächsten ist Δu, welches hier nicht eine Veränderung von u, sondern ein Intervall bedeutet, das als Einheit für den Abstand u des Gliedes y von A dient, indem $\frac{u}{\Delta u}$ die Stellenzahl für y ist. Nun sey A eine Function von x, es sey eine gesonderte oder ungesonderte, eine algebraische oder transscendente, und die Glieder der Reihe, B, C, D, etc. in den Abständen Δu, $2\Delta u$, $3\Delta u$, etc. von dem Anfangsgliede A seyn nach ihrer Folge eben solche Functionen von $x + \Delta u$, $x + 2\Delta u$, $x + 3\Delta u$, etc. so sind die Differenzquotienten $\frac{\Delta A}{\Delta u}$, $\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$, $\frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3}$; etc. durch die Beschaffenheit der Function und durch Δu bestimmt. Umgekehrt bestimmen diese Quotienten zusammen die Function von x. Nimmt man in der Formel für y die Stellenzahl $\frac{u}{\Delta u}$ einer ganzen Zahl m gleich, so ist y dieselbe Function von $x + m\Delta u$ oder von $x + u$, wie es A von x ist. Alle solche Werthe von y werden aus den Stellenzahlen auf einerley Art zusammengesetzt, oder sind dieselben Functionen von u, und daher auch von $x - c$, wenn $u = x - c$ gesetzt wird, folglich auch von x. Ist $\frac{u}{\Delta u}$ eine gebrochene rationale Zahl, so ist y ein eingeschaltetes Glied der Reihe, von welchem dasselbe gilt. Denn bey Einschaltung irgend einer Anzahl von Gliedern in einer arithmetischen Reihe bleibt die erweiterte Reihe immer von derselben Ordnung, (a. a. O. 26.). Die Glieder der ursprünglichen Reihe werden nun aus den veränderten Stellenzahlen und Anfangsgliedern der Differenzreihen auf dieselbe Art zusam-

mengesetzt, wie die eingeschalteten Glieder aus ihren zugehörigen Stellenzahlen und jenen Anfangsgliedern. Umgekehrt werden daher diese auch aus den gebrochenen Stellenzahlen und den Anfangsgliedern der Differenzreihen in der ursprünglichen Reihe eben so zusammengesetzt, wie die Glieder derselben in den durch ganze Zahlen bezeichneten Stellen. Da die Anzahl der einzuschaltenden Glieder willkührlich ist, und unbestimmt groß gedacht werden kann, so gilt eben dieses für eine stetige Folge von Gliedern, die Stellenzahlen mögen rational oder irrational seyn. Demnach ist die durch die angeführte Formel bestimmte Größe y eben eine solche Function von $x+u$ als es das Anfangsglied einer Reihe A von x ist

16. Man setze für die Differenzquotienten $\frac{\Delta A}{\Delta u}$, $\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$, $\frac{\Delta^3 A}{\Delta^3 u}$, etc. nach ihrer Folge die einfachen Zeichen, P, Q, R, S, etc. und setze auch $A = fx$, einer Function von x, und daher eben so $y = f(x+u)$, so ist

$$f(x+u) = fx + Pu + \frac{Q}{1.2} u(u-\Delta u)$$
$$+ \frac{R}{1.2.3} u(u-\Delta u)(u-2\Delta u)$$
$$+ \frac{S}{1.2.3.4} u(u-\Delta u)(u-2\Delta u)(u-3\Delta u)$$
$$+ \text{etc.}$$

Die Quotienten P, Q, R, etc. enthalten jeder einen Theil, der von Δu frey ist. Denn ΔA, oder $f(x+\Delta u) - fx$, enthält in allen Gliedern eine Function von Δu oder Δu selbst, weil alles, was von x allein abhängt, oder bloß unveränderliche Größen enthält, beiden Functionen der fx und der $f(x+\Delta u)$ gemein ist, also bey der Subtraction sich aufhebt. Es muß aber ein Theil von ΔA bloß Δu enthalten, weil das Verhältniß $\Delta A : \Delta u$ sich einer gewissen Gränze nähern muß, je kleiner Δu genommen wird, diese Gränze aber nicht von ei-

ner willkührlichen endlichen Größe Δu abhangen kann, sondern allein durch die Beschaffenheit der Function fx bestimmt werden muß. Folglich ist $\frac{\Delta A}{\Delta u}$ oder P zum Theil eine Function von x allein. Ist diese für den zu A gehörigen Werth von x endlich, so ist die Gränze des Verhältnisses $\Delta A : \Delta u$ ein endliches Verhältniß; wird diese Function Null oder unendlich groß, so wird ΔA gegen Δu immer kleiner, oder in dem andern Falle immer größer, je kleiner Δu genommen wird, ohne einen Stillstand in dem einem wie in dem andern Falle.

Eben so ist Q, welches als Differenzquotient in der zweyten Differenzreihe, aus P auf ähnliche Art hergeleitet wird, wie P aus fx, zum Theil eine Function von x allein. So enthalten auch R, S etc. Functionen von x, frey von Δu.

Wenn das Gränzverhältniß von $\Delta A : \Delta u$; von $\Delta^2 A : \Delta u^2$; von $\Delta^3 A : \Delta u^3$; etc. für den Werth von x, der zu dem Anfangsgliede A gehört, nicht ein endliches ist, so muß es doch für andere Werthe von x, das dazu gehörige Glied der Reihe als Anfangsglied genommen, ein endliches seyn können. Darum müssen die Functionen P, Q, R, etc. einen von Δu freyen Theil enthalten.

17. Es zerfällt dergestalt die Differenz $f(x+u) - fx$ in zwey Theile, deren einer bloß von x abhängt, der andere zugleich eine Function von Δu nebst x ist. Nun ist $f(x+u)$ ganz unabhängig von dem Abstande Δu, in welchem die Glieder der Reihe A, B, C, D, etc. von einander gesetzt werden. Daher müssen alle Theile, welche Δu enthalten, sich aufheben. Bezeichnet man nun denjenigen Theil der Quotienten, P, Q, R, S, etc. der kein Δu enthält, nach der Folge durch p, q, s, r, etc. so ist

$$f(x+u) = fx + pu + \frac{1}{2} qu^2 + \frac{1}{6} ru^3$$
$$+ \frac{1}{24} su^4 + \frac{1}{120} tu^5 + \text{etc.}$$

18. Hier zeigt sich nun erstlich die Gestalt der Reihe für die Differenz der Function fx. Die Exponenten der Progressionalgröße u sind bloß ganze positive Zahlen. Zugleich ergiebt sich aus dem, was gleich vorher von der Beschaffenheit der Functionen p, q, r, s, etc, bemerkt worden ist, ihre Derivation aus einander, nebst der von p aus fx. Nämlich p entsteht aus fx, wenn, nachdem in fx für x gesetzt ist $x + \Delta u$, aus der Differenz $f(x + \Delta u) - fx$, bloß die Glieder genommen werden, die Δu allein enthalten, und das Aggregat durch Δu dividirt wird. Der Theil von Q, der kein Δu enthält, das ist q, wird aus dem von P, der gleichfalls davon frey ist, oder aus p, eben so hergeleitet, wie p aus fx. Aus q wird auf solche Art r; aus r wird s, und so fort wird in jedem Differenzquotienten der von Δu unabhängige Theil gefunden. Statt Δu kann zur Bequemlichkeit u selbst genommen werden, welches so wie Δu eine willkührliche Veränderung von x ist. In Absicht auf das Resultat der Operationen ist es einerley, ob man Δu oder u schreibt. Doch muß man den Abstand Δu der beiden ersten Glieder der Reihe, und den Abstand u des Gliedes $f(x + u)$ von dem Anfangsgliede, dabey nicht für gleichgültig nehmen.

19. Die Functionen p, q, r, etc. nenne man die Gränzquotienten von $\frac{\Delta A}{\Delta u}$, $\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$, $\frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3}$, etc. oder, wenn fx für A, und Δx für Δu gesetzt wird, so daß Δx den Abstand der beiden ersten Glieder der Reihe bedeutet, die Gränzquotienten von $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 fx}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 fx}{\Delta x^3}$, etc.

20. Es ist sehr merkwürdig, daß der erste Gränzquotient p die Function von $x + u$ bestimmt, da durch p die übrigen Gränzquotienten alle gegeben werden. Der Quotient $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ bestimmt die Function nicht, weil er, so wie alle übrigen solche Quotienten, von Δx zugleich abhängt.

An einer krummen Linie bestimmt er nur die Lage der berührenden geraden Linie. Der Gränzquotient p ist daher charakteristisch für die Function fx.

21. La Grange nennt in seiner Théorie des fonctions analytiques die hier durch p, q, r, s, etc. bezeichneten Functionen fonctions dérivées, in Beziehung auf die Function fx, als fonction primitive. Er unterscheidet sie in der Bezeichnung durch die Strichelung des Functionszeichens, und nennt die erste abgeleitete, $f'x$ (d. i. p), fonction prime; die zweyte $f''x$ (oder q), fonction seconde; die dritte $f'''x$ (oder r) fonction tierce; u. s. f. Die Gestalt der Reihe für $f(x+u)$, und die Formation der Coefficienten von u leitet la Grange aus ganz andern Betrachtungen her, als hier zum Grunde gelegt sind. Allein es möchten dabey noch Schwierigkeiten seyn, zu deren Erörterung hier aber der Raum fehlt. Einige Erinnerungen hat Pasquich gemacht in den elementis Analyseos et Geometriae sublimioris, Introd. XVIII.

22. Exempel. Es sey $fx=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, und es soll $f(x+u)$ entwickelt werden.

Dieses zu bewerkstelligen, muß man den Werth von p allgemein für $fx=(1-x^2)^{-m}$ suchen. Es ist . . . $f(x+u)=(1-x^2-2xu+u^2)^{-m}=(1-x^2)^{-m} + 2mx(1-x^2)^{-m-1}u+Mu^2$ (zufolge des binomischen Lehrsatzes) wo Mu^2 alle übrigen Glieder der Function bedeutet, die u^2 und höhere Potenzen von u enthalten. Nun ist zufolge (18.) $p=2mx(1-x^2)^{-m-1}$. Mit Hülfe dieser allgemeinen Formel lassen sich die Gränzquotienten p, q, r, etc. für $fx=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ entwickeln. Hier ist $p=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$. In beiden Factoren dieser Function setze man x + u für x, und verfahre ferner nach (18) mit Zuziehung der allgemeinen Formel für p, so ist

$$q = (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}}$$
$$= (1 + 2x^2)(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

indem der erste Theil von q in $(1 - x^2)(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}}$ verwandelt ist.

In dieser Function wird wieder $x + u$ für x gesetzt, und eben so wie für fx und q verfahren, so wird der Gränzquotient

$$r = 4x(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} + 5(x + 2x^3)(1 - x^2)^{-\frac{7}{2}}$$
$$= (9x + 6x^3)(1 - x^2)^{-\frac{7}{2}}.$$

Hieraus ist auf gleiche Art

$$s = (9 + 18x^2)(1 - x^2)^{-\frac{7}{2}} + 7(9x^2 + 6x^4)(1 - x^2)^{-\frac{9}{2}}$$
$$= (9 + 72x^2 + 24x^4)(1 - x^2)^{-\frac{9}{2}}.$$

Daraus noch

$$t = (225x + 600x^3 + 120x^5)(1 - x^2)^{-\frac{11}{2}}$$

u. s. f.

V. Differenzen transscendenter Functionen.

23. Für transscendente Functionen ist kein algebraischer Ausdruck vorhanden. Kann man aber die Gränze des Quotienten $\frac{\Delta fx}{\Delta u}$ oder des $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ angeben, so werden daraus nach der in (18.) erklärten Methode die Gränzen der höhern Differenzquotienten, also die Coefficienten in der entwickelten Function gefunden.

24. Es sey $fx = \log x$ in irgend einem System der Logarithmen; es wird die entwickelte Function, $\log(x + u)$
$$= lx + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \frac{1}{24}su^4 + \text{etc.}$$
gesucht.

Aus dieser Formel folgt $l(x + u) - lx$, oder $l(1 + \frac{u}{x}) = pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$ Nun

ist in jedem logarithmischen System das Gränzverhältniß des Logarithmen einer Zahl zu dem Überschusse der Zahl über die Einheit ein bestimmtes Verhältniß, (s. Logarithmen). Man setze $pu + \frac{1}{2} qu^2 + \frac{1}{6} ru^3 + \text{etc.}$ $= Mu$, so ist das Gränzverhältniß von $Mu : \frac{u}{x}$ oder von $M : \frac{1}{x} = c : 1$, wenn $c : 1$ jenes bestimmte Verhältniß in dem angenommenen System ist. Es ist aber p die Gränze von M, also ist $p : \frac{1}{x} = c : 1$, und $p = \frac{c}{x}$. Nun werden hieraus die folgenden Coefficienten bestimmt. Man setze nämlich $p' = \frac{c}{x+u}$, so ist $p' - p =$ $- \frac{cu}{x(x+u)}$, und die Gränze von $\frac{p'-p}{u}$, das ist $q = - \frac{c}{x^2}$. Weiter sey $q' = - \frac{c}{(x+u)^2}$, so ist $q' - q = \frac{c(2ux+uu)}{x^2(x+u)^2}$, daher $r = \frac{2c}{x^3}$. Ferner sey $r' = \frac{2c}{(x+u)^3}$, so ist

$$r' - r = - \frac{2c(3x^2u + 3xu^2 + u^3)}{x^3(x+u)^3}.$$

Daher $s = - \frac{2 \cdot 3c}{x^4}$. Daraus erhellet schon hinlänglich das Gesetz der Reihe,

$$\log(x+u) = lx + \frac{cu}{x} - \frac{cu^2}{2x^2} + \frac{cu^3}{3x^3} - \frac{cu^4}{4x^4} + \text{etc.}$$

In dem natürlichen System ist $c = 1$. Wie eine schneller convergirende Reihe gefunden wird, s. Logarithmen.

25. Es sey $fx = a^x$, wo a die Basis des Systems ist, worin x als Logarithme zu der Zahl a^x gehört Es soll $f(x+u)$ entwickelt werden.

Es sey $f(x+u) = a^x + pu + \frac{1}{2})qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.} = a^x + Mu$. Also ist $a^{x+u} - a^x = Mu$, oder $\frac{a^x(a^u - 1)}{u} = M$. Die Gränze des Quotienten $\frac{a^u - 1}{u}$ ist, wie in (24.) bemerkt worden, $= \frac{1}{c}$;

also ist $\frac{a^x}{c}$ die Gränze von M, und $p = \frac{a^x}{c}$. Es sey $p' = \frac{a^{x+u}}{c}$, oder $p' = \frac{a^x . a^u}{c}$, so ist $p' - p = \frac{1}{c} a^x (a^u - 1)$, und die Gränze von $\frac{p' - p}{u}$, das ist, $q = \frac{1}{c^2} a^x$. Eben so ist $r = \frac{1}{c^3} a^x$;

$s = \frac{1}{c^4} a^x$; u. s. f. folglich

$$a^{x+u} = a^x(1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{6c^3} + \frac{u^4}{24c^4} + \text{etc.}$$

und

$$a^u = 1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{6c^3} + \frac{u^4}{24c^4} + \text{etc.}$$

26. Es sey $fx = \sin x$, oder, wenn der Winkel durch φ bezeichnet wird, $f\varphi = \sin\varphi$. Es soll $f(\varphi + \omega)$ oder $\sin(\varphi + \omega)$ durch eine nach ω geordnete Reihe entwickelt werden.

Es sey $\sin(\varphi+\omega) = \sin\varphi + p\omega + \frac{1}{2}q\omega^2 + \frac{1}{6}r\omega^3 + \text{etc.}$ Nun ist $\sin(\varphi+\omega) - \sin\varphi = 2\cos(\varphi+\frac{1}{2}\omega).\sin\frac{1}{2}\omega$, (Goniometrie 28.). Die Gränze des Quotienten $\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\omega}$ ist $= \frac{1}{2}$, weil das Gränzverhältniß zwischen Bogen und Chorde das der Gleichheit ist, (s. Bogen), und daher eben dieses auch für $\sin\omega$ und ω Statt hat. Es ist also $p = \cos\varphi$. Um daraus q herzuleiten, sey $p' = \cos(\varphi+\omega)$, so ist $p' - p = \cos(\varphi+\omega) - \cos\varphi = -2\sin(\varphi+\frac{1}{2}\omega).\sin\frac{1}{2}\omega$, und die Gränze von $\frac{p'-p}{\omega}$, das ist $q = -\sin\varphi$. Daraus folgt (eben so wie p aus $\sin\varphi$), $r = -\cos\varphi$; hieraus $s = +\sin\varphi$: dann $t = -\cos\varphi$, u. s. f. Demnach ist

$$\sin(\varphi+\omega) = \sin\varphi + \cos\varphi.\omega - \frac{1}{2}\sin\varphi.\omega^2 - \frac{1}{6}\cos\varphi.\omega^3 + \frac{1}{24}\sin\varphi.\omega^4 + \frac{1}{120}\cos\varphi.\omega^5 + \text{etc.}$$

27. Es sey $f\varphi = \cos\varphi$, so ist

$$\cos(\varphi+\omega) = \cos\varphi - \sin\varphi.\omega - \frac{1}{2}\cos\varphi.\omega^2 + \frac{1}{6}\sin\varphi.\omega^3 + \frac{1}{24}\cos\varphi.\omega^4 - \frac{1}{120}\sin\varphi.\omega^5 - \text{etc.}$$

Das Verfahren bey der Entwickelung ist dem in (29.) ganz ähnlich. Oder man leite die Formel aus der für $\sin(90^\circ - \varphi - \omega)$ her, wo ω negativ, in Beziehung auf ω in (26.) ist.

28. Setzt man in den beiden gefundenen Formeln $\varphi = 0$, so ist

$$\sin\omega = \omega - \frac{1}{1.2.3}\omega^3 + \frac{1}{1..5}\omega^5 - \frac{1}{1..7}\omega^7 + \text{etc.}$$

$$\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{1..4}\omega^4 - \frac{1}{1..6}\omega^6 + \text{etc.}$$

29. Wollte man diese letztern Formeln unmittelbar finden, so daß man gleich anfangs $\varphi = 0$ setzte, so wäre für den Sinus der Gränzquotient $p = 1$, und für den Cosinus wäre derselbe $= 0$. Deswegen müßte man die Anfangsglieder der Differenzreihen für die beiden Folgen

$\sin 0$, $\sin\omega$, $\sin 2\omega$, $\sin 3\omega$, $\sin 4\omega$, etc.

$\cos 0$, $\cos\omega$, $\cos 2\omega$, $\cos 3\omega$, $\cos 4\omega$, etc.

selbst suchen, und dann die Gränzen der Quotienten nehmen, welche dieselben, durch die zugehörige Potenz von ω dividirt, geben.

30. In der Cyklometrie (5, 6.) sind die Formeln für $\sin\omega$ und $\cos\omega$ mittelst der Integration durch einen Umweg gefunden, weil die Differentialformeln, $\partial\sin\omega = \cos\omega.\partial\omega$ und $\partial\cos\omega = -\sin\omega.\partial\omega$ sich nicht gerade zu integriren lassen. Kästner nimmt hier eine Differentialgleichung vom zweyten Grade zu Hülfe, Analysis des Unendl. §. 285. 293, wie es auch Leibnitz für den Sinus gethan hat. Acta Er. 1693. Andere gebrauchen hier die Rechnung mit unmöglichen Größen, wie Euler in der Introd. in Anal. Inf. T. 1. §. 133; la Grange in der Théorie des fonctions, §. 25. Die Differenzenrechnung nimmt hier den kürzesten Weg. Die Bestimmung von p wird mit allem Fug aus der Natur der Frage hergeleitet.

31. Es sey $f\varphi = \text{tang}\,\varphi$, und $\text{tang}(\varphi + \omega)$

$$= \text{tg}\,\varphi + p\omega + \frac{1}{2}q\omega^2 + \frac{1}{6}r\omega^3 + \frac{1}{24}s\omega^4 + \text{etc.}$$

In dieser Reihe sollen die Coefficienten bestimmt werden.

Es ist $\text{tg}(\varphi + \omega) - \text{tg}\,\varphi = \dfrac{\text{tg}\,\varphi + \text{tg}\,\omega}{1 - \text{tg}\,\varphi.\text{tg}\,\omega} - \text{tg}\,\varphi$

$= \frac{(1+\mathrm{tg}\,\varphi^2)\,\mathrm{tg}\,\omega}{1-\mathrm{tg}\,\varphi.\,\mathrm{tg}\,\omega}$. Der Kürze wegen sey $\mathrm{tang}\,\varphi = t$, so ist $\Delta f\varphi = \frac{(1+t^2)\,\mathrm{tg}\,\omega}{1-t.\,\mathrm{tg}\,\omega}$, und . . $\frac{\Delta f\varphi}{\omega}$ oder $\frac{\Delta t}{\omega} = \frac{1+t^2}{1-t.\,\mathrm{tg}\,\omega} \cdot \frac{\mathrm{tg}\,\omega}{\omega}$. Die Gränze des Quotienten $\frac{\mathrm{tg}\,\omega}{\omega}$ ist $= 1$. Wird nun zugleich in dem andern Factor $\mathrm{tg}\,\omega = 0$ gesetzt, so wird die Gränze von $\frac{\Delta t}{\omega} = 1 + t^2$, und es ist $p = 1 + t^2$. Setzt man hier $t + \Delta t$ für t, und p' für p, so ist $p' - p = 2t\Delta t + \Delta t^2$, und $\frac{p'-p}{\omega} = (2t+\Delta t)\frac{\Delta t}{\omega}$. Die Gränze dieses Quotienten ist $q = 2t(1+t^2)$, indem hier alles weggelassen werden muß, was von ω abhängt, also auch Δt in dem Factor $2t + \Delta t$. Ferner ist $q' - q = 2\Delta t + 6t^2\Delta t + M\Delta t^2$, wo $M\Delta t^2$ alle Theile begreift, welche Δt^2 und Δt^3 enthalten, und $\frac{q'-q}{\omega} = (2+6t^2)\frac{\Delta t}{\omega} + \frac{M\Delta t^2}{\omega}$. Die Gränze dieses Quotienten ist . . $r = (2+6t^2)(1+t^2) = 2 + 8t^2 + 6t^4$. Auf dieselbe Art, wie r aus q hergeleitet ist, wird aus r der Gränzquotient s gefunden, nämlich $s = (16t + 24t^3)(1+t^2) = 8(2t + 5t^3 + 3t^5)$. Hieraus ist der folgende Gränzquotient, der zum Unterschiede von t durch (t) bezeichnet werde, $(t) = 8(2 + 15t^2 + 15t^4)(1+t^2) = 8(2 + 17t^2 + 30t^4 + 15t^6)$; u. s. w.

Demnach ist, wenn $\mathrm{tg}\,\varphi = t$ ist,

$$\mathrm{tang}(\varphi+\omega) = t + (1+t^2)\,[\omega + t\omega^2 + (\tfrac{1}{3} + t^2)\omega^3 + (\tfrac{2}{3}t + t^3)\,\omega^4 + (\tfrac{2}{15} + t^2 + t^4)\,\omega^5 + (\tfrac{17}{45}\,t + \tfrac{4}{3}\,t^3 + t^5)\,\omega^6 + \text{etc.}]$$

32. Wenn $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ oder $45°$, so ist $t = 1$, und

$$\text{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \omega) = 1 + 2(\omega + \omega^2 + \tfrac{4}{3}\omega^3 + \tfrac{5}{3}\omega^4 + \tfrac{32}{15}\omega^5 + \tfrac{122}{45}\omega^6 + \text{etc.})$$

Nimmt man ω negativ, so ist

$$\text{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - \omega) = 1 - 2(\omega - \omega^2 + \tfrac{4}{3}\omega^3 - \tfrac{5}{3}\omega^4 + \tfrac{32}{15}\omega^5 - \tfrac{122}{45}\omega^6 + \text{etc.})$$

Das Product dieser beiden Reihen ist $= 1$, wie es seyn muß, da die Tangente des einen Winkels die Cotangente des andern ist. Sie sind sehr brauchbar, die Tangenten und Cotangenten solcher Winkel zu berechnen, welche unmittelbar keine convergirende Reihen für jene geben. In Eulers Differentialrechnung. II. §. 98. hat die Formel für tang $(\varphi + \omega)$ eine andere Gestalt.

33. Es sey $fy = \text{Ang. sin } y = \varphi$, und $f(y+u) = \text{Ang. sin } (y+u) = \varphi + \omega$; nun soll die Differenz der Winkel durch die Differenz der Sinus ausgedruckt werden.

Man setze wiederum $f(y+u) = fy + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$, so ist $\omega = pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$, und $\frac{\omega}{u} = p + \frac{1}{2}qu + \text{etc.}$ In (26.) ist gefunden, daß der Gränzquotient von $\frac{\Delta \sin \varphi}{\Delta \varphi} = \text{cos}\,\varphi$ ist, also ist hier $p = \frac{1}{\text{cos}\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(1-yy)}}$. Die Gränzen der Differenzquotienten dieser Function sind schon in (22.) gefunden. Es ist daselbst fx, was hier

p ist, wenn für das dortige x hier y genommen wird. Also kommen für die dortigen p, q, r, s, t, hier q, r, s, t, (u), wo die Klammern das (u), als Differenzquotienten, von u, als Veränderung des Sinus, unterscheiden. Man setze $\sqrt{(1-yy)} = x$, als cos φ, so ist

$$\text{Ang. sin}(y+u) = \text{Ang. sin}\,y + \frac{u}{x} + \frac{yu^2}{2x^3} + \frac{(1+2y^2)u^3}{6x^5} + \frac{(9y+6y^3)u^4}{24x^7} + \frac{(9+72y^2+24y^4)u^5}{120x^9} + \frac{(225y+600y^3+120y^5)u^6}{720x^{11}} + \text{etc.}$$

34. Es sey $fx = \text{Ang. cos}\,x = \varphi$, und $f(x+u) = \text{Ang. cos}(x+u) = \varphi + \omega$; nun soll die Differenz der Winkel entwickelt werden.

Da die Gränze von $\frac{\Delta \cos\varphi}{\Delta\varphi} = -\sin\varphi$ ist (26 und 27.), so ist hier $p = -\frac{1}{\sin\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, und die Coefficienten in der entwickelten Reihe sind dieselben mit denen in (33.) nur entgegengesetzt, ausserdem daß x und y mit einander vertauscht werden. Es ist also

$$\text{Ang. cos}(x+u) = \text{Ang. cos}\,x - \frac{u}{y} - \frac{xu^2}{2y^3} - \frac{(1+2x^2)u^3}{6y^5} - \frac{(9x+6x^3)u^4}{24y^7} - \frac{(9+72x^2+24x^4)u^5}{120y^9} - \text{etc.}$$

Diese Formel und die in (33.) sind bey kleinen Werthen von u sehr convergirend, ausser wenn in jener der Winkel nahe ein rechter, und in dieser sehr klein ist.

35. Wenn $\varphi = 0$ genommen wird, so ist $y = 0$, und $x = 1$, also $\text{Ang. sin}\,u = u + \frac{u^3}{6} + \frac{9u^5}{120} + \text{etc.}$

Diese Reihe wird bequemer durch die Integralrechnung gefunden, s. Cyklometrie. 1.

36. Es sey $ft = \text{Ang. tang}\, t = \varphi$, und $f(t+u) = \text{Ang. tang}(t+u) = \varphi + \omega$; nun soll die Differenz der Winkel durch die Differenz der Tangenten angegeben werden.

Man setze $f(t+u) = ft + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3$ + etc. In (31.) ist gefunden, daß die Gränze von $\frac{\Delta \text{tang}\, \varphi}{\Delta \varphi} = 1 + t^2$ ist, nämlich der dortige Werth von p. Daher ist hier p (als Gränze von $\frac{\Delta \varphi}{\Delta \text{tang}\, \varphi}$) $= \frac{1}{1+t^2}$, oder $p = (1+t^2)^{-1}$. Setzt man $t+u$ für u, so ist $p^1 = (1 + t^2 + 2tu + u^2)^{-1} = (1+t^2)^{-1} - 2t(1+t^2)^{-2}u +$ etc., und die Gränze von $\frac{p^1 - p}{u}$ oder $q = -2t(1+t^2)^{-2}$. Wird hier $t+u$ für u gesetzt, so ist $q^1 = -2(t+u)(1+t^2+2tu+u^2)^{-2} = -2(t+u)((1+t^2)^{-2} - 4t(1+t^2)^{-3}u) +$ etc.) und $q^1 - q = 8t^2(1+t^2)^{-3}u - 2(1+t^2)^{-2}u +$ etc. $= (8t^2 - 2(1+t^2))(1+t^2)^{-3}u +$ etc. und die Gränze von $\frac{q^1 - q}{u}$ oder $r = (6t^2 - 2)(1+t^2)^{-3}$. Auf gleiche Art wird hieraus hergeleitet $s = 24(t - t^3)(1+t^2)^{-4}$. Daraus $(t) = 24(1 - 10t^2 + 5t^4)(1+t^2)^{-5}$ u. s. f. Die Potenz des Binomium wird bey jeder Operation entwickelt, und die Differenz des einen Factors in den andern Factor multiplicirt; wobey das Quadrat und die höhern Potenzen von u weggelassen werden. Demnach ist

$$\text{Ang. tang}(t+u) = \text{Ang. tang}\, t + \frac{u}{1+t^2} - \frac{tu^2}{(1+t^2)^2}$$
$$+ \frac{(3t^2-1)u^3}{3(1+t^2)^3} - \frac{(t^3-t)u^4}{(1+t^2)^4} + \frac{(5t^4-10t^2+1)u^5}{5(1+t^2)^5}$$
$$- \frac{(3t^5-10t^3+3t)u^6}{3(1+t^2)^6} + \text{etc.}$$

Man vergleiche Euleri Calc. differ. II. §. 86. 87.

37. Wenn $t = 0$ genommen wird, so ist

$$\text{Ang. tang}\, u = u - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 - \text{etc.}$$

Diese Formel wird unmittelbar und leichter durch die Differentialrechnung gefunden, s. Cyklometrie. 10.

38. Die Differentialrechnung liefert nach den Regeln ihres Verfahrens die Quotienten p, q, r. etc. leichter. Unsere Formel erhält durch Einführung der Differentialquotienten folgende Gestalt:

$$f(x+u) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 fx}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Die Differentialquotienten sind ganz dasselbe mit dem, was hier Gränzquotienten genannt sind. Die Formel ist der nach Taylor benahmte Lehrsatz.

39. Wenn $x = 0$, und A der Werth der Function fx für $x = 0$ ist, so ist

$$fu = A + \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2} + \frac{\partial^3 fx}{\partial u^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3}$$
$$+ \frac{\partial^4 fx}{\partial u^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wo man die Bezeichnung u auch mit x vertauschen kann, weil u jeden Werth der Functionalgröße bedeuten kann, der durch x bezeichnet wird. Allein in den Differentialquotienten muß man, nachdem sie durch x ausgedruckt sind, $x = 0$ setzen, weil diese Quotienten gar nicht von u ab-

hangen, also auch nicht von x, wenn u mit x vertauscht wird.

Ist für das Anfangsglied A der Werth von x nicht Null, sondern = a, so muß man in den Differentialquotienten a für das als veränderlich betrachtete x setzen.

40. Die Reihe für die Differenz einer Function, oder für f(x+u)—fx, (wo x auch o seyn mag) kann langsam convergiren, oder gar divergiren, weil eine Reihe im Allgemeinen nur die Form, nicht nothwendig die Quantität einer Größe, angiebt. Doch mag die Reihe für hinlänglich kleine u, die es nämlich in Vergleichung mit der Größen-Einheit sind, immer convergirend gemacht werden. Für große x den Werth der Function x zu entwickeln, muß man erst den Werth der Function für ein kleines x suchen, dann den Werth für f(x+u), wo u wiederum hinlänglich klein genommen werde. Ferner ist, wenn dieses x+u durch x bezeichnet wird, der Werth von f(x+u) auf gleiche Art zu bestimmen; wodurch man so fortfahrend den Werth der Function für irgend ein x herausbringen mag. Ein Beyspiel ist in (31.) vorgekommen. Bey der Berechnung der goniometrischen Linien verfährt man solchergestalt.

Die Reihe für die Differenz stellt die Ordinaten einer parabolischen Linie vor, welche die Curve, deren Ordinate die Function selbst ist, nur osculirt, aber nicht mit ihr einerley ist, daher man die Curve in Portionen abtheilen, und diese einzeln bestimmen muß. Dabey kommt es darauf an, wie genau die Endpuncte der Portionen bestimmt werden. S. berührende Linie.

V. Differenz einer Function zweyer veränderlichen Größen.

41. Es sey V irgend eine Function von x und y. Man sucht die allgemeine Form der Differenz von V durch die Differenzen von x und y. Zur Erläuterung mögen die Beyspiele vorangehen. Es sey

I. $V = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.
Man setze $x + \Delta x$ für x; $y + \Delta y$ für y, $V + \Delta V$ für V, so daß ΔV die Differenz ist, um welche V sich verändert, wenn x sich um Δx, und y sich um Δy verändert. Zieht man von der durch die Substitutionen entstandenen Gleichung die gegebene ab, so ist

$$\Delta V = (2ax + by + d + a\Delta x)\Delta x$$
$$+ (2cy + bx + e + c\Delta y)\Delta y$$
$$+ b\Delta x\Delta y.$$

Das erste Glied ist die partielle Differenz von V, wenn x allein verändert wird; das zweyte die partielle Differenz von V, wenn y allein veränderlich gesetzt wird; das dritte ist die partielle Differenz des ersten Gliedes, y allein darin veränderlich gesetzt, oder des zweyten, wenn x allein darin verändert wird.

II. Es sey $V = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$, so ist

$$\Delta V = (3\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 3\alpha x\Delta x + \beta y\Delta x$$
$$+ \alpha\Delta x^2)\Delta x$$
$$+ (3\delta y^2 + 2\gamma xy + \beta x^2 + 3\delta y\Delta y + \gamma x\Delta y$$
$$+ \delta\Delta y^2)\Delta y$$
$$+ (2\beta x + 2\gamma y + \gamma\Delta y + \beta\Delta x)\Delta x\Delta y.$$

Die Form der Glieder ist dieselbe wie in dem ersten Beyspiele.

III. Noch sey $V = \frac{x}{y}$, so ist $\Delta V = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y + \Delta y)}$ wie in (10.), oder $\Delta V = \frac{\Delta x}{y} - \frac{x\Delta y}{y(y + \Delta y)}$ $- \frac{\Delta x . \Delta y}{y(y + \Delta y)}$. Das erste Glied ist die partielle Differenz in Rücksicht auf x, das zweyte in Rücksicht auf y, weil $\Delta . \frac{1}{y} = \frac{1}{y + \Delta y} - \frac{1}{y} = - \frac{\Delta y}{y(y + \Delta y)}$ ist; das dritte ist die partielle Differenz des ersten Gliedes

in Rücksicht auf y, oder des zweyten in Rücksicht auf x. Dasselbe gilt, wenn für x, eine Function von x, und für y eine Function von y gesetzt wird.

42. Es sey V irgend eine Function von x und y. Ihre partielle Differenz in Rücksicht auf x allein sey $P\Delta x$, und in Rücksicht auf y allein sey die partielle Differenz $= Q\Delta y$. Die partielle Differenz von P in Rücksicht auf y allein sey $p\Delta y$; und von Q in Rücksicht auf x allein sey sie $q\Delta x$. Durch die Substitution von $x + \Delta x$ für x verwandelt sich V in $V + P\Delta x$, und diese durch die Substitution von $y + \Delta y$ für y in $V + P\Delta x + Q\Delta y + p\Delta y . \Delta x$. Dieses ist die vollständige verwandelte Function, da sowohl $y + \Delta y$ für y, als $x + \Delta x$ für x gesetzt ist. Also ist $\Delta V = P\Delta x + Q\Delta y + p\Delta y . \Delta x$. Auf gleiche Art verwandelt sich durch die Substitution von $y + \Delta y$ für y die Function V in $V + Q\Delta y$; und diese durch Substitution von $x + \Delta x$ für x in $V + Q\Delta y + P\Delta x + q\Delta x . \Delta y$. Hieraus ist $\Delta V = Q\Delta y + P\Delta x + q\Delta x . \Delta y$. Aus der Vergleichung dieses Werthes mit dem vorhergehenden folgt $p\Delta y . \Delta x = q\Delta x . \Delta y$; also $p = q$.

Die partielle Differenz von V in Rücksicht auf x allein hat zur partiellen Differenz in Rücksicht auf y allein dieselbe, welche die partielle Differenz von V, in Rücksicht auf y allein genommen hat, wenn in derselben x allein verändert wird.

Der hier vorgetragene Lehrsatz giebt ein Prüfungsmittel an die Hand, zu erfahren, ob eine gegebene Differenz, welche nebst Δx und Δy auch $\Delta x \Delta y$ enthält, von einer Function zweyer veränderlichen Größen entstehen könne. Die Gleichung $p = q$ ist eine Bedingungsgleichung für die Möglichkeit der Relation zwischen der gegebenen Differenzengleichung, und einer zustimmenden Gleichung für die Größen selbst.

VI. Höhere Differenzen.

43. Wenn von der Differenz einer Function fx die Differenz, von dieser aufs neue die Differenz genommen, und so fortgefahren wird, man mag nun zuletzt auf eine unveränderliche Differenz kommen oder nicht, so heißen diese Differenzen die **höhern**. Die Differenz der ersten Differenz heißt die **zweyte**, die Differenz der zweyten heißt die dritte, u. s. f. die Bezeichnungen sind für diese höhere Differenzen, $\Delta^2 fx$, $\Delta^3 fx$, $\Delta^4 fx$, etc. oder wenn $fx = z$ ist, $\Delta^2 z$, $\Delta^3 z$, $\Delta^4 z$, etc. Sie werden auf dieselbe Art jede aus der nächst niedrigern hergeleitet, wie Δz aus fx, indem nämlich für x gesetzt wird $x + \Delta x$. So wie die erste Differenz den Factor Δx hat, so erhält die zweyte den Factor Δx^2, die dritte den Factor Δx^3, u. s. f.

44. Die höhern Differenzen sind schon in der allgemeinen Formel für die Differenz einer Function angewandt: nur sind dabey die höhern Potenzen von Δx, nach der niedrigsten, zu der Differenz gehörigen weggelassen, weil diese gar keinen Einfluß auf die entwickelte Function, $f(x+\Delta x)$ oder $f(x+u)$, haben.

45. Die zweyte Differenz entsteht aus drey auf einander folgenden Werthen der Function fx; die dritte aus vier solchen Werthen, u. s. w. (s. arithm. Reihen höh. Ordn.) Die Unterschiede der Werthe von x könnten zwar ungleich genommen werden, allein alsdann ist das Gesetz zu bestimmen, nach welchem sich die zu den Werthen der Function gehörigen x verändern sollen. Demnach wäre x eine Function einer Größe y, deren Unterschiede gleich groß sind, oder man müßte diese wiederum eine Function einer andern Größe v seyn lassen, so daß man zuletzt doch bey einer Größe stehen bleiben muß, deren Veränderungen gleich groß sind, indem die zugehörigen Werthe der Function fx sich ungleichförmig verändern. So wie jene das Maaß oder die Einheit für die ersten Differenzen der Function fx sind, so sind ihre Quadrate es für die zweyten Differenzen, ihre Cubi für die dritten u. s. f. Ohne

die Annahme einer beständigen Differenz findet keine bestimmte Vergleichung der höhern Differenzen Statt.

Die zweyte Differenz von fx dividirt durch das Quadrat der unveränderlichen Differenz von x (oder einer andern, wovon x eine Function ist) ist im Allgemeinen eine endliche Größe, als Gränze jenes Quotienten; eben so die dritte Differenz von fx dividirt durch den Cubus der unveränderlichen Differenz; so auch die vierte Differenz von fx dividirt durch das Biquadrat der letztern, u. s. f.

Auch sind $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x . \Delta z}$; $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2 . \Delta z}$; $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x . \Delta^2 z}$, im Allgemeinen endliche Quotienten. Denn der erste kann angesehen werden als das Product $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta z}$; der zweyte als das Product $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta z}$; der dritte als das Product $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} \cdot \frac{\Delta x^2}{\Delta^2 z}$. So auch bey Quotienten höherer Ordnungen. Ein Product von Differenzen, deren Ordnungszahlen die Summe m geben, gehört zu derselben Ordnung mit $\Delta^m z$, oder zu dem mten, und der Quotient $\Delta^m z$ durch jenes Product dividirt, ist im Allgemeinen eine endliche Größe.

46. Exempel. Es sey $z = x^4$, und $\Delta x = \text{const.}$ Setzt man $\Delta x = u$, so ist

$$\Delta z = 4x^3 u + 6x^2 u^2 + 4 x u^3 + u^4$$
$$\Delta^2 z = 12 x^2 u^2 + 24 x u^3 + 14 u^4$$
$$\Delta^3 z = 24 x u^3 + 36 u^4$$
$$\Delta^4 z = 24 u^4$$
$$\Delta^5 z = 0$$

Das erste Glied jeder dieser Differenzen durch die zugehörige Potenz von u dividirt, giebt die Quotienten p, q, r, s, in (17.), so daß nach der Formel daselbst

$$(x+u)^4 = x^4 + 4 x^3 u + 6 x^2 u^2 + 4 x u^3 + u^4,$$

wie nach dem binomischen Lehrsatze.

47. Exempel. Es sey $z = xy$, und es bleibe unbestimmt, ob von x oder y die Differenzen unveränderlich sind. Es ist

$$\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y.$$

Setzt man $x + \Delta x$ für x; $y + \Delta y$ für y; $\Delta x + \Delta^2 x$ für Δx; $\Delta y + \Delta^2 y$ für Δy, oder multiplicirt man die Differenz jedes Factors in den andern Factor, und die Differenzen selbst in einander, so ist die zweyte Differenz

$$\begin{aligned}\Delta^2 z = {} & y\Delta^2 x + 2\Delta y \Delta x + \Delta^2 y . x \\ & + 2\Delta y \Delta^2 x + 2\Delta^2 y \Delta x \\ & + \Delta^2 y \Delta^2 x\end{aligned}$$

Hieraus wird auf dieselbe Art erhalten

$$\begin{aligned}\Delta^3 z = {} & y\Delta^3 x + 3\Delta y \Delta^2 x + 3\Delta^2 y \Delta x + \Delta^3 y . x \\ & + 3\Delta y \Delta^3 x + 6\Delta^2 y \Delta^2 x + 3\Delta^3 y \Delta x \\ & + 3\Delta^2 y \Delta^3 x + 3\Delta^3 y \Delta^2 x \\ & + \Delta^3 y \Delta^3 x.\end{aligned}$$

Man bemerkt hier leicht das Gesetz, nach welchem die Differenzen der verschiedenen Ordnungen mit einander verbunden werden, und in den Abschnitten der Differenz von z auf einander folgen, wie auch das Gesetz, der numerischen Coefficienten.

VII. Allgemeine Formeln für die Anfangsglieder der Differenzreihen.

48. Eine Function von x sey fx, und $\frac{\partial fx}{\partial x} = \alpha$; $\frac{\partial^2 fx}{2\partial x^2} = \beta$; $\frac{\partial^3 fx}{6\partial x^3} = \gamma$; $\frac{\partial^4 fx}{24\partial x^4} = \delta$; $\frac{\partial^5 fx}{120\partial x^5} = \varepsilon$; etc. Nun ist

$$fx = fx$$
$$f(x+u) = fx + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$f(x+2u) = fx + 2\alpha u + 4\beta u^2 + 8\gamma u^3 + 16\delta u^4 + 32\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$f(x+3u) = fx + 3\alpha u + 9\beta u^2 + 27\gamma u^3 + 81\delta u^4 + 243\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
etc. etc.

Es ist klar, daß die numerischen Coefficienten in den Anfangsgliedern der Differenzreihen von den successiven Werthen der Function, oder in Δfx, $\Delta^2 fx$, $\Delta^3 fx$, etc. einerley sind mit den Anfangsgliedern der Differenzreihen von den Potenzen der natürlichen Zahlen mit Einschluß der Null, nach ihrer Ordnung genommen. Nämlich

$$\Delta fx = \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^2 fx = 2\beta u^2 + 6\gamma u^3 + 14\delta u^4 + 30\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^3 fx = 6\gamma u^3 + 36\delta u^4 + 150\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^4 fx = 24\delta u^4 + 240\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^5 fx = 120\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$

49. Kann man nun zwey Werthe einer Function für die zugehörigen x, nebst den Differentialquotienten berechnen, so kann man zwischen jenen Werthen sehr leicht so viele Glieder als man will, einschalten.

50. Exempel. Es sey $fx = \sin\varphi$, und $f(x+u) = \sin(\varphi+\omega)$, so ist $x = \varphi$; $u = \omega$; und $\alpha = \cos\varphi$; $\beta = -\frac{1}{2}\sin\varphi$; $\gamma = -\frac{1}{6}\cos\varphi$; $\delta = +\frac{1}{24}\sin\varphi$; $\varepsilon = +\frac{1}{120}\cos\varphi$; etc. Dadurch ist

$$\Delta \sin\varphi = \cos\varphi \,.\, \omega - \frac{1}{2}\sin\varphi \,.\, \omega^2 - \frac{1}{6}\cos\varphi \,.\, \omega^3$$
$$+ \frac{1}{24}\sin\varphi \,.\, \omega^4 + \frac{1}{120}\cos\varphi \,.\, \omega^5 - \text{etc.}$$

$$\Delta^2 \sin\varphi = - \sin\varphi \,.\, \omega^2 - \cos\varphi \,.\, \omega^3 + \frac{7}{12}\sin\varphi \,.\, \omega^4$$
$$+ \frac{1}{4}\cos\varphi \,.\, \omega^5 - \text{etc.}$$

$$\Delta^3 \sin\varphi = - \cos\varphi \,.\, \omega^3 + \frac{3}{2}\sin\varphi \,.\, \omega^4 + \frac{5}{4}\cos\varphi \,.\, \omega^5$$
$$- \text{etc.}$$

$$\Delta^4 \sin\varphi = + \sin\varphi \,.\, \omega^4 + 2\cos\varphi \,.\, \omega^5 - \text{etc.}$$
$$\Delta^5 \sin\varphi = + \cos\varphi \,.\, \omega^5 - \text{etc.}$$
etc.

Z. B. Es sey $\varphi = 42$ Centesimalgrade, und $\omega = 1'$, nach derselben Eintheilung, so daß $\omega = \frac{\pi}{20000}$. Aus der Einleitung zu Hoberts und Idelers Tafeln, S. L, oder Callets Tafeln ist

$$l \sin\varphi = 9{,}\ 78739\ 46195 - 10$$
$$l \cos\varphi = 9{,}\ 89771\ 22994 - 10$$

Ferner ist

$$l\pi = 0{,}\ 49714\ 98727$$
$$l2 \,.\, 10^4 = 4{,}\ 30102\ 99957$$
$$l\omega = 6{,}\ 19611\ 98770 - 10$$
$$l\omega^2 = 2{,}\ 39223\ 97540 - 10$$

Mit Hülfe dieser Logarithmen wird gefunden

$$\cos\varphi \,.\, \omega = 0{,}000124\ 117259$$
$$\cos\varphi \,.\, \omega^3 = 0{,}\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots 3$$
$$\sin\varphi \,.\, \omega^2 = 0{,}\ \ldots\ldots\ .15123$$

Daraus ist für die Winkel 42°; 42° 1'; 42° 2'; etc.

$$\Delta \sin 42^\circ = + 0{,}000124\ 109698$$
$$\Delta^2 \sin 42^\circ = - 0{,}000000\ 015126$$
$$\Delta^3 \sin 42^\circ = - 0{,}\ldots\ldots\ \ldots\ldots 3$$

übereinstimmig mit der Tafel der Differenzen a. a. O. S. XXIX, die daselbst auf 28 Decimalstellen berechnet sind, allein auf eine mühsame Art, nicht durch eine allgemeine Formel.

51. Exempel. Es sey $f\,x = \log.\text{nat.}\sin\varphi$, und $f(x+u) = \log.\text{nat.}\sin(\varphi+\omega)$, so ist $x = \varphi$; $u = \omega$, und $\alpha = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$; $\beta = -\frac{1}{2\sin\varphi^2}$; $\gamma = +\frac{\cos\varphi}{3\sin\varphi^3}$; $\delta = -\frac{2+\cos 2\varphi}{12\sin\varphi^4}$; $\varepsilon = +\frac{(5+\cos 2\varphi)\cos\varphi}{30\sin\varphi^5}$; etc.

Verlangt man die gemeinen tabularischen Logarithmen, so müssen die Differenzen mit dem Modulus des tabularischen Systems multiplicirt werden. Dieser ist

$$M = 0{,}4342944819\ldots \text{ und}$$
$$\log M = 9{,}6377843114 - 10.$$

Z. B. $\varphi = 42^\circ$ Centesimale; $\omega = 10' = \frac{\pi}{2000}$.

Es ist

$$M.\alpha\omega = 0{,}000879\ 471698$$
$$M.\beta\omega^2 = - 0{,}000001\ 426280$$
$$M.\gamma\omega^3 = + 0{,}\ldots\ldots\ \ldots 192553$$
$$M.\delta\omega^4 = - 0{,}\ldots\ldots\ \ldots\ldots 355$$
etc.

Hieraus ist für die Winkel 42°; 42° 10′; 42° 20′; etc.

$$\Delta \log.\sin 42^\circ = + 0{,}000878\ 047341$$
$$\Delta^2 \log.\sin 42^\circ = - 0{,}000002\ 841056$$
$$\Delta^3 \log.\sin 42^\circ = + 0{,}\ldots\ldots\ .11427$$
$$\Delta^4 \log.\sin 42^\circ = - 0{,}\ldots\ldots\ \ldots 84$$

Diese Differenzen stimmen zu den aus Callets Tafeln hergeleiteten, ganz genau, oder mit dem Unterschiede eines Einers in der letzten Ziffer. Es ist

$$\sin 42° = 0,612907\,053652$$

$$l\sin 42° = 9,787394\,619467$$

Mit diesen und den gefundenen Anfangsgliedern der Differenzreihen lassen sich für die folgenden Winkel die natürlichen oder logarithmischen Sinus finden.

VIII. Umgekehrte Differenzen-Rechnung.

52. Bey der umgekehrten Differenzenrechnung ist es die Frage, aus einer Function von x, welche die Differenz einer andern Function von x ist, diese letztere zu finden. In manchen Fällen dienen zu der Auflösung dieser Aufgabe die Differenzen, die aus allerhand Functionen von x hergeleitet sind. In vielen Fällen aber ist die Aufgabe nicht anders aufzulösen, als daß die Differenz in eine Reihe verwandelt wird, wodurch die ihr zugehörige Function auch nur in der Form einer nicht abbrechenden Reihe erhalten wird. Es ist ein solcher Fall, der in der Integralrechnung auch häufig vorkommt. Bey Differenzen mit zwey veränderlichen Größen muß die Bedingung in (42) erfüllt seyn.

53. Die Function fx nenne man die integrirende Function in Absicht auf ihre Differenz Δfx. Es sey nämlich A der Werth der Function für $x = a$, und Q ihr Werth für $x = q$, so ist $Q - A$ das Aggregat aller Differenzen, die zwischen A und Q fallen. Ist $A = 0$, und sind alle Differenzen gleichnamig, so ist Q die Summe aller Differenzen zwischen den successiven Werthen von fx, von 0 bis Q.

Wegen der Anwendung auf die Summirung der Reihen, und zur Erleichterung der Untersuchung, wollen wir $\Delta x = 1$ setzen.

54. Es sey z eine Function von x, und $\Delta z = x$, man sucht z. Weil diese Differenz ein Theil von $\Delta . x^2$ ist, so setze man $z = ax^2 + bx + c$, nach der Methode der unbestimmten Coefficienten. Dadurch ist . . . .

$\Delta z = 2ax + a + b$. Die Vergleichung mit dem gegebenen Werthe von Δz giebt, $a = \frac{1}{2}$; und $a + b = 0$, also $b = -\frac{1}{2}$, und die integrirende Function . . . $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$. Die Größe c ist im Allgemeinen unbestimmt. In dem Unterschiede zwischen z und $z + \Delta z$ hebt sich c, welches in beiden enthalten ist.

55. Es sey $\Delta z = x^2$. Wie vorher setze man $z = ax^3 + bx^2 + cx + d$, so ist $\Delta z = 3ax^2 + (3a + 2b)x + a + b + c$. Die Vergleichung mit $\Delta z = x^2$ giebt $3a = 1$; $3a + 2b = 0$; $a + b + c = 0$. Daraus wird die integrirende Function $z = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x \pm d$, oder $z = x(x-1)(2x-1) + d$.

56. Ist $\Delta z = x^3$, so ist

$$z = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \text{Const.}$$
$$= \frac{1}{4}x^2(x-1)^2 + \text{Const.}$$

57. Ist $\Delta z = x^4$, so ist

$$z = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x \pm \text{Const.}$$
$$= \frac{1}{30}x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1) + \text{Const.}$$

58. Es sey $\Delta z = (mx + a)(mx + m + a)$, so ist aus (10.),

$$z = \frac{1}{3m}(mx - m + a)(mx + a)(mx + m + a)$$

Ist $\Delta z = (mx + a)(mx + m + a)(mx + 2m + a)$, so ist

$$z = \frac{1}{4m}(mx - m + a)(mx + a)(mx + m + a)$$
$$\times (mx + 2m + a),$$

wo die Const. nach den Umständen beyzufügen ist.

59. Es sey $\Delta z = -\frac{1}{(mx+a)(mx+m+a)}$,

so ist $z = \frac{1}{m(mx+a)}$.

Ist $\Delta z = -\frac{1}{(mx+a)(mx+m+a)\ldots(mx+rm+a)}$, so ist

$$z = \frac{1}{rm(mx+a)(mx+m+a)\ldots(mx+(r-1)m+a)}.$$

60. Es sey $\Delta z = \frac{1}{x.x+2.}$. Diesen Bruch zerlege man in die beiden, $\frac{A}{x.x+1} + \frac{B}{x.x+1.x+2.}$.

Man bringe jenen Bruch und diese auf gleiche Nenner, so geben die Zähler die Gleichung,

$$x + 1 = A(x+2) + B.$$

Hieraus wird erhalten, $A = 1$; $2A + B = 1$; also $B = -1$, und es ist

$$\frac{1}{x.x+2.} = \frac{1}{x.x+1} - \frac{1}{x.x+1.x+2.}.$$

Folglich ist aus (59.)

$$z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x.x+1.}.$$

61. Es sey $\Delta z = \frac{1}{x.x+3.}$. Diesen Bruch zerlege man in die drey Brüche,

$$\frac{A}{x.x+1.} + \frac{B}{x.x+1.x+2.}$$
$$+ \frac{C}{x.x+1.x+2.x+3.},$$

Die Reduction auf denselben Nenner giebt mittelst der Zähler die Gleichung,

$\overline{x+1}.\overline{x+2}. = A.\overline{x+2}.\overline{x+3}. + B.\overline{x+3}. + C$,

das ist

$x^2 + 3x + 2 = Ax^2 + (5A+B)x + 6A + 3B + C$.

Die Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten giebt, $A = 1$; $B = -2$; $C = +2$, so daß

$$\frac{1}{x.\overline{x+3}.} = \frac{1}{x.\overline{x+1}.} - \frac{2}{x.\overline{x+1}.\overline{x+2}.} + \frac{2}{x.\overline{x+1}.\overline{x+2}.\overline{x+3}.}.$$

Daraus folgt

$$z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x.\overline{x+1}.} - \frac{2}{3x.\overline{x+1}.\overline{x+2}.}.$$

Hieraus erhellt, wie die integrirende Function von $\frac{1}{x.\overline{x+n}.}$ gefunden wird, wenn n eine ganze Zahl ist.

62. Man nehme die Winkel, $\varphi - \alpha$; φ; $\varphi + \alpha$; und mehrere auf beiden Seiten von φ in arithmetischer Progression, so ist (Goniometrie, 28.)

$$\sin\varphi - \sin(\varphi - \alpha) = 2\cos(\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha;$$

$$\sin(\varphi + \alpha) - \sin\varphi = 2\cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Die zweyte Gleichung entsteht aus der erstern, wenn $\varphi + \alpha$ für φ gesetzt wird. Setzt man die Differenz in der erstern $= z$, die in der zweyten $= z + \Delta z$, so ist

$$\Delta z = -4\sin\varphi.\sin\tfrac{1}{2}\alpha.\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= -2(1 - \cos\alpha)\sin\varphi.$$

63. Ferner ist

$$\cos\varphi - \cos(\varphi - \alpha) = -2\sin(\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha;$$

$$\cos(\varphi + \alpha) - \cos\varphi = -2\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Setzt man die Differenz in der erstern Gleichung $= z$, die in der andern $= z + \Delta z$, so ist

$$\Delta z = -4 \cos\varphi . \sin \frac{1}{2} \alpha . \sin \frac{1}{2} \alpha$$

$$= -2 (1 - \cos\alpha) \cos\varphi .$$

64. Ist $\Delta z = \sin\varphi$, so ist z eine Summe von Sinus, deren Winkel in arithmetischer Progression sind, und diese integrirende Function ist

$$z = \frac{-\sin\varphi + \sin(\varphi - \alpha)}{4 \sin \frac{1}{2} \alpha^2},$$

wo im Nenner auch $2(1 - \cos\alpha)$ gesetzt werden kann.

65. Ist $\Delta z = \cos\varphi$, so ist

$$z = \frac{\cos(\varphi - \alpha) - \cos\varphi}{4 \sin \frac{1}{2} \alpha^2}.$$

IX. Anwendung auf die Summirung der Reihen.

66. Es seyn y und Δy Functionen von x, wenn $\Delta x = 1$ gesetzt wird. Man bezeichne die Werthe der Function y, welche den Werthen $0, 1, 2, 3 \ldots x - 1, x, x + 1$, von x zugehören, durch $y,0$; $y,1$; $y,2$; $y,3 \ldots y,(x-1)$; y,x; $y,(x+1)$, wo x einen unbestimmten Werth der Functionalgröße, und y,x die dazu gehörige Function bedeutet. Die Differenzen der letztern bezeichne man durch $\Delta y,0$; $\Delta y,1$; $\Delta y,2$; . . . $\Delta y, x-1$; $\Delta y, x$; $\Delta y, x+1$; so daß

$$y,1 - y,0 = \Delta y,0$$
$$y,2 - y,1 = \Delta y,1$$
$$y,3 - y,2 = \Delta y,2$$
$$\vdots$$
$$y,(x-1) - y,(x-2) = \Delta y,(x-2)$$
$$y,x - y,(x-1) = \Delta y,(x-1)$$
$$y,(x+1) - y,x = \Delta y, x .$$

Hieraus erhellet, daß $y,(x+1)-y\,o$, die Summe der Differenzen von $\Delta y,\,o$ bis $\Delta y,\,x$ ist. Die Größe y,o ist eine Constans oder auch Null.

67. Eine Reihe von Größen, die durch eine Function von x gegeben werden, zu summiren, sehe man diese Function als die Differenz einer andern Function von x an, und suche diese, nach der vorher gegebenen Anleitung, wenn solches möglich ist. In derselben setze man $x+1$ für x, und dann auch $x=o$, so ist die gesuchte Summe gleich der Function von $(x+1)$, vermindert um die Constans, die der Werth der Function für $x=o$ ist. Die Summe begreift die Glieder, deren Stellen $o, 1, 2, 3 \ldots x$ sind. Auf ähnliche Art findet man die Summe der Glieder, deren erstes durch irgend einen bestimmten Werth von x bezeichnet wird.

68. Wenn die Reihe der durch y bezeichneten Werthe eine durchgehends abnehmende ist, so sind die Differenzen negativ; oder wenn diese als positive betrachtet werden, so ist die summirende Function negativ. Nehmen jene Werthe ohne Ende ab, so daß für ein unendliches x der Werth der Function $=o$ ist, so ist das Anfangsglied, y,o, (für $x=o$) die Summe aller Glieder der zu summiren vorgegebenen Reihe, absolut genommen.

69. Die Summe der ganzen unendlichen abnehmenden Reihe sey $=A$, die Summe der Glieder von dem in der Stelle o, bis zu dem in der Stelle x, sey Y, so ist $A-Y$ die Summe aller übrigen. Hieraus sieht man, was die Negation der integrirenden Function bedeutet. Sieht man die Differenz in einer abnehmenden Reihe als positiv an, so findet man eigentlich die Summe der Glieder von dem in der Stelle x bis zu dem unendlich entfernten verschwindenden. Nimmt man aber statt dieser Summe die von dem Anfangsgliede bis zu jenem in der Stelle x, so findet man für diese den Werth $-Y$, welches anzeigt, daß man die Summe Y von dem Anfangsgliede abzuziehen habe, und die Summe der ganzen Reihe, nämlich A, ist die Constans.

70. Die Function $y, (x+1)$, nenne man die **summatorische Function** zu der Function $\Delta y, x$. So fern jene Function als eine Summe angesehen wird, ist x eine Zahl, die sich auf $\Delta x = 1$ als ihre Einheit bezieht. Ist x eine benannte Größe (Linie, Fläche, Zeit, u. m.), so ist Δx die Einheit zu dieser Gattung. Alsdann setze man $\frac{x}{\Delta x} = u$, oder behalte x als eine Zahlgröße, mit der Benennung ihrer Einheit, und verfahre eben so bey andern benannten Größen.

71. Die summatorische Function wird durch den vorgesetzten Buchstab S oder Σ bezeichnet, folgendergestalt $S.\Delta y$, oder $\Sigma.\Delta y$, wo Δy das Glied einer Reihe in der Stelle x ist, und durch eine Function von x gegeben wird.

72. Exempel. I. Die Summe der Cuborum der natürlichen Zahlen von 0 bis x zu finden. — Man setze $\Delta y = x^3$, so ist $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2$, aus (56.). Setzt man hier $x+1$ für x, so ist

$$S.x^3 = \frac{1}{4}(x+1)^2 x^2.$$ Die Const. ist hier $= 0$.

Weil die integrirende Function die Summe bis zu dem Gliede $(x-1)^3$ giebt, so addire man zu jener noch das letzte Glied x^3, und es ist $S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$.

73. Exempel. II. Die Summe der Biquadrate der natürlichen Zahlen von 0 bis x zu finden. — Man setze $\Delta y = x^4$, so ist $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$, aus (57.). Setzt man in dieser Function $x+1$ für x, oder addirt x^4, so ist $S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$.

oder $S. x^4 = \frac{1}{30} x(x+1)(2x+1)$
$(3x^2+3x-1)$.

Vergl. arithm. Reihen höherer Ordn. S. 201.

74. Exempel. III. Die Summe der Producte, $1.2+2.3+3.4 \ldots + x(x+1)$, oder der doppelten Triangularzahlen zu finden. — In (58.) setze man $a=0$, und $m=1$, so daß $\Delta y = x(x+1)$ sey. Dadurch ist $y = \frac{1}{3}(x-1)x(x+1)$. Setzt man in dieser Function $x+1$ für x, so erhält man $S.x(x+1)$ $= \frac{1}{3} x(x+1)(x+2)$. Dieser Werth wird $=1.2$ für $x=1$, wie es seyn muß, daher Const. $=0$ ist. Das durch $y,0$ in (66.) bezeichnete Glied ist hier $=0$, daher braucht man keine Constans, auch wenn man die Reihe mit 1.2 für $x=1$, anfängt.

75. Exempel IV. Die Summe der Producte, $1.3 + 3.5 \ldots + (2x+1)(2x+3)$ zu finden. — In (58.) setze man $m=2$; $a=1$, so ist $\Delta y =$ $(2x+1)(2x+3)$, und $y = \frac{1}{6}(2x-1)(2x+1)$ $(2x+3)$. In dieser Function werde $x+1$ für x gesetzt, so ist $S.(2x+1)(2x+3) = \frac{1}{6}(2x+1) \times$ $(2x+3)(2x+5) + \text{Const.}$ Für $x=0$ ist die Summe das erste Glied, 1.3; also ist $1.3 = \frac{1}{6}.1.3.5 + C.$ und Const. $= \frac{1}{2}$, so daß $S.(2x+1)(2x+3)$ $= \frac{1}{6}(2x+1)(2x+3)(2x+5) + \frac{1}{2}$.

76. Exempel. V. Die Summe der Producte $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 \ldots + x(x+1)(x+2)$ ist $= \frac{1}{4} x(x+1)(x+2)(x+3)$.

77. Exempel. VI. Die Summe der Producte $1.4.7 + 4.7.10 \ldots + (3x+1)(3x+4)(3x+7)$ ist $= \frac{1}{12}(3x+1)(3x+4)(3x+7)(3x+10)$

$+ \frac{14}{3}$.

78. Exempel. VII. Die Summe der Quotienten $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} \ldots + \frac{1}{x(x+1)}$ ist $= \frac{x}{x+1}$. — Denn in (59.) setze man $m = 1$; $a = 0$, so ist die integrirende Function $= -\frac{1}{x}$, und daher

$S. \frac{1}{x(x+1)} = \text{Const.} - \frac{1}{x+1}$. Für $x = 1$ ist $\frac{1}{1.2} = \text{Const} - \frac{1}{2}$, also Const. $= 1$, und die Summe $= 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. Die Gränze, welcher sich die Summe immer mehr nähert, je größer x genommen wird, ist $= 1$, oder die Const. (s. 69.).

79. Die Summe der Quotienten $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ ist $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(x+1)(x+2)}$. Die Gränze der Summe ist $= \frac{1}{4}$

80. Die Reihe der Sinus der Vielfachen von dem Winkel α,

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha \ldots + \sin n\alpha,$$

zu summiren, setze man $\sin n\alpha = \Delta y$. Aus (64.) ist, wenn daselbst $\varphi = n\alpha$ gesetzt wird,

$$y = \frac{-\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

In diesem Ausdruck setze man $(n+1)\alpha$ für $n\alpha$, weil hier $n\alpha$ für x in (66 u. 67.) steht. Nun ist, mit Beyfügung der Constans, welches am bequemsten in dem Zähler des Bruches geschieht,

$$\Sigma.\sin n\alpha = \frac{-\sin(n+1)\alpha + \sin n\alpha + \text{Const.}}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Für $n = 0$ ist die Summe $= 0$, also Const. $= \sin\alpha$. Oder auch für $n = 1$ ist die Summe $= \sin\alpha$. Also ist

$$\frac{-\sin 2\alpha + \sin\alpha + \text{Const.}}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2} = \sin\alpha, \text{ oder}$$

$$C + \sin\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha)\sin\alpha,$$

welches ebenfalls $C = \sin\alpha$ giebt. Solchergestalt ist

$$\Sigma.\sin n\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Da $\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha = 2\cos(n+\frac{1}{2})\alpha.\sin\frac{1}{2}x$, und $\sin\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\alpha\,\sin\frac{1}{2}\alpha$ ist, so ist der Zähler dieses Bruchs $= 2\,(\cos\frac{1}{2}\alpha - \cos)\,(n+\frac{1}{2})\,\alpha(\sin\frac{1}{2}\alpha = 4\sin\frac{1}{2}\,(n+1)\,\alpha.\sin\frac{1}{2}n\alpha.\sin\frac{1}{2}\alpha$, also

$$\Sigma.\sin n\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha.\sin\frac{1}{2}n\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

81. Die Reihe der Cosinus der Vielfachen von α,

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \;\ldots\; + \cos n\alpha,$$

zu summiren, setze man $\cos n\alpha = \Delta y$, so ist aus (65.)

$$y = \frac{\cos(n-1)\alpha - \cos n\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Daraus ist, auf ähnliche Art, wie für die Sinus,

$$\Sigma.\cos n\alpha = \frac{-1 + \cos\alpha + \cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Verwandelt man den Zähler in ein Product, so ist derselbe zuerst $= 2(\sin(n+\frac{1}{2})\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha$; und ferner $= 4\cos\frac{1}{2}(n+1)\alpha.\sin\frac{1}{2}n\alpha.\sin\frac{1}{2}\alpha$.

Also ist

$$\Sigma.\cos n\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(n+1)\alpha.\sin\frac{1}{2}n\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

X. Geschichte der Differenzenrechnung.

In der methodischen Anordnung der mathematischen Untersuchungen muß die Differenzenrechnung vor der Differentialrechnung vorangehen. Die letztere ist aber früher bearbeitet worden als jene. Die geometrischen Fragen über berührende der Curven, ihre Quadraturen, Cubaturen, Rectificationen, größte und kleinste Ordinaten, u. m. führten auf verschwindende Differenzen. Diese Fragen waren im 17ten Jahrhundert die interessantesten. Entwickelungen einer Function durch Potenzen der Veränderung der Functionalgröße setzen schon höhere analytische Untersuchungen voraus, um Bedürfniß zu werden. Summirungen von Reihen bewerkstelligte man auf diese oder jene Art, ohne auf den leichtesten Weg, durch Betrachtung der Differenzen, zu gerathen. Inzwischen hat Leibnitz mit systematischem Scharfsinn sich den Weg zur Differentialrechnung durch die endlichen Differenzen gebahnt. In einem Briefe an den Abbé Conti erzählt er, daß er anfangs die Mathematik nur als Nebensache getrieben, und sich um manche in der Zeit seiner Jugend merkwürdige neue Untersuchungen nicht bekümmert habe. Aber die Eigenschaften der Zahlen zu entdecken, habe ihm Vergnügen gemacht, wie seine frühzeitige Abhandlung über die Combinationen vom J. 1666 bezeuge. Bald habe er die Anwendung der Differenzen auf Summirungen gefunden, und sie bey Zahlenreihen gebraucht. Weiterhin sey er endlich auf seine Differentialrechnung gekommen, wobey ihm insbesondere seine frühern Bemerkungen über die Unterschiede der Zahlenreihen die Augen geöffnet hätten. Denn nicht durch die Fluxionen der Linien, sondern durch die Unterschiede der Zahlen sey er dazu gelangt, vermittelst der Bemerkung, daß diese Unterschiede auf stetige Größenreihen angewandt, verschwinden, in Vergleichung der

Größen, wovon sie die Unterschiede sind, dagegen sie in den Zahlenreihen als eigentliche Größen bleiben. Ich glaube, setzt er hinzu, daß dieser Weg ganz analytisch ist, da die geometrische Differenzenrechnung, welche mit der Fluxionenrechnung einerley ist, nur einen besondern Fall der allgemeinen analytischen Differenzenrechnung ausmacht, der durch die verschwindenden Größen leichter wird, als der mit endlichen Differenzen.

Die Verbindung zwischen der endlichen Differenzenrechnung und der Differentialrechnung kann nicht besser dargestellt werden, als es hier von Leibnitz schon geschehen ist. Man erkennt daraus seinen scharfen spähenden Blick in unbekannte Gegenden der Wissenschaft, und erhält daher einen hinreichenden Beweis, daß er die Differentialrechnung durch sich selbst gefunden habe.

Newtons Methodus differentialis, die 1711 zuerst gedruckt worden, enthält, wie oben S. 216 angezeigt ist, nur Methoden zum Einschalten, mittelst der successiven Differenzen gegebener Glieder einer Reihe. Die erste Schrift, worin die Differenzenrechnung auf eine der Differentialrechnung analoge Art abgehandelt, und mit dieser in Verbindung gebracht ist, ist Methodus incrementorum directa et inversa, auctore *Brook Taylor*. Londini 1715 118 pag. 4, in zwey Abtheilungen, von welchen die zweyte die Auflösungen wichtiger mathematischer und physikalischer Aufgaben, größtentheils aber durch Infinitesimalrechnung enthält. Die Notation ist unbequem. Die Differenzen werden durch Puncte oder kleine Buchstaben, als Zahlzeichen, unter den Symbolen der veränderlichen Größen angedeutet. Die Anzahl der Puncte oder der Buchstab zeigen die Ordnung der Differenz an, eine Nachahmung von Newtons Bezeichnung der Differentiale, nach welcher Puncte über den Symbolen der veränderlichen Größen Differentiale andeuten. Durch Strichelchen über und unter den Buchstabenzeichen werden die auf einander folgenden Glieder einer Reihe angegeben. Der Vortrag in dieser Schrift ist durch Bezeichnung und Kürze nicht leicht faßlich. Doch ist sie wegen der neuen Methode wohl

werth, daß man sie durchgehe, wenn man mit den Materien schon bekannt ist. Die Formel in (16.) für die Entwickelung der Function, $f(x+u)$, ist darin der 7te Satz. Sie ist daselbst aus denselben Gründen, wie hier geschehen ist, hergeleitet, nämlich aus der Formation einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung durch die Anfangsglieder der Differenzreihen. Taylor nimmt nur die Stellenzahl des entwickelten Gliedes für eine ganze. Die wichtige Formel in (17.) ist bey Taylor das zweyte Corollarium des 7ten Satzes. Er findet sie unmittelbar dadurch, daß er die Incremente als verschwindend betrachtet, und nun für sie die ihnen proportionalen Fluxionen (Differentiale) setzt. Dadurch werden in unserer Formel die Factoren u, $u-\Delta u$, $u-2\Delta u$, $u-3\Delta u$ etc. sich alle gleich, jeder $=u$, und die Coefficienten P, Q, R, etc. werden Differentialquotienten der successiven Ordnungen, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ etc. so daß der Satz bey Taylor die jetzt gewöhnliche Form, bis auf die Bezeichnungsart, hat. In dem 11ten Satze sind zwey Integrationsformeln für $\int y\,\partial x$ enthalten, die mit der Entwickelungsformel nichts gemein haben, als die Fortschreitung nach den successiven Differentialquotienten. Sie sind allgemeiner als eine ihnen ähnliche, welche Joh. Bernoulli schon im J. 1694 bekannt machte, und sie als die allgemeinste in ihrer Art angab. Denn in der Taylorschen Form läßt sich das constante Differential so wählen, daß die successiven Differentiationen möglichst einfach ausfallen, da in der Bernoullischen Form das constante Differential ein bestimmtes ist. Davon aber noch in den Integrationsmethoden. Die Formel wird in dem 12ten Satze noch auf Integrale höherer Ordnungen erweitert. In dem 13ten Satze, dem ersten der zweyten Abtheilung, wird gezeigt, wie aus einigen gleich weit abstehenden Gliedern einer Reihe ein anderes Glied durch seinen Abstand von einem der beiden äußersten Gliedern annähernd gefunden werde; in dem 14ten Satze, wie die Summe der Glieder aus dem

Gesetze der Formation hergeleitet wird, wenn es möglich ist. Dazu ist in der ersten Abtheilung durch Bemerkungen über die umgekehrte Differenzenrechnung Vorbereitung gemacht. Taylor lieferte darüber noch Nachträge in den englischen Transactionen. Die übrigen Sätze enthalten Anwendungen der Infinitesimal Differenzen.

Bald nach ihrer Erscheinung fand die Taylorische Schrift einen Commentator an Nicole, der in den Mém. de l' Acad. des Sc. 1717, 1723 und 1724, die Methode und ihre Anwendungen sehr gut erläuterte, allein nicht über die ersten Differenzen hinausgieng. Er zeigt, wie Reihen, deren Glieder Producte aus Factoren in arithmetischer Progression sind, summirt werden; auch, wie die Summe von Brüchen gefunden wird, deren Nenner zweytheilige Factoren von einer gewissen Form enthalten.

Jacob Stirling handelte die Differenzenrechnung ausführlich ab in der Schrift: Methodus differentialis: sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, Londini 1730, 153 pag. in 4. Es kommen darin feine und schwere Untersuchungen über die Summirung und solche Verwandlungen der Reihen vor, wodurch sie schneller convergirend gemacht werden. Merkwürdig sind die Methoden, aus der Relation der Differenzen das summatorische Glied in Gestalt einer unendlichen Reihe zu liefern, deren Glieder Brüche mit Factoren in arithmetischer Progression im Nenner sind. Auch zeigt Stirling, wie man, nachdem das summatorische Glied nahe gefunden ist, eine Ergänzung wiederum nahe, und zu dieser wieder eine Ergänzung fortschreitend finden könne.

Euler hat in den beiden ersten Kapiteln seiner Differentialrechnung (1755) die Rechnung mit endlichen Differenzen sehr lichtvoll vorgetragen. Er ist der erste, der die umgekehrte Methode der Differenzen ausführlich behandelte, wiewohl er doch bey Formeln mit einer veränderlichen Größe stehen blieb. Er macht den Übergang zu der Differentialrechnung mit der Bemerkung, daß die Analysis des Unendlichen nur ein besonderer Fall der Methode der Differenzen sey. Nur läßt er dadurch eine Dunkelheit oder giebt

Veranlassung zu Schwierigkeiten, daß er für die endlichen Differenzen unendlich kleine oder dem Nichts gleiche Veränderungen setzt.

Unter den Engländern hat noch Emerson, Verfasser vieler mathematischen Lehrbücher, im J. 1763 eine Schrift über die Differenzenrechnung (the method of Increments) herausgegeben, welche Hutton und la Lande sehr rühmen.

Bossüt hat in der Encyclopédie méthodique, diese Rechnung sehr deutlich in dem Artikel différences finies, vorgetragen, und hernach noch ausführlicher in der Einleitung zu seinen traités de Calcul différentiel et integral, à Paris, an VI. Auch hat Cousin in seinem traité de calcul différentiel et intégral (à Paris an IV. 1796. in 4.) in der Einleitung, Cap. 3. eine sehr gute nur kurze Übersicht dieser Lehre gegeben, und zu Ende des Werks höhere Untersuchungen über die Integration der Gleichungen mit endlichen Differenzen mitgetheilt.

In den deutschen Lehrbüchern der Mathematik ist die Untersuchung über die endlichen Differenzen der Functionen fast ganz vernachlässigt. Etwas findet man in Segners elementis Analyseos infinit. sect. 13, und 20. und in Pasquichs mathemat. Analysis, 1r. Th. 16ten Abschn. Segner macht dadurch eine Verwirrung, daß er eine Formel mit endlichen vollständigen Differenzen eine aequatio differentialis completa nennt, und die Differentialgleichungen als die unvollständigsten ansieht.

Zu diesen literarischen Bemerkungen füge ich noch die Nachrichten von den neuesten Bemühungen der französischen Analysten aus Montücla Geschichte der Mathem. 3 Th. 256. f. S. bey.

Die schwere Theorie der Integration von Gleichungen mit endlichen Differenzen zwischen mehrern veränderlichen Größen, die selbst Euler unberührt gelassen hat, ist von la Grange in dem ersten Bande der Turiner Abhandlungen (1759) vorgenommen worden. Er behandelt sie auf eine ähnliche Art wie die Differentialgleichungen dieser Gattung

und gelangt dadurch zu Integrationen endlicher Differenzen, die bis dahin auf keine Weise zu erhalten gewesen waren.

Condorcet unternahm über diese Differenzengleichungen eine ähnliche Bearbeitung, wie es von ihm mit den Differentialgleichungen geschehen war. In den Memoiren der Akademie vom J. 1770 lieferte er die Bedingungsgleichungen, welche zu erkennen geben, ob eine Gleichung mit endlichen Differenzen aus einer um einen Grad unmittelbar niedrigern entstanden seyn könne, und dann, wenn dieses möglich ist, sucht er die Mittel, diese Gleichung aus jener herzuleiten, wovon er auch einige Beyspiele beyfügt. Eine weitere Ausführung seiner Theorie theilte er in dem Jahrgange für 1771 mit. Freylich hat die Entdeckung jener Gleichung große Schwierigkeit, eben so wie in der eigentlichen Integralrechnung. Wenn man sieht, wie sehr verwickelte Differenzengleichungen auf die integrirenden gebracht werden, so möchte man fast glauben, daß diese schon zum voraus bekannt gewesen seyn. Viele Leser werden wünschen, daß Condorcet sein Verfahren deutlicher und ausführlicher entwickelt hätte. Aber er scheint nur für seines gleichen haben schreiben zu wollen.

Eine neue Erweiterung erhielt diese Rechnung durch la Place in zwey Abhandlungen, die in den Mém. présentés, T. 6. et. 7. enthalten sind. Darauf lieferte dieser große Analyst noch eine lange Abhandlung in den Memoiren der Akad. von 1773, über die linearischen Gleichungen mit endlichen Differenzen, worin die Frage ist, bey einer gegebenen linearischen Gleichung mit endlichen Differenzen, erstlich zu bestimmen, ob für sie ein Integral von einer gegebenen Form möglich sey, zweytens in dem Falle der Möglichkeit die Einrichtung so zu treffen, daß sie nach den Methoden bey Differentialgleichungen integrirt werden könne; bey welcher Gelegenheit eine Methode, die Euler angewandt hat, eine Differenz der zweyten Ordnung auf eine von der ersten zu bringen, erweitert und vollkommner gemacht wird. La Place zeigt zu-

gleich den großen Nutzen der Rechnung mit endlichen Differenzen in der Verbindung mit den partiellen Differentialen, da die Bestimmung der willkührlichen Functionen oft von der Integration der erstern abhängt

Diesen wichtigen, aber schweren Abhandlungen mag man noch eine beyfügen, welche Charles im J. 1783 der Akademie der Wissenschaften übergab. Man muß bedauern, daß ihr Verfasser so frühzeitig durch den Tod hingerafft ist.

Differentiale sind die Glieder des Verhältnisses der Veränderungen zweyer oder mehrerer zusammengehörigen Größen, so fern dieses Verhältniß nicht von der Quantität der Veränderungen, sondern bloß von den veränderlichen Größen abhängt. Nämlich, wenn zwischen zwey Größen, x, y, irgend eine Relation festgesetzt ist, und diese Größen um Δx und Δy sich verändern, so bleibt die Relation zwischen $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ dieselbe wie zwischen x und y, und das Verhältniß $\Delta x : \Delta y$ hängt theils von dieser Relation, theils von der willkührlich zu bestimmenden Quantität der Veränderungen ab. Betrachtet man das Verhältniß der Veränderungen von x und y nur bloß in Rücksicht auf die Bestimmung durch die Relation zwischen diesen Größen, so ist es ein Differentialverhältniß, und die Glieder desselben heißen Differentiale. So heißt auch der Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der von der Quantität der Veränderungen unabhängig ist, ein Differentialquotient. Das Differentialverhältniß für die Größen x, y wird bezeichnet durch $\partial x : \partial y$, und der Differentialquotient durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder $\frac{\partial x}{\partial y}$.

Es ist nöthig, das Differentialzeichen durch eine besondere Form des Buchstabens von dem Größenzeichen zu unterscheiden. In Frankreich, und in den neuern Abhandlungen der Petersburger Akademie, hat man dies angefangen,

und in diesem Wörterbuche wird das Differentialzeichen durch das gebogene ∂ ausgedruckt werden. Bis fast hierher ist in diesem Werke dafür das cursive *d* gebraucht.

Ein paar leichte Beyspiele werden dieses ganz deutlich machen. Es sey $yy = ax$, die einfachste Gleichung für die Parabel. Nun ist auch $(y + \Delta y)^2 = a(x + \Delta x)$. Zieht man jene Gleichung von dieser ab, so bleibt . . . $2y\Delta y + \Delta y^2 = a\Delta x$. (Wegen der Bezeichnung der Differenzen oder Veränderungen, sehe man den Artikel Differenz). Nun ist $\Delta x : \Delta y = 2y + \Delta y : a$. Das Verhältniß der Veränderungen hängt also theils von y, theils von Δy ab. Betrachten wir das Verhältniß, so fern es von y allein, und nicht zugleich von der Quantität, die man der Veränderung Δy giebt, abhängt, so ist es $= 2y : a$, und dieses wird zum Unterschiede von jenem durch $\partial x : \partial y$ bezeichnet, so daß $\partial x : \partial y = 2y : a$ ist.

Es sey $2ax - xx = yy$, die Gleichung für den Kreis, so ist $2a(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^2 = (y + \Delta y)^2$. Daraus ist $2a\Delta x - 2x\Delta x - \Delta x^2 = 2y\Delta y + \Delta y^2$, und

$$\Delta x : \Delta y = 2y + \Delta y : 2a - 2x - \Delta x.$$

Das Differentialverhältniß ist

$$\partial x : \partial y = y : a - x.$$

In beiden Beyspielen kann ∂x gegen ∂y unvergleichbar klein werden, wenn nämlich $y = 0$ gesetzt wird, in dem Anfangspuncte der Curve. Am Kreise ist ∂y gegen ∂x unvergleichbar klein, wenn $x = a$ genommen wird, wodurch $y = a$ wird.

Die Differentialverhältnisse sind von dem wichtigsten und ausgebreitetsten Nutzen Denn sie sind charakteristisch für die Relation der veränderlichen Größen, eben daher weil sie nicht von der willkührlichen Quantität der Veränderungen abhangen. Die Relation der Größen bestimmt ganz allein das für sie gehörige Differentialverhältniß, und dieses hinwiederum jene, bis auf die unveränderliche Größe, welche noch in die Gleichung zwischen

den Größen einzuführen seyn mag, eben so wie bey der Bestimmung derselben aus den endlichen Differenzen.

Dieses auf die allgemeinste Art vollkommen einzusehen, dient die in dem Artikel Differenzenrechnung (17.) gefundene Formel für die endliche Veränderung einer Function von x, wenn x sich um die Größe u ändert. Es ist $f(x+u)$ $-fx = pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \frac{1}{24}su^4 + \text{etc.}$ Der erste Theil der Gleichung bezeichnet die Veränderung der Function, der zweyte stellt ihren Werth durch die Veränderung u der Functionalgröße x dar. Man setze $fx = y$, und $u = \Delta x$, so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + \frac{1}{2}q\Delta x$ $+ \frac{1}{6}r\Delta x^2 + \frac{1}{24}s\Delta x^3 + \text{etc.}$ und p, als der von Δx, und dadurch auch von Δy, unabhängige Theil des Quotienten der Veränderungen, ist der Differentialquotient für die Function von x in Beziehung auf x. Nun ist eben so q der Differentialquotient für die Function p; ferner r der Differentialquotient für die Function q, u. s. f. (a. a. O. 18.) Demnach sind durch p die Functionen q, r, s, etc. bestimmt, und dadurch der Quotient der Differenzen Δy, Δx, und dadurch für jedes $x + \Delta x$ die zugehörige Veränderung $y + \Delta y y + \Delta y$. Folglich erhellt, wie die Function p charakteristisch ist für die Function von x, oder sie vollkommen, bis auf die Constante, welche allen Werthen der Function gemein ist, bestimme.

Diese Function p ist es, welche durch das Symbol eines Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet wird, so daß $\partial x : \partial y = 1 : p$ ist. Die Größenzeichen x, y zeigen die zusammengehörigen veränderlichen Größen an, von welchen y irgend eine Function der andern x ist. Das vorgesetzte

Buchstabenzeichen ∂ giebt bloß den Ursprung der Function $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ zu erkennen, daß sie der wesentliche und charakteristische Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der endlichen Veränderungen von x und y, ist.

Die Formel $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ ist keine abgekürzte. Was aus der Formel für die endlichen Differenzen weggelassen wird, wird nicht als Null, oder als unendlich klein, oder als unvergleichbar klein betrachtet, sondern es wird weggelassen, weil es gar nicht zu demjenigen gehört, was man durch das Symbol $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet. Es gehört zu der Bestimmung der Quantität der Veränderungen, von welcher in der Differentialrechnung so wenig die Frage ist, daß man vielmehr sorgfältig zu verhüten hat, sie als eine Rechnung über Quantität der Veränderungen oder Unterschiede betrachten zu lassen. Es ist hier ein ganz anderer Fall, als bey abgekürzten Formeln und Gleichungen. In solchen gehört das weggelassene wesentlich zu einer Größe, oder zu ihrer Relation gegen andere, allein es hat, unter gewissen Bedingungen keinen erheblichen Einfluß auf die Bestimmung ihrer Quantität, und wird bloß als minder wesentlich weggelassen. Um allen Mißverstand zu verhüten, sage man nicht, $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist gleich einer gewissen Function von x und y, sondern, $\frac{\partial y}{\partial x}$ zeigt eine Function von x und y an. Jenes kann die Vorstellung von einer besondern Größe erwecken, die in der Form noch von der Function unterschieden, und auf irgend eine andere Art gegeben oder angenommen wäre.

Die Symbole ∂x: ∂y heißen die Differentiale von x und y; allein man muß sie durchaus nicht als Größen betrachten, so klein man diese sich auch vorstellen möch-

ke. Denn dadurch setzt man eine Näherungsgleichung anstatt der genauen und vollständigen, welche noch die Potenzen von Δx enthält.

Darum sollte man genauer Weise im Singulari nicht sagen, das Differential, weil dieses eine Quantität auf versteckte Art in sich schließt. Ein Differential bezieht sich immer als Verhältnißglied auf ein anderes Differential. Inzwischen ist es zur Bequemlichkeit des Ausdrucks wohl vergönnt, durch Differential im Singulari eines der Glieder eines Differentialverhältnisses zu bezeichnen, eben so wie die Differentiale ihre einzelnen Symbole haben. Man kann nur nicht, wie bey endlichen bestimmbaren Größen, die Differentiale auf zweyerley Art ausdrücken, einmahl durch die ihnen beygelegte Quantität, das ist, durch ihr Verhältniß zur Einheit oder einer andern gegebenen Größe, und dann noch durch die ihnen proportionalen Größen, die ihr Verhältniß angeben.

Die Differentiale kann man auch nicht als Null betrachten, weil sie dadurch aufhören, Differenzen zu seyn, und weil es auch nicht begreiflich ist, wie eine Null sich mit einer andern Null vergleichen lasse. Ein Differential ist oft in Vergleichung mit einem andern Null, wie oben in den Beyspielen von der Parabel und dem Kreise angemerkt ist. Das Differential einer Function, deren Werth ein Größtes oder Kleinstes ist, ist für diesen Werth genau Null in Vergleichung mit dem Differential der Functionalgröße. Es gäbe also ein Null, das mehr Null wäre, als ein anderes Null es ist.

Um die Schwierigkeit, wie Differentiale weder etwas noch Null seyn können, zu lösen, gehe man auf den Ursprung derselben zurück. Es soll $\frac{\partial y}{\partial x}$ den charakteristischen Theils p des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der Veränderungen von y und x, bedeuten. Sollen ∂y und ∂x nicht bloße Buchstabenzeichen zur Bezeichnung des Ursprungs

der Function p seyn, so sind es keine Veränderungen der Größen x und y, sondern zwey zusammengehörige Größen, die mit jenen in eine gewisse Verbindung gebracht werden, wie die Coordinaten der eine Curve berührenden geraden mit den Coordinaten der krummen Linie. Die Quantität dieser nebenher eingeführten Größen bleibt willkührlich; nur ihr Verhältniß ist durch die Function p bestimmt. Oder man setze, da p eine bloße Zahlgröße ist, $p x = t$, so ist das Verhältniß $t : x$ gleich dem $\partial y : \partial x$, und man kann für die Differentiale die endlichen, ihnen proportionalen, t, x, nehmen. Neben den beiden entgegengesetzten Begriffen, Etwas und Nichts, giebt es noch einen Begriff, nämlich verhältnißmäßige Größen. Dieses wird durch die folgenden Betrachtungen noch deutlicher werden.

Aus der Formel für die endlichen Differenzen, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + \frac{1}{2} q \Delta x + \frac{1}{6} r \Delta x^2 +$ etc. erhellt, daß p die Gränze ist, welcher sich der Quotient der Differenzen immer mehr nähert, je kleiner sie genommen werden. Daher kann man Differentiale für die Glieder eines Gränzverhältnisses erklären, welchem sich das Verhältniß endlicher Veränderungen ohne Ende nähert. Diese Vorstellung ist in den neuern Zeiten die gewöhnlichste geworden. Doch mag es Schwierigkeit verursachen, sich ein Verhältniß verschiedener Größen vorzustellen, die weder Null noch Etwas seyn sollen. Man könnte auch an der Realität des Begriffs selbst zweifeln, weil man das Verhältniß nie erreichen zu können glauben möchte. Allein unsere Formel zeigt uns den Differentialquotienten p als einen ganz bestimmten Begriff. Man muß sich denselben nicht als einen terminum ad quem, den man nie ergreifen kann, sondern vielmehr als einen terminum a quo vorstellen. In der That hängen alle nach p folgende Theile des Differenzquotienten von p ab, und sind dadurch, wenn nämlich Δx bestimmt ist, gegeben. Bricht die Reihe der Functionen q, r, s, t, etc. nicht ab, so ist es der Quotient der endlichen Differenzen, welcher nie vollständig zu er-

halten steht, dem man sich nur nähern kann, dagegen der Differentialquotient durch p vollständig dargestellt wird.

Die Differentiale darf man sich auch als unendlich kleine Unterschiede vorstellen, und muß es selbst, wo man sich eine stetige Folge veränderlicher Größen gedenkt. Zwischen zwey Werthen einer Größe sind unendlich viele Mittelwerthe gedenkbar. In einer ununterbrochenen Folge veränderlicher Größen, die nach irgend einem Gesetze aus einer oder mehrern andern Größen bestimmt werden, muß man sich nicht bloß viele, sondern unendlich viele Glieder vorstellen. Denn zwischen noch so vielen Gliedern der Folge lassen sich immer mehrere einschieben. Es ist keine Gränze des Einschaltens vorhanden; die Reihe ist eine stetige oder continuirliche. Der Unterschied zwischen zwey nächsten Gliedern der stetigen Reihe ist keine endliche, mit einer Einheit vergleichbare Größe, weil dabey die Reihe nicht eine stetige wäre. Die Succession in der stetigen Reihe führt aber doch auf einen Unterschied der unmittelbar auf einander folgenden Glieder. Dieser Unterschied muß also unendlich klein genannt werden. Man nenne ihn aber, um Mißverstand zu vermeiden, nicht eine Größe, sondern nur etwas unendlich kleines, das bloß mit einem andern von derselben Beschaffenheit verglichen werden kann. Wir haben hier einen reinen Verstandesbegriff, der sich nicht sinnlich darstellen läßt, aber doch intellectuelle Realität hat. Die Differentiale sind die, bloß unter sich vergleichbaren Unterschiede der unmittelbar auf einander folgenden Glieder einer stetigen Reihe. Wie solche Unterschiede gedacht und verglichen werden können, zeigt unsere Differenzenformel sehr deutlich. Man kann in derselben $\Delta x = 0$ setzen, und es bleibt doch p für den Quotienten der Unterschiede, die also die unendlich kleinen in der stetigen Folge sind.

Die genaue und völlig einleuchtende Bestimmung des Begriffs der Differentiale, was man in Frankreich la Métaphysique du Calcul différentiel nennt, hat von Anfang an Schwierigkeit gemacht. Man rechtfertigte

die Weglassung der Potenzen der Differentiale dadurch, daß diese unendlich kleine Größen seyn, ohne doch zu zeigen, wie dieses Mittelding zwischen Null und Etwas gedenkbar sey, und wie man die Theilbarkeit und Vermehrbarkeit einer Größe, darauf anwenden könne. Darum verfaßte Maclaurin ein ausführliches, sehr tiefsinniges Werk, (A treatise of Fluxions, 1742. 2 vol. in 4.) worin er die Vorstellung von unendlich kleinen Größen ganz vermied, und nach der Methode der alten Geometer alle Sätze aus unbezweifelbaren Axiomen herleitete. Dieses Verfahren wird aber durch Weitläufigkeit beschwerlich. Die Berliner Akademie der Wissenschaften fand es noch im J. 1784 nöthig, eine deutliche und genau bestimmte Theorie des in der Mathematik so genannten Unendlichen zu einer Preisaufgabe zu machen. Sie verlangte, man solle zeigen, wie es möglich gewesen, aus einem Begriffe, den große Analysten für unstatthaft erklärt hätten, so viele richtige Lehrsätze herzuleiten; und wünschte, daß man ein sicheres, einleuchtendes Princip angeben möchte, das in die Stelle des Unendlichen gesetzt werden könnte, ohne die Untersuchungen zu lang und beschwerlich zu machen. L'Huilier in Genf erhielt den Preis. Die zweyte, vermehrte und verbesserte Ausgabe seiner Preisschrift ist unter dem Titel: Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, 1795, (368 S. 4.) herausgekommen. Es liegt darin der Begriff vom Gränzverhältnisse zum Grunde. Diese Schrift ist durch die Anwendungen der Infinitesimalrechnung sehr lehrreich.

Leibnitz, so sehr er Philosoph war, scheint doch nicht mit dem Begriff von Differentialen ganz aufs Reine gekommen zu seyn, oder wenigstens bedient er sich solcher Ausdrücke, die Erklärungen oder Einschränkungen bedürfen. In der Abhandlung, nova methodus pro maximis et minimis, etc. Acta Erud. Octobr. 1684, der ersten über die Differentialrechnung erschienenen, sagt er, man möge die Differentiale ∂x, ∂y den Differenzen oder augenblicklichen Zunahmen oder Abnahmen für proportional halten, erklärt aber nicht, was diese incrementa vel

decrementa momentanea seyn. In dem Aufsatze de motuum coelestium causis, A. E. 1689 gebraucht Leibnitz unendlich kleine Größen. Wenn man, sagt er, unendlich kleine Größen anzunehmen Bedenken trüge, so möchte man so kleine Größen, als man nur wolle, dafür setzen, nur so klein, daß der daraus entspringende Fehler unbedeutend, ja kleiner als jeder angebbare sey. Die Unterschiede unendlich kleiner Größen, setzt er hinzu, sind unendlichemahl unendlich klein, wie z. B. der Sinus versus eines unendlich kleinen Winkels. Es gebe unendlich viele Grade, sowohl des unendlich Großen, als des unendlich Kleinen. In der Observatio de vero sensu methodi infinitesimalis, A. E. 1712 vergleicht er das Endliche, das unendlich Große, und das unendlichemahl Unendliche mit dem Durchmesser eines Sandkörnchens, der Erde und des Sternhimmels, und umgekehrt eben so das Endliche, das unendlich Kleine und das unendlichemahl unendlich Kleine. Doch bemerkt er, daß wenn man zuletzt mit einem Sprunge das Unendliche selbst für solche Größen setze, man dadurch nur die Bequemlichkeit des Ausdrucks beabsichtige, ein breviloquium mentale; non nisi *toleranter vera* loquimur, quae explicatione rigidantur. In einer gegen Nieuwentyt gerichteten Schrift (A. E. 1695) sagt Leibnitz, daß er auch diejenigen Größen für gleich halte, deren Unterschied unendlich klein ist, und wenn ein solcher Unterschied zwar nicht ganz Null gesetzt werden könne, so sey er doch mit den Größen, wozu er gehört, nicht vergleichbar, wie wenn man einen Punct zu einer Linie oder eine Linie zu einer Fläche addire (das sind aber nicht homogene Dinge, wie Differentiale und die zugehörigen endlichen Größen). Nicht bloß die unendlich kleinen Linien, wie ∂x, ∂y, nimmt er als wahre Größen an, sondern auch ihre Producte und Potenzen. In einem Briefe an Wallis vom J. 1698 sagt Leibnitz, daß es besser seyn möchte, die Elemente oder augenblicklichen Differentiale für Größen als für Nichts zu halten. Denn sie hätten selbst wieder ihre Unterschiede, und könnten durch angebbare, ihnen proportionale Linien

dargestellt werden. Es sey unbegreiflich, oder verursache wenigstens unnöthige Dunkelheit, wenn man das von ihm sogenannte charakteristische Dreyeck einem angebbaren Dreyeck als ähnlich annehme, wie Wallis es thue, und es doch auch für Nichts erkläre, so daß man nur die Form eines Dreyecks ohne Quantität behalte. Ohne Quantität lasse sich eine Figur nicht gedenken. Man könne sich ja das Dreyeck immer kleiner und kleiner vorstellen, so wie man zwey concentrische Kreisbogen immer kleiner machen kann, wobey sie aber immer ungleich, und es selbst im Verschwinden bleiben. In einem Briefe an Tournemine vom J. 1714 sagt Leibnitz, die Infinitesimalgrößen sind nicht Null, auch nicht in der Schärfe unendlich kleine, sondern unvergleichbar oder indéfiniment kleine Größen.

Newton ist hierin befriedigender und philosophischer, wenn er gleich die Gründe seiner Rechnung nur kurz erklärt. Was Leibnitz Differentiale nennt, nennt er Momente. Diese druckt er durch Producte aus einer zuerst als endlich betrachteten kleinen Größe in einen endlichen Factor aus. Jene kleine Größe bezeichnet er durch *o*: den Factor nennt er die Fluxion der veränderlichen Größe, der Fluente. In der Differenzengleichung ist diese *o* in allen Gliedern vorhanden. Wird die Gleichung durch *o* dividirt, so bleibt *o* bloß in denen Gliedern, die vorher das Quadrat und höhere Potenzen von *o* enthielten. Wird *o* unendlich klein gesetzt, so bleiben bloß die Glieder, die zuerst die Momente in der ersten Potenz enthielten, mit den Fluxionen allein. Die Fluxionen stellen Geschwindigkeiten vor, wenn die veränderlichen Größen (fluentes) als Wege eines beweglichen Dinges gedacht werden. Sie sind proportional den Differentialen nach der von Leibnitz eingeführten Benennung. Methodus Fluxionum. Probl. I. in demonstr. solutionis.

In den Principien der Naturwissenschaft gebraucht Newton die Fluxionen nicht, sondern bringt alles auf die letzten Verhältnisse der verschwindenden Veränderungen, weil er in diesem Werke ganz den synthetischen Vortrag beobachtet. In dem zweyten Buche kommt nur

ein Lemma über das Moment eines Products vor, zum Gebrauch einiger folgenden Sätze. Das letzte Verhältniß der Veränderungen erklärt er durch ratio quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. (Phil. nat. princ. math. L. I. Lemma XI. schol.). Das letzte Verhältniß der Veränderungen ist einerley mit dem Verhältniß der Fluxionen.

Hiemit stimmt Eulers Erklärung der Differentialrechnung in seinem Werke über dieselbe überein. Sie ist, sagt er, die Methode, das Verhältniß der verschwindenden Incremente zu bestimmen, welche Functionen von irgend einer Art zukommen, indem die veränderliche Größe, wovon sie Functionen sind, ein verschwindendes Increment erhält. Er setzt hinzu, die Differentialrechnung beschäftige sich nicht sowohl mit den verschwindenden Veränderungen, als welche Null seyn, sondern mit ihrem Verhältnisse, welches durch endliche Größen ausgedruckt werden könne, daher in der That diese Rechnung es mit endlichen Größen zu thun habe. Auch diese Vorstellung kommt mit dem von Newton gebrauchten Verfahren überein.

Inzwischen mag es Schwierigkeit verursachen, sich ein Verhältniß vorzustellen, mit welchem zwey Größen verschwinden, oder welches zwey Größen, die Null sind, haben. Man muß aber die Veränderungen zweyer Größen x, y durch Producte, $P\omega$, $Q\omega$, ausdrucken, wie es Newton gethan hat. Die Factoren P, Q sind zum Theil von ω unabhängig. Setzt man nun die willkührliche $\omega = o$, so verwandelt sich das Verhältniß $P:Q$ in ein anderes, $p:q$, nämlich in das Verhältniß der verschwindenden Veränderungen. Newton hat auf den Unterschied der Verhältnisse $P:Q$ und $p:q$ nicht geachtet. Das letztere bezeichnet er durch $\dot{x} : \dot{y}$, und setzt schon für die endlichen Veränderungen die Producte $\dot{x}o$; $\dot{y}o$. Dadurch scheint etwas weggelassen zu werden, was zu der Bestimmung von $p:q$ gehören möchte, besonders da Newton sagt, daß in der durch o dividirten Differenzengleichung die in o

multiplicirten Glieder für Null gehalten werden können in Vergleichung mit den andern Gliedern, und daß er sie deswegen bey Seite setze. Man muß aber ja nicht ein verschwindendes Verhältniß, das ein selbstständiges ist, als ein genähertes oder substituirtes betrachten.

Durch d'Alembert ward es gewöhnlich, die Differential- und Integralrechnung auf den Begriff von Gränzverhältniß zu gründen. Er drang darauf in der ältern Encyclopädie, woraus die Artikel über Differentialrechnung in die Encyclopédie méthodique übergetragen sind. Wenn man ein Differentialverhältniß als das Gränzverhältniß der Veränderungen zweyer Größen erklärt, so bleibt es immer ein Sprung, den man von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen thut. In einer geometrischen abnehmenden Progression ist der Abstand von einem Milliontheilchen der Einheit bis zu Null für eben so groß zu halten als der von der Einheit bis zur Null. Durch fortgesetzte Verkleinerung der Veränderungen gelangt man nie zu den unendlich kleinen Veränderungen, deren Verhältniß das Grundverhältniß der endlichen ist. Vielmehr ist dieses das Grundverhältniß, von dem man ausgehen muß, um die Verhältnisse der endlichen Veränderungen zu bestimmen, so wie man eine krumme Linie aus freyer Hand am richtigsten zeichnet, wenn man in einigen Puncten derselben die berührenden gezogen hat.

Beide Vorstellungen, die von dem Verhältnisse verschwindender Veränderungen, und die von einem Gränzverhältnisse, lassen sich durch die Annahme einer stetigen Folge von Größen zwischen zwey gegebenen einer Reihe rechtfertigen. Die Stetigkeit der Folge kann man nicht verwerfen. Allein die gleich Anfangs gegebene Erklärung gebraucht keiner Rechtfertigung. Sie läßt die Stetigkeit einer Folge von Größen bestehen, und ist dabey anwendbar, ohne sie voraus zu setzen; zugleich aber zeigt sie, was das wesentliche in den endlichen Veränderungen zusammengeordneter Größen ist. Durch sie kommt man von den Differentialveränderungen auf die endlichen, dagegen man

nach der gewöhnlichen Vorstellungsart von diesen zu jenen gelangt.

Pasquich nennt in seiner mathematischen Analysis Verschwindungsquotient, was hier Differentialquotient genannt ist. In den mit Sorgfalt und Genauigkeit abgefaßten Elementis Analyseos et Geometriae sublimioris, Lipsiae 1799, bezeichnet er den Exponenten des Differentialverhältnisses für eine Function durch εy, so daß εy mit $\frac{\partial y}{\partial x}$ einerley bedeutet.

La Grange hat in seiner Théorie des fonctions analytiques, die Vorstellungen von Differentialen, von unendlich kleinen, oder verschwindenden Veränderungen, von Gränzverhältnissen, ganz vermieden, weil er sie nicht für deutlich genug hält, um in einer Wissenschaft, deren Gewißheit völlig einleuchtend seyn soll, zur Grundlage angewandt zu werden. Er legt dagegen die oben angeführte Formel für endliche Differenzen zum Grunde. Die Function fx nennt er fonction primitive in Beziehung auf die Functionen p, q, r, etc. welche er dérivées nennt; die Function p oder $f'x$ heißt bey ihm fonction prime, die Function q oder $f''x$ fonction seconde, u. s. f.

Ich stimme diesem großen Analysten völlig bey, daß man zur einleuchtenden Überzeugung von dem Verfahren unserer Infinitesimalrechnung von jener Entwickelungsformel ausgehen müsse. Schon lange habe ich bey dem Unterrichte in dieser Rechnung den von mir in diesem Artikel aufgestellten Begriff von Differentialen gebraucht, weil die Vorstellung von verschwindenden Größen eine Dunkelheit, wenigstens für Anfänger, verursacht. Es war mir angenehm, mein Verfahren mit dem von einem la Grange gebrauchten vereinigen zu können. Doch behalte ich die einmahl übliche Terminologie und Bezeichnungsart bey, welches in diesem Werke ganz nothwendig ist. Hat man jene nur recht verstanden, so werden die Rechnungen mit eben so vieler Sicherheit und Kleinheit als Kürze und Leichtigkeit ausgeführt.

Differentiale von höhern Graden.

Es sey y eine Function von x, und $\frac{\partial y}{\partial x}=p$, so ist p eine neue Function von x, und nur in dem Falle eine unveränderliche Größe, wenn y und x beides Glieder einer arithmetischen Progression sind. Man suche für p, so wie für y geschehen ist, den Differentialquotienten, und es sey $\frac{\partial p}{\partial x}=q$, so ist q wieder eine Function von x (oder auch eine unveränderliche Größe), nach la Grange fonction seconde dérivée. Man bezeichnet sie auch durch $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Es ist nämlich dieser Quotient der von den Veränderungen der Größen unabhängige Theil des Quotienten $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, wo $\Delta^2 y$ das Anfangsglied der zweyten Differenzreihe zu der Reihe der y bedeutet, wenn die zugehörigen x sich gleichförmig um Δx verändern.

Weiter sey $\frac{\partial q}{\partial x}=r$, so ist, wenn q keine Constante ist, r eine Function von x, (bey la Grange fonction tierce), die man auch durch $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ bezeichnet. Dieses ist der von den Veränderungen der x und q unabhängige Theil des Differenzquotienten $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, wo $\Delta^3 y$ das Anfangsglied der dritten Differenzreihe ist.

Auf diese Art lassen sich noch höhere Differentialquotienten finden. In einigen Fällen, z. B. wenn $y=x^m$, und m eine ganze Zahl ist, kommt man zuletzt auf einen constanten Werth des Differentialquotienten.

Wenn y eine ungesonderte Function von x ist, so ist p eine Function von x und y zugleich, daher wer-

den es auch die folgenden Differentialquotienten. Z. B. Es sey $\frac{\partial y}{\partial x} = x^2 y$, so ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2xy + x^2 p = 2xy + x^4 y$. Daraus ist

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2y + 2x.p + 4x^3 y + x^4.p$$
$$= 2y + 6x^3 y + x^6 y.$$

u. s. w.

Die Formel für die endliche Differenz Δy erhält nun folgende Gestalt:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} . \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{6}$$
$$+ \frac{\partial y^4}{\partial x^4} \frac{\Delta x^4}{24} + \text{etc.}$$

Die Anfangsglieder der folgenden Differenzreihen, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc, werden durch diese successiven Differentialquotienten bestimmt. Der Kürze wegen gebrauchen wir wiederum die Bezeichnungen p, q, r, s, t, u, etc, so daß

$$\Delta y = p\Delta x + \tfrac{1}{2} q \Delta x^2 + \tfrac{1}{6} r \Delta x^3 + \tfrac{1}{24} s \Delta x^4$$
$$+ \tfrac{1}{120} t \Delta x^5 + \tfrac{1}{720} u \Delta x^6 + \text{etc.}$$

Aus dieser Function von x wird $\Delta^2 y$ eben so hergeleitet, wie Δy aus der Function fx. Jedes Glied ist eine Function von x, wovon der erste Differentialquotient gegeben ist, so daß dadurch alle übrigen auch gegeben werden. Denn von p ist dieser Quotient = q, von q ist er = r, von r ist er = s, u. s. f. Die Differenz Δx wird als unveränderlich betrachtet. Nimmt man nun die gleichartigen Glieder zusammen, so ist

$$\Delta^2 y = q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + \tfrac{7}{12} s \Delta x^4 + \tfrac{1}{4} t \Delta x^5$$
$$+ \tfrac{31}{360} u \Delta x^6 + \text{etc.}$$

Hieraus folgt auf gleiche Art

$\Delta^3 y = r \Delta x^3 + \frac{3}{2} s \Delta x^4 + \frac{5}{4} t \Delta x^5 + \frac{3}{4} u \Delta x^6 +$ etc.

u. s. f.

Man sehe eben diese Formeln in einer etwas veränderten Gestalt, auf andere Art hergeleitet, in dem Artikel, Differenzenrechnung (48).

Z. B. nehme man die Function $y = x^m$. Setzt man nun um abzukürzen, $x^m = A$; $(x + \Delta x)^m = B$; $(x + 2\Delta x)^m = C$; $(x + 3\Delta x)^m = D$, etc. so ist $\Delta y = B - A$; $\Delta^2 y = C - 2B + A$; $\Delta^3 y = D - 3C + 3B - A$, u. s. f. (arithmet. Reihen höher. Ordn. 2.). Auch ist $p = m x^{m-1}$; $q = m \,.\, m-1 \,.\, x^{m-2}$; $r = m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, x^{m-3}$; $s = m \,.\,.\, m-3 \,.\, x^{m-4}$ etc. Sucht man die Differenzen sowohl nach den gegebenen Formeln, als mittelst der entwickelten Binomialpotenzen, so findet man dieselben Werthe.

Man sieht aus den hier berechneten Werthen von $\Delta^2 y$ und $\Delta^3 y$, wie die höhern Differentialquotienten der von den Veränderungen der Größen unabhängige Theil der Quotienten der endlichen Veränderungen sind, daher man sie auch als Gränzen derselben ansehen mag. Wichtiger ist, daß man daraus erkennt, wie die endlichen Differenzen ganz von den Differentialquotienten abhangen, so daß man eigentlich nicht von jenen zu diesen, sondern von den letztern zu den erstern gelangt.

Das zweite Differential, als Größe betrachtet, ist ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung, oder gegen das erste Differential unendlich klein. Dieses beruht darauf, daß $\Delta^2 y = (q + r\Delta x +$ etc.$) \Delta x^2$ ist. Dagegen $\Delta y = (p + \frac{1}{2} q \Delta x +$ etc.$) \Delta x$ ist. Das Verhältniß $\Delta y : \Delta^2 y$ nähert sich immer mehr dem $p : q \Delta x$, je kleiner Δx genommen wird. Setzt man für jene Differenzen die Differentiale, als unendlich kleine Größen, so wird, da $q \Delta x$ alsdann gegen p verschwindet, das zweyte Differential $\partial^2 y$ gegen das erste ∂y unendlich klein.

Aus einem gleichen Grunde ist das dritte Differential $\partial^3 y$ gegen das erste ein unendlich Kleines der zweyten

Ordnung, und in Absicht endlicher Größen ein unendlich Kleines der dritten Ordnung. Denn es ist $\Delta^3 y = (r + \frac{3}{2} s \Delta x + \text{etc.}) \Delta x^3$, also $\Delta y : \Delta^3 y = = p + \frac{1}{2} q \Delta x + \text{etc} : (r + \frac{3}{2} s + \text{etc.}) \Delta x^2$.

Man muß diese Ausdrücke nur kennen, aber sie nicht gebrauchen. Differentiale sind keine Größen. Behandelt man ihre Zeichen wie Größen, so sind jene Vergleichungen freylich richtig. Man kann aber diese Vergleichungen der Differentiale verschiedener Ordnungen sehr wohl entbehren. Wo $\partial^2 y$ vorkommt, wird es mit ∂x^2 oder $\partial x \partial y$ verglichen, und der Quotient jenes durch dieses dividirt ist im Allgemeinen eine endliche Größe. Eben so wird $\partial^3 y$ immer mit ∂x^3, oder $\partial y \partial x^2$, oder $\partial y^2 \partial x$, oder ∂y^3 verglichen, u. s. f. Bey Näherungsrechnungen ist es nöthig, daß man einsehe, wie die Differenzen der verschiedenen Ordnungen abnehmen. Man bemerke aber wohl, daß es bey der Vergleichung derselben zugleich auf die Differentialquotienten p, q, r, etc. ankommt.

Differentialrechnung ist derjenige Theil der Analysis, worin aus der Relation der veränderlichen Größen, die auf irgend eine Art mit einander verbunden sind, die Relation ihrer Veränderungen oder zusammengehörigen Differenzen gesucht wird, so fern dabey die Quantität der Veränderungen selbst nicht in Betrachtung kommt. Sie macht einen Theil der Analysis des Unendlichen aus, die man so nennt, weil die Differenzen, deren Relation gesucht wird, gleichsam als unendlich kleine Bestandtheile des Endlichen betrachtet werden. Man sucht das verschwindende zu fassen, indem es verschwindet. Eigentlich ist es, wie in dem Artikel, Differentiale, gezeigt ist, eine Absonderung des charakteristischen oder wesentlichen in der Relation der Differenzen von dem willkührlichen, was ihre Quantität zu ihrer Relation beyfügt.

Die Wichtigkeit dieser höhern Rechnungsart mag man schon aus der Erklärung abnehmen. Da sie für alle Arten von Functionen das charakteristische in der Relation der Veränderungen der zusammengehörigen Größen findet,

so giebt sie zugleich das Mittel, von der charakteristischen Relation der Differenzen auf die Function zu kommen, wenn nur jene Relation unter den mittelst der Differentialrechnung gefundenen vorhanden ist, oder sich durch Verwandlungen auf solche bringen läßt. Die schwersten Fragen der Analysis und analytischen Mechanik erfordern zur Auflösung diesen Weg. Sie waren in der ältern Mathematik unauflöslich, weil man die Verknüpfung zwischen einer Relation veränderlicher Größen und der Relation ihrer Differenzen nicht aufgesucht hatte. Man konnte auf manche solche Fragen nicht einmahl gerathen.

Zweytens ist oft eine veränderliche Größe durch ein Gränzverhältniß zu einer andern gegeben. Z. B. das Verhältniß der Subtangente zur Ordinate ist dasjenige, welchem sich die Differenz der Abscissen und die der Ordinaten ohne Ende nähert Nun ist das Differentialverhältniß zugleich die Gränze des Verhältnisses der endlichen Differenzen; also ist jenes durch dieses gegeben, (s. berührende Linie). Der Halbmesser der Krümmung ist die Gränze, welche sich zwey Normalen an einer Curve, bis zu ihrem Durchschnitte genommen, desto mehr nähern, je näher sie bey einander liegen Er wird also durch Differentialverhältnisse bestimmt. So werden auch Puncte der Caustica und der Diacaustica durch solche Verhältnisse gefunden. Die größten und kleinsten Werthe der Ordinaten einer Curve, nebst ihren Stellen, die Wendungspuncte, die Rückkehrpuncte, werden durch gewisse Beschaffenheiten der Gränzverhältnisse leicht angegeben. In der allgemeinen Analysis leistet die Differentialrechnung wichtige Dienste zur Summirung der Reihen und zur Auflösung der Gleichungen.

Daher nahm auch gleich mit der Erfindung der Analysis des Unendlichen die Geometrie einen höhern Flug, weit über die Gränzen, wo Archimedes und Apollonius stehen geblieben waren. Die abstracte Mathematik bekam einen neuen Theil an der höhern Mechanik, worin gleich sehr schwere Fragen aufgelöset wurden. Die einzelnen Methoden der vorigen Mathematiker wurden allgemei-

ner gemacht und zu einem System mit einander verbunden, oder sie wurden durch die neuere bequemere Rechnung unnöthig.

Der Gebrauch eines Differentialverhältnisses wird zuerst in der Neperischen Theorie der Logarithmen vorkommen. Nepers Definition der Logarithmen ist folgende: Logarithmus cujusque sinus est numerus quam proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit, interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono atque initio aequiveloce. Das proportionirlich abnehmen heißt nach Verhältniß der noch übrigen Länge abnehmen. Nepers Definition sagt eben dasselbe, was die Differentialgleichung zwischen der Zahl z und ihrem natürlichen Logarithmen x, welche ist $\partial x = \frac{\partial z}{z}$, nur daß er die Logarithmen der abnehmenden Sinus zunehmen läßt. Nehmen wir diese Logarithmen für positiv, so haben wir $\partial x = -\frac{\partial z}{z}$, und für $z = 1$ ist $\partial x = -\partial z$, das ist, die Veränderungen, ohne Ende vermindert, sind gleich groß, und geometrisch dargestellt, gleich geschwinde Bewegungen. In einem andern System sind sie nicht gleich geschwind, weil darin $\partial x = -\frac{c\partial z}{z}$, und für $z = 1$ in demselben $\partial x = -c\partial z$ ist. Neper nimmt nicht endliche Differenzen, da er die Logarithmen mit Null, und die Sinus mit der Einheit anfangen läßt. Wie er sich, ohne zu integriren, hilft, die Logarithmen bis auf einen gewissen Bruchtheil richtig anzugeben, wird in dem Artikel, Logarithmen, erzählt.

Fermat gebrauchte eine Rechnung, worin die Differenz zweyer Größen, und dadurch mittelbar auch die Differenz zweyer zugehörigen Größen, verschwindend gesetzt wird, zur Bestimmung des größten oder kleinsten Werthes einer Function, und der berührenden an einer

Curve. Er betrachtet die Methode als eine gemeinschaftliche für beide Fragen. Zwey auf irgend eine Art aus andern zusammengesetzte Größen sollen sich näher kommen können, als um jeden angebbaren Unterschied. Nimmt man das beiden gemeinschaftliche weg, so bleibt diejenige Differenz, welche den Unterschied jener Größen hervorbringt, in allen Theilen beider als Factor. In dem Gränzverhältnisse geht der Factor theils durch die Division heraus, theils werden die Termini, worin derselbe noch bleibt, weggelassen, indem die Differenz als verschwindend betrachtet wird.

Von der ersten Frage ist folgendes das zweyte Beyspiel, wobey Fermat sich deutlicher erklärt, als bey dem ersten Beyspiele. Eine Linie a soll in zwey Theile x und $a - x$ getheilt werden, so daß $x^2 (a - x)$ ein Größtes ist. Fermat setzt statt x den Theil $x + e$, so kommt statt jenes Products das $(x + e)^2 (a - x - e)$. Dieses vergleicht er mit jenem, als wenn beide gleich groß wären, ob sie es gleich nicht sind, und nennt diese Vergleichung eine adaequalitas, wodurch er einen von Diophantus gebrauchten Ausdruck, παρισοτης, erklären zu können glaubt. Von den entwickelten Producten wird das gemeinschaftliche weggenommen, so bleibt auf der einen Seite Nichts, auf der andern sind die Glieder, welche e enthalten. Nun werden diejenigen, welche das Vorzeichen + haben, mit denen, welche — vor sich haben, verglichen. Das giebt eine adaequalitas zwischen $2ax.e + a.e^2$ und $3x^2.e + 3x.e^2 + e^3$, oder zwischen $2ax + ae$ und $3x^2 + 3x.e + e^2$. Hier sind die Glieder, welche e enthalten, wegzuwerfen, und zwischen den übrig bleibenden ist nun keine bloß erdichtete Vergleichung und adaequalitas, sondern eine wahre Gleichung vorhanden, oder $2ax = 3x^2$, das ist $2a = 3x$.

Die berührenden an einer krummen Linie zu finden, verfuhr Fermat auf eine ähnliche Art, wie in dem Artikel, berührende Linie, (47. 48.) schon angeführt ist. In der Sammlung seiner Werke (Tolosae 1679. fol.) sind

Beyspiele an der Parabel, Ellipse, Cissoide, Conchoide, Cycloide und der Quadratrix gegeben, auch ist der Schwerpunct eines parabolischen Konoids dadurch von ihm bestimmt. Bey den vier letztern jener Linien kürzt Fermat sein Verfahren etwas ab. Er sagt, man solle die specifische Eigenschaft der Curve auf die berührende tragen, das ist, eine Ordinate an derselben für eine Ordinate an der Curve neben dem Berührungspuncte nehmen, darauf dasjenige weglassen, was nach der Lehre vom Größten und Kleinsten weggelassen werden muß, so werde man den Durchschnitt der berührenden mit dem Durchmesser (der Axe der Abscissen) bestimmen können. Es sey (Fig. 43. Tab. III) an der krummen Linie AMB die berührende TMR in M; wo sie mit der Curve die gemeinschaftliche Ordinate PM hat. Eine andere Ordinate der Curve, QN, schneide sie in R. Nun ist QR die vierte Proportionallinie zu TP, PM, TQ. Dieser Werth, nämlich $\frac{PM . TQ}{TP}$, werde in die Gleichung zwischen den Coordinaten AP, PM für PM, und zugleich AP + PQ für AP gesetzt. In der Annäherungs-Gleichung hebt sich erstlich alles auf, was nicht PQ, die Differenz der beiden Abscissen, enthält; und durch die Division mit PQ wird eine von PQ unabhängige Gleichung erhalten, wodurch die Subtangente PT bestimmt wird. Z. B. Die Curve sey die Cissoide, deren Gleichung ist $x^3 = y^2 (a - x)$; Die Subtangente sey $= t$, und $PQ = e$, so ist eine Annäherung zur Gleichheit zwischen

$$(x + e)^3 \text{ und } \frac{y^2 (t + e)^2}{t^2} (a - x - e) .$$

In beiden Größen hebt sich, was e nicht enthält, gegen einander. Läßt man ferner die Glieder weg, welche e^2 und e^3 enthalten, so bleibt, nach der Division durch e, die Gleichung, $(3a - 2x) t = 2x (a - x)$, zur Bestimmung von t. Fermat bezeichnet x durch N, $a - x$ durch Z; t durch A, und findet übereinstimmig mit die-

ser Gleichung $Z^8A + NA$ gleich Z^2N, wo die Ziffern linker Hand eines Buchstaben-Zeichens numerische Factoren sind. (Wenn sie rechter Hand an der Spitze stehen, bedeuten sie auch bey Fermat Exponenten. Zu welchem Buchstaben sie gehören, muß der Zusammenhang der Rechnung ergeben).

Man sieht, daß dieses Verfahren eine Differenzenrechnung ist, die am Ende in die Differentialrechnung übergeht. Für die Differenz der Ordinaten steht nur der Unterschied zwischen der Ordinate an dem Berührungspuncte und der benachbarten Ordinate an der berührenden.

Barrow suchte das Gränzverhältniß zwischen den Differenzen der Coordinaten selbst, und bestimmte dadurch das Verhältniß der Ordinate zur Subtangente, (s. berührende Linie, 51.). Auch kam er bey der Untersuchung über die Stelle des Bildes eines leuchtenden Punctes durch zurückgeworfene oder gebrochene Strahlen auf die Bestimmung von Gränzverhältnissen endlicher Größen (der Abstände des leuchtenden Punctes und des Vereinigungspunctes der zurückgeworfenen oder gebrochenen Strahlen von der zurückwerfenden oder brechenden Linie), wobey aber doch verschwindende Größen vorkommen, nämlich die Winkel der Strahlen. S. Brennlinie.

Allein diese und andere Versuche, das unendlich kleine berechnungsfähig zu machen, waren nur eingeschränkte Methoden für gewisse Fälle. Die Quadraturen und Cubirungen waren nur Summirungen gewisser Reihen mit unendlich vielen, unendlich wenig verschiedenen Gliedern. Rectificationen wurden auf Quadraturen gebracht, so auch Complanationen, indem man für die Bogen oder Zonen Abschnitte von Flächen setzte, die dieselben Verhältnisse wie jene unter sich hatten. Das war aber nur in einzelnen Fällen ausführbar. Newton und Leibnitz erfanden jeder auf seinem eigenen Wege, der erstere aber früher, allgemeine Methoden, die letzten Verhältnisse der Veränderungen oder Unterschiede unbestimmter, von einander abhängigen, Größen anzugeben, und von diesen letzten Verhältnissen auch zu den Relationen der Größen

selbst zu gelangen, woran man bis dahin noch gar nicht gedacht hatte. Newton verband mit seiner Fluxionenrechnung die Theorie der Reihen, insbesondere die Entwickelung irrationaler mehrtheiliger Größen in eine Reihe, wodurch seine Analysis freylich der Leibnitzischen überlegen ist, weil er dadurch im Stande war, unmittelbar aus den Gleichungen für die Fluxionen die Gleichungen für die Fluenten zu erhalten, welches Leibnitz nur durch besondere Kunstgriffe und Umwandlungen (Transmutationen) in besondern Fällen bewirken konnte.

Wir haben von Newton drey Schriften über die Rechnung des Unendlichen. Die erste führt den Titel: Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, welche zuerst durch Besorgung von Jones 1711 zu London erschienen ist. Barrow erhielt sie schon im J. 1669 von dem Verfasser mitgetheilt. Es ist diejenige, deren Newton in einem für Leibnitz bestimmten, an Oldenburg gerichteten Briefe vom 24sten Octobr. 1676 erwähnt, daß Collins sie durch Barrow erhalten habe.

Newton beschäftigt sich darin fast ganz mit der Quadratur der krummen Linien, bemerkt aber, daß die Aufgaben von der Rectification, Cubirung, Complanation, und dem Schwerpuncte sich auf die von der Quadratur bringen lassen, weswegen er weiter nichts als ein Beyspiel von der Rectification eines Kreisbogens giebt. Er geht von der Quadratur derer Linien aus, an welchen die Ordinaten einer Potenz der Abscisse (mit ganzem oder gebrochnem Exponenten) proportional ist. Die Abscisse an einer Curve sey $= x$; die Ordinate $= y$; die Area $= z$, und $a x^m = z$. Wird $x = o$ für x gesetzt, und bezeichnet $o v$ das Wachsthum der Area, so ist $a(x + o)^m = z + o v$, also $m a x^{m-1} . o + \text{etc.} = o v$, welche Gleichung durch o theilbar ist. Wird o als verschwindend betrachtet, so wird $v = y$, und es bleibt $m a x^{m-1} = y$. Umgekehrt, wenn $y = m a x^{m-1}$ ist, so ist die Area $z = a x^m$. oder, wie Newton die Formel giebt, wenn $a x^{\frac{m}{n}} = y$, so ist

$\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$: Ist y eine gebrochne oder irrationale Function von x, so wird sie, wie Newton zeigt, durch Division oder Ausziehung der Wurzel auf eine Reihe von Potenzen der x gebracht. Ist y eine ungesonderte Function von x, (Newton nennt es aequatio affecta), so wird y nach Newtons Anleitung daraus zu einer Reihe von Potenzen der x entwickelt, mit steigenden oder fallenden Exponenten. Bey der Abfassung dieser Schrift scheint Newton den binomischen Lehrsatz noch nicht gekannt zu haben. Denn die Quadratwurzel aus einem Binomium zieht er ganz auf die Art aus, wie es bey Zahlen gewöhnlich ist. Auch verwandelt er den Bruch $\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ erst in diesen, $\frac{\sqrt{(x-xx)}}{x-xx}$, zieht aus dem Zähler die Wurzel, und dividirt dann diese durch den Nenner. Bey der Verwandlung des Bruches $\frac{\sqrt{(1+ax^2)}}{\sqrt{(1-bx^2)}}$ in eine Reihe nimmt er eine solche Verwandlung zuerst mit Zähler und Nenner vor, und dann die Division, oder verfährt auch auf eine ähnliche Art, wie bey jenem Bruche.

Der Ausdruck, Fluxion, kommt in dieser Schrift noch nicht vor. Den Ausdruck, Moment, nimmt er hier (pag. 19.) in einer andern Bedeutung als in der folgenden Schrift, und versteht darunter die Größe, welche die augenblickliche Veränderung erzeugt.

Die zweyte Schrift von Newton ist betitelt: Methodus Fluxionum et serierum infinitarum, cum ejusdem applicatione ad Curvarum Geometriam. Sie ist nicht eher als 1736 von Colson in einer englischen Übersetzung aus dem lateinischen Original bekannt gemacht. Aus dieser hat Castillion sie wieder ins Lateinische übersetzt, und ihr die zweyte Stelle in seiner Sammlung gegeben. Das Original ist in der prächtigen Ausgabe von Newtons Werken durch Horsley eingerückt, unter dem Titel: Artis analyticae specimina, vel Geome-

tria analytica. Diese Schrift ist diejenige, von welcher Newton in dem vorher angeführten Briefe sagt, daß er sie mit einer Schrift über die Optik habe herausgeben wollen. welches aber unterblieben sey, weil ihm gegen seine optische Theorie manche Einwürfe gemacht worden, und er seine Ruhe nicht aufopfern wollte. Es trifft bey dieser Schrift zu, was er von jener sagt, daß die Reihen nur einen kleinen Theil darin einnehmen, und daß die Aufgaben, welche nicht auf Quadraturen gebracht werden können, darin fehlen, obgleich etwas von den Gründen dieser Untersuchung darin beygebracht sey. Stellen aus dieser Schrift sind in dem Briefe angeführt, als die Formeln S. 158, und die Berechnung eines Logarithmen S. 148 in dem Briefe, S. 341 und 344, nach Castillions Ausgabe. In einem an den Abbé Conti gerichteten Briefe (S. 410. a. a. O.), die Streitigkeit mit Leibnitz betreffend, erzählt Newton, daß er im J. 1671 eine ausführlichere Schrift aufgesetzt habe, die in seinem Briefe vom 24sten Oct. 1676 erwähnte, welche mit der Reduction endlicher Größen auf unendliche Reihen, und mit der Auflösung folgender beiden Aufgaben anfange: 1) aus der Relation der Fluenten die Relation der Fluxionen zu finden; 2) aus einer Gleichung für Fluxionen die Relation der Fluenten herzuleiten. Diese finden sich wörtlich in der Methodo Fluxionum mit ihren Auflösungen.

Den Anfang dieser Schrift macht die Verwandlung der Quotienten und Wurzelgrößen in Reihen, und die Reduction der aequationum affectarum auf diese Gestalt, wobey das unter dem Namen des Newtonischen Parallelogramms bekannte geometrische Hülfsmittel vorkommt. Hierauf erklärt Newton die Fluxionenrechnung. Er stellt sich alle Größen als geometrische vor, die durch Bewegung erzeugt werden, Linien durch die Bewegung eines Punctes; Flächen durch Bewegung einer Linie; Körper durch Bewegung einer Fläche. Aus der Länge des beschriebenen Raums muß die Geschwindigkeit für jeden Zeitpunct, und aus der Geschwindigkeit die Länge des in einer gegebenen Zeit beschriebenen Raums gefunden werden.

Newton erinnert, daß Zeit hier nicht im eigentlichen oder metaphysischen Verstande (formaliter, wie er es ausdruckt) zu nehmen sey, sondern daß es eine von der eigentlichen Zeit verschiedene Größe bedeute, die gleichförmig zunimmt, und auf welche die andern Größen, mit welchen sie gleichartig ist, gleichsam wie auf eine Zeit bezogen werden. Diese Erinnerung ist von Wichtigkeit, weil dadurch die Einmischung eines der Geometrie sowohl als noch mehr der Analysis fremden Begriffs abgewendet wird. Die Größen, welche als allmählig und unbestimmbar (indefinite) wachsend gedacht werden, nennt Newton **Fluentes**, und bezeichnet sie mit den letzten Buchstaben des Alphabets. Die Geschwindigkeiten, mit welchen die Fluenten durch die sie erzeugende Bewegung zunehmen, nennt er **Fluxiones**, und bezeichnet sie durch die Buchstaben für die Fluenten, mit Puncten darüber. Die unbestimmbar kleinen Theile der Fluenten, um welche sie in unbestimmbar kleinen Zeittheilen stetiger Weise zunehmen, oder die Momente der Fluenten verhalten sich wie die Geschwindigkeiten, womit diese fließen oder zunehmen. Sind die veränderlichen Größen x und y, so sind ihre Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, und ihre Momente $\dot{x}o$ und $\dot{y}o$. In der Gleichung zwischen x und y werden $x+\dot{x}o$ und $y+\dot{y}o$ für x und y gesetzt, jene Gleichung von der neuen abgezogen, der Rest durch o dividirt, darauf o unendlich klein gesetzt, so wird die Gleichung für die Fluxionen erhalten. Man sieht hieraus, daß Newtons Fluxionen endliche, den unendlich kleinen Veränderungen der Größen proportionale Glieder eines Verhältnisses sind.

Newton ward durch die geometrische Untersuchung der Bewegung auf seine Analysis des Unendlichen geleitet. In dem angeführten Briefe an den Abbé Conti erzählt er, daß er unter seinen Papieren eines mit dem Datum vom 13. Nov. 1665 gefunden habe, worin die directe Methode der Fluxionen in folgenden Ausdrücken enthalten war: wenn eine Gleichung gegeben ist, welche die Relation

zweyer oder mehrerer Linien, x, y, z, etc. enthält, die zu gleicher Zeit von zwey oder mehrern Beweglichen, A, B, C, etc. beschrieben werden, die Relation ihrer Geschwindigkeiten p, q, r, etc. zu finden. Die Auflösung ist gerade die, welche die Fluxionen- oder Differential-Rechnung giebt. Nach jener sind p, q, r. etc. die Fluxionen, nach dieser die Differentiale. Newton fügt hinzu, daß die Auflösung auf die Aufgaben von berührenden und der Krümmung angewandt war; ferner, daß ein anderer Aufsatz, datirt vom 16. May 1666, in sieben Sätzen eine allgemeine Methode zur Auflösung der Aufgaben, welche die Bewegung betreffen, enthielt, von welchen der jetzt angeführte der letzte ist. In einem Aufsatze vom November 1666 fand er diese sieben Sätze wieder, den letzten mit der Erweiterung, daß Brüche, irrationale Größen, und sogar solche, welche man nachher transscendente genannt hat, keine Schwierigkeit machten. In einem hinzugekommenen Satze war auch die umgekehrte Methode der Fluxionen, so wie er sie damals hatte, vorgetragen. In diesem Aufsatze waren zuweilen Buchstaben mit einem Puncte für die ersten Fluxionen, und mit zwey Puncten für die zweyten gebraucht. Aus dieser kleinen Schrift ist hernach eine größere Abhandlung erwachsen, die Methodus Fluxionum, deren Titel Newton aber nicht angiebt.

Solchergestalt kam Newton auf die Vorstellung, Veränderungen der Größen durch Bewegung entstehen zu lassen, desto leichter, da Bewegung häufig zur Erzeugung geometrischer Größen gebraucht wird. Um die unendlich kleinen Größen aus den Gränzgleichungen für die Veränderungen zu verbannen, druckte er diese durch das Product aus einer für alle veränderlichen Größen gemeinschaftlichen Größe *o* in die Geschwindigkeit oder die Fluxionen aus. Bey ungleichförmigen Geschwindigkeiten ist dieses Product desto näher die Veränderung, je kleiner diese ist. Darum setzt er, nach der Division der Gleichung für die Veränderung durch *o*, dieses *o* gleich Null. Geschwindigkeiten bey ungleichförmigen Bewegungen verhalten sich

wie die gleichzeitigen Wege nur, wenn diese ohne Endverminderte sind, oder das letzte Verhältniß der Wege ist das Verhältniß der Geschwindigkeiten.

Eine weitere Ausführung der Lehre von den Quadraturen (d. i. Integrationen) ist die Schrift, Tractatus de Quadratura Curvarum, welche 1704 mit des Verfassers Hauptwerke über die Optik als Anhang herausgekommen ist. Sie liefert allgemeinere Formeln als die zweyte Schrift giebt, welche ebenfalls diese Untersuchungen enthält. Horsley setzt sie vor der Methodus Fluxionum, ohne seinen Grund anzugeben. Um das Literarische der Newtonischen Schriften bekümmert er sich nicht.

In der Einleitung zu dem Tractat von der Quadratur der krummen Linien, die später als die Abhandlung selbst geschrieben ist, sagt Newton, er betrachte die Größen nicht als aus höchst kleinen Theilchen zusammen gesetzt, sondern als durch eine stetige Bewegung beschrieben. Da nun Größen nach dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten, womit sie gleichzeitig wachsen und erzeugt werden, größer oder kleiner ausfallen, so habe er eine Methode gesucht, aus den Geschwindigkeiten der Bewegungen und Zunahmen, womit die Größen erzeugt werden, die Größen selbst zu bestimmen, und so sey er in den Jahren 1665 und 1666 allmählig auf die Methode der Fluxionen gekommen.

Er setzt hinzu: die Fluxionen verhalten sich höchst nahe wie die Zunahmen der Fluenten, die in höchst kleinen Zeittheilen erzeugt werden, oder, um genau zu reden, sie stehen in dem Anfangsverhältnisse der werdenden Zunahmen (sunt in prima ratione augmentorum nascentium), und können durch irgend welche ihnen proportionale Linien dargestellt werden. Statt des Anfangs-Verhältnisses der werdenden Zunahmen könne man auch, fügt Newton hinzu, das letzte Verhältniß der verschwindenden Theile nehmen. Bey dem Anfangs-Verhältnisse geht man von der Größe in einem Zustande zu der in einem folgenden Zustande über; bey dem letzten Verhältnisse der Veränderungen läßt man

zwey Größen in verschiedenen Zuständen sich einander immer mehr nähern.

Die Methode der Fluxionen, heißt es ferner, sey der Geometrie der Alten gemäß, da die Analysis dadurch bey endlichen Größen bleibe; es sey nach derselben nicht nöthig, unendlich kleine Figuren in die Geometrie einzuführen. Inzwischen möge man die Analysis auch an irgend welchen Figuren, endlichen oder unendlich kleinen anwenden, wenn man nur vorsichtig verfahre. Alle diese Bemerkungen scheinen sich auf Leibnitzens Vorstellungsarten in der Differentialrechnung zu beziehen.

In der Schrift von der Quadratur der krummen Linien werden auch die Fluxionen höherer Ordnungen eingeführt. Die Fluxionen der Fluxionen bezeichnet er durch zwey Puncte über dem Symbol der Fluente, wie $\ddot{x}$; die Fluxion dieser durch $\dddot{x}$; die Fluxion dieser durch $\ddddot{x}$, u. s. f. Da Fluxionen endliche Größen sind, so hat diese Fortschreitung keine Schwierigkeit. Man kann auch x als eine Fluxion einer veränderlichen Größe betrachten. Diese bezeichnet Newton durch x'. Diese mag wiederum die Fluxion einer Größe seyn, die durch x'' bezeichnet werde. Die Glieder einer Reihe kann man nämlich als Unterschiede der Glieder einer andern Reihe betrachten, und diese eben so als die Unterschiede der Glieder einer vorhergehenden Reihe, u. s. f. In den Werthen der zweyten und folgenden Fluxionen begieng Newton einen Fehler dadurch, daß er die Glieder einer entwickelten Differenz nach ihrer Folge für die Differenzen der verschiedenen Ordnungen nahm.

Anstatt daß Newton durch Geometrie und allgemeine Bewegungslehre auf seine Fluxionenrechnung geführt ist, ward Leibnitz durch die Betrachtung der Unterschiede und Summen in den Reihen der Zahlgrößen auf seine Differentialrechnung geleitet. Dieses erzählt er in einem Schreiben an Wallis, im J. 1697,

womit eine Stelle in dem Commercio epist. Leibnitii et Jo. Bernoulli, T. II. p. 161. zu vergleichen ist. Als er bemerkt hatte, daß die Differenzen eine Beziehung auf die Berührungslinien, und die Summen auf die Quadraturen hätten, sey ihm ein Licht aufgegangen. Bald habe er eingesehen, daß die Unterschiede der Unterschiede in der Geometrie durch die Krümmungskreise dargestellt werden. Auch habe er eine merkwürdige Analogie der Relation zwischen den Differenzen und Summen mit der Relation zwischen Potenzen und Wurzeln wahrgenommen. Dieses bezieht sich vermuthlich auf die Zusammensetzung der Größen irgend einer Reihe aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen, und dieser aus jenen. (S. arithmet. Reihen höherer Ordn. 2; 7.). Nun, fährt Leibnitz fort, sey es ihm eingefallen, daß man neben den bisher gewöhnlichen Formen der Größen, y, y^2, y^3, $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$, etc. neue Formen (affectiones), die er durch $d^{-}y$ $d^{\overline{2}}y$; oder $d^{-}d^{-}y$; $d^{\overline{3}}y$ oder $d^{-}d^{-}d^{-}y$, bezeichnet, einführen könne. In einem Schreiben an die Gräfinn von Kielmannsegg, worin Leibnitz ihr Nachricht von seiner Streitsache mit Newton ertheilt, erzählt er, daß er sich frühzeitig mit den Eigenschaften der Zahlen beschäftigt, auch einiges neue über die Unterschiede der Reihen bemerkt habe. (Er gab 1666 in einem Alter von 19 oder 20 Jahren seine Schrift über die Combinationen heraus, und zeigte 1673 in der Londoner Societät seine Rechenmaschine vor, die er schon in seiner Jugend erfunden hatte). Im J. 1673 hätte die Bekanntschaft mit Huygens Neigung zu geometrischen Untersuchungen in ihm erweckt, er habe in kurzer Zeit gute Fortschritte darin gemacht, und eine Reihe gefunden, die für den Kreis dasselbe leiste, was Mercators Reihe für die Hyperbel. Als er hierauf seine ehemahligen Bemerkungen über die Differenzen mit seinen neuen Forschungen in der Geometrie verbunden hätte, habe er etwa um 1676 eine neue Art Rechnung, von ihm die Differentialrechnung genannt, erfunden, deren Anwendung auf die Geometrie die vortrefflichsten Dienste leistete.

In dem zweyten Briefe an den Abbé Conti, wegen der gedachten Streitsache, versichert Leibnitz auch, daß er auf seine Differentialrechnung nicht durch die Fluxionen der Linien, sondern durch die Differenzen der Zahlen gekommen sey, indem er bemerkt habe, daß die Differenzen bey stetig wachsenden Größen in Vergleichung mit den Zahlen verschwinden, da sie bey Zahlen endlich bleiben, s. Differenzenrechnung. X.

Leibnitz fand, wie die Glieder einer Reihe aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen zusammengesetzt werden. Darin war ihm ein französischer Astronom, **Mouton**, der um diese Zeit lebte, zuvorgekommen. Doch erklärt Leibnitz in einem Briefe an Oldenburg vom J. 1673, daß ihm dieses ganz unbekannt gewesen sey, ehe es ihm bey seiner Anwesenheit zu London gesagt worden. Mouton müsse das Gesetz, nach welchem die Multiplicatoren zu den Anfangsgliedern der Differenzreihen fortgehen, nicht gewußt haben. (Pascal hat es doch gewußt). Dieses legt er dar, und setzt hinzu, daß es die ihm wohl bekannten, in der Combinationslehre von ihm angewandten Zahlen seyn. Zudem habe Mouton die Differenzen zum Interpoliren gesucht, er aber habe die Glieder einer Reihe in irgend einer Stelle ins Unendliche hin durch die Differenzen finden wollen.

Ferner sagt Leibnitz in diesem Briefe an Oldenburg, daß er zufolge der von ihm gemachten Bemerkungen manche Aufgaben über die Reihen auflösen könne; insbesondere könne er die Summe einer Reihe von Brüchen angeben, deren Zähler 1, die Nenner die Triangular- Pyramidal- und andere Zahlen dieser Art sind. In einem andern Briefe an Oldenburg im J. 1676 giebt er die Summen folgender Reihen an:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \text{etc.} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \text{etc.} = \frac{1}{4}$$

Wie er sie gefunden hat, zeigt er hier nicht an. In einem Aufsatze in den Actis Erud. 1702 findet sich seine Methode. Sie besteht in einer Zerlegung der Brüche in andere. (In dem Artikel Differenzenrechnung ist gewiesen, wie jedes Stück solcher Reihen und ihre Gränzen gefunden werden. Die erste wird aus (60.) daselbst nach dem in (67.) angegebenen Verfahren gefunden; die zweyte aus (59.); die dritte ist die in (78.) summirte Reihe durch 4 dividirt).

In demselben Briefe (von 1676) theilt Leibnitz die von ihm durch eine unendliche Reihe gefundene Quadratur des Sectors eines Kreises, einer Ellipse und Hyperbel von dem Mittelpuncte aus gehommen, mit. Diese beruht auf einer Verwandlung einer Curve in eine andere, so daß die Quadratur dieser letztern die der erstern giebt. Die Ordinate der zweyten Curve ist eine rationale Function der Abscisse, und läßt sich, wenn sie eine gebrochne ist, zu einer Reihe entwickeln, daher die Curve nach der schon von Mercator bey der Hyperbel angewandten Methode sich quadriren läßt. Leibnitz schätzt die allgemeine Methode der Transformationen sehr hoch. Sie möchte aber doch nur in besondern Fällen angewandt werden können. Er giebt für die Kegelschnitte mit einem Mittelpuncte zwey Arten der Transformation an. Die erste ist für den Kreis folgende. Die Gleichung für diese Linie ist, $2rx - xx = yy$. Nun setzt er

$x = \frac{2r^3}{r^2 + z^2}$, so ist $y = \frac{2r^2 z}{r^2 + z^2}$. Hierauf wird Leibnitz durch eine geometrische Construction geleitet. Nun sey z die Abscisse einer Curve, deren Ordinate ist

$-\frac{8r^5 z^2}{(r^2 + z^2)^3}$, so ist die Area derselben für die Abscisse

z gleich der Area am Kreise für die Abscisse x. (Es ist nämlich $y \partial x = -\frac{8r^5 z^2 \partial z}{(r^2 + z^2)^3}$). Leibnitz verfolgt die Rechnung nicht weiter. Von der zweyten Art der

Transformation giebt er nur eine so leichte Andeutung durch ein paar berührende, daß es schon einigen Scharfsinn erfordert, seine Idee zu errathen. Der Abbé Catelan und Ozanam haben die Art der Umwandlung irgendwo her erhalten, und bekannt gemacht. Montücla hat sie in seiner Geschichte der Mathematik, Tom. II. p. 378 beschrieben, wo aber noch ein vorläufiger Satz zu erweisen ist. Aus dem Mittelpuncte der Kegelschnitte ziehe man eine gerade Linie an den Scheitelpunct, und eine an irgend einen Punct der Curve. Durch beide Puncte werden berührende gezogen. Das Stück auf der berührenden durch den Scheitelpunct bis an den Durchschnitt mit der andern berührenden sey = t, und das Rechteck von der halben Zwerchaxe (halben großen Axe in der Ellipse) mit dem halben Parameter sey die Flächen-Einheit, so ist der elliptische oder circulare Sector dividirt durch die halbe Zwerchaxe $= t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 -$ etc. Für den hyperbolischen Sector werden die subtractiven Glieder additiv genommen. Am Kreise ist t die Tangente des halben Bogens des Sectors. Daher ist, wenn das um einen Kreis beschriebene Quadrat zur Einheit genommen wird, die Kreisfläche $= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. Diesen Ausdruck, sagt Leibnitz, habe er um 1673 seinen Freunden mitgetheilt, und er halte ihn für den möglichst einfachsten, der dem Verstande sehr gefallen müsse. Doch hat Jakob Gregory in Schottland die von Leibnitz für den Kreis gefundene Reihe früher schon gehabt, aber nicht öffentlich, sondern nur in einem Briefe an Collins im Anfange des Jahrs 1671 mitgetheilt.

Leibnitz scheint auf diese Quadraturen nicht durch seine Differentialrechnung gekommen zu seyn, sondern durch die erklärte Transformation mit Zuziehung der von Mercator angewandten Methode bey rationalen Functionen. In dem gedachten Briefe gebraucht er auch bey dem Increment der Area nicht das Symbol der Differentiation, sondern den Buchstab β, den er eine unendlich kleine Größe

bezeichnen läßt. Erst in einem Briefe vom 21. Jun. 1677 an Oldenburg für Newton theilte Leibnitz eine Probe seiner neuen Rechnung mit, und macht eine Anwendung auf die Methode der berührenden, auch in dem Falle, da die Gleichung irrationale Größen enthält. Man kann nicht umhin zu bemerken, daß er in dem vorhergehenden Jahre zwey Briefe von Newton erhalten hatte, worin dieser ihm von seinen analytischen Entdeckungen ausführlich Nachricht ertheilt, doch aber ohne ihm nur einen Wink von der Methode zu geben.

Als im J. 1682 die Acta Eruditorum ihren Anfang nahmen, war Leibnitzens erster Beytrag dazu ein Aufsatz über die Quadratur des Kreises nach der vorher angeführten Formel durch die Tangente von 45 Grad. Es wird hier aber noch nichts von einer neuen Art Rechnung erwähnt. Dieses geschah zuerst in den Act Erud., Oct. 1684 in der Abhandlung: Nova methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. Hierin trägt er sie in der Form vor, die seitdem auf dem festen Lande üblich ist. Er zeigt, wie die Differentiale eines Products, eines Quotienten und einer Potenz von irgend einer Beschaffenheit ausgedruckt werden; erklärt auch, wie die Vorzeichen $\pm$ hierbey zu verstehen sind; daß $\partial v = 0$ einen größten oder kleinsten Werth der Ordinate anzeigt; daß ein mit ∂v gleichnamiges $\partial\partial v$ eine Concavität der Curve gegen die Axe, ein ungleichnamiges eine Convexität anzeige, (dieses ist umgekehrt zu nehmen, wie Leibnitz es selbst gelegentlich verbessert hat), und daß bey dem Übergange der Incremente vom Abnehmen zum Zunehmen, oder von diesem zu jenem, ein Wendungspunct vorhanden ist, wofern die Ordinaten hier nicht einen Übergang vom Wachsen zum Abnehmen, oder umgekehrt machen, das ist, wenn $\partial\partial v = 0$ ist, und weder v noch dv Null sind. (Dieses kann doch bey einem Wendungspuncte Statt finden, nämlich, wenn die Abscissenlinie durch den Wendungspunct geht, und hier zu-

gleich berührende ist). Leibnitz zeigt die Differentiation einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen an einem verwickelten Falle, und giebt für die Erfindung des Kleinsten ein Beyspiel aus der Optik, das Gesetz der Brechung nach einer gewissen teleologischen Annahme zu finden.

Im J. 1686 erschien in den A. E. von Leibnitz ein Aufsatz: de Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum. Hier gebraucht er das Zeichen $\int$ um eine aequatio summatrix auszudrücken, wie $\frac{1}{2}x^2 = \int x \partial x$; $a = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$, wo x der Sinusversus des Kreisbogens a ist; desgleichen $y = \sqrt{(2x - xx)} + \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2x - xx)}}$, wo x und y Coordinaten an der Cykloide sind. Solchergestalt könne man, bemerkt er, Gleichungen für Linien angeben, die man sonst der Berechnung nicht fähig gehalten hatte.

In diesem Aufsatze erzählt Leibnitz, wie ein Beweis des Satzes von der Größe der Oberfläche einer Kugel ihn auf das charakteristische Dreyeck an den Curven geleitet, und wie er allmählig die wahre Ergänzung der Algebra für transscendente Größen gefunden habe, seinen Calculum indefinite parvorum, den er auch Differential- oder summatorische, oder tetragonistische Rechnung nenne.

In demselben Aufsatze erwähnt Leibnitz noch seiner Methode undeterminirter Coefficienten. Newton hat sie auch gekannt. Er zeigt sie am Ende des zweyten Briefes an Oldenburg an, aber mit versetzten Buchstaben, die hernach Wallis in dem zweyten Theile seiner Werke. p. 393, verständlich gemacht hat. Newton bedient sich aber ihrer in seinen analytischen Werken nicht. Leibnitz giebt einige sehr gute und brauchbare Beyspiele in dem

Supplementum Geometriae practicae sese ad problemata transscendentia extendens, A E. 1693.

Bey dieser Gelegenheit mag auch bemerkt werden, daß Leibnitz die Methode erfunden hat, Differentialformeln zu integriren, worin der Factor des Differentials ein rationaler Bruch ist, nämlich durch Zerlegung in Brüche mit einfachen Nennern, wie $x + a$, wofern die Algebra dieses leisten mag, wodurch die Integration auf die Quadratur der Hyperbel (oder wie man jetzt auf dem festen Lande sagt, auf Logarithmen) gebracht wird. Er wendet diese Methode auch auf die Summirung von Brüchen mit endlichen Differenzen an, z. B. auf Brüche von der Form $\frac{1}{xx - 1}$, wodurch er die Summe der Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \text{etc.} = \frac{3}{4}$ findet. Der Aufsatz ist überschrieben: Specimen novum Analyseos pro scientia Infiniti, circa summas et Quadraturas. A. E. 1702.

Leibnitz machte von seiner Analysis des Unendlichen viele schöne Anwendungen auf schwere geometrische und mechanische Aufgaben, besonders solche, welche die Geometer seiner Zeit beschäftigten. Seine mathematischen Aufsätze sind in periodischen Schriften zerstreut; die meisten sind in den Actis Eruditorum befindlich. In dem dritten Bande seiner von Dütens gesammelten Schriften findet man sie bey einander, auch seinen mathematischen Briefwechsel, den mit Joh. Bernoulli geführten ausgenommen, der in zwey Quartbänden 1745 gesammelt ist. Leibnitz war ein allgemeiner Kopf, Rechtsgelehrter, Geschichtskundiger, Philosoph, Theolog, Sprachforscher, Mathematiker, Physiker und mehreres; ein ausgebreiteter Briefwechsel, öffentliche Geschäfte und Umgang mit der großen Welt nahmen einen beträchtlichen Theil seiner Zeit hin. Daher haben seine mathematischen Aufsätze nur die erste noch rohe Form der Entstehung; aber man sieht zu-

gleich an ihnen, daß er seine Ideen aus sich selbst nahm, und muß die Fruchtbarkeit und Geschmeidigkeit seines Geistes bewundern. Newtons analytische Schriften (von seinen Principien der mathematischen Naturwissenschaft, dem Hauptwerke aller Zeiten, ist hier nicht die Rede) sind systematisch, sehr klar, in den Gründen einleuchtend, allgemein in den Methoden, vielbefassend, und in der äußern Form vollendet. Newton lebte in der Stille seines Cabinets, bloß der Mathematik und ihrer Anwendung auf die Naturforschung, wobey ein paar fremdartige Beschäftigungen nicht in Anschlag kommen. Der blühende Zustand der Mathematik in England gewährte ihm schon in seiner Jugend Vortheile, die Leibnitz damals in Deutschland nicht hatte.

Die von Leibnitz bekannt gemachte Differentialrechnung, und die umgekehrte, welche Leibnitz die summatorische nannte, (wofür Joh. Bernoulli die Benennung, Integralrechnung, einführte), erhielten bald großen Beyfall. Insbesondere waren es die beiden Bernoulli, und der Marquis de L'Hopital, welche diese neue Rechnung auf mancherley Arten anwandten, und zugleich erweiterten. Die Form, welche Leibnitz ihr gegeben hatte, ward auf dem festen Lande allgemein angenommen. Die analytischen Schriften von Newton wurden später bekannt, da die von der Quadratur der krummen Linien erst 1704 erschien. In den Principien war die Analysis, wodurch Newton seine Sätze gefunden hatte, nicht sichtbar, weil er die Beweise nach synthetischer Methode abgefaßt, und alles zwar auf die letzten oder auf die ersten Verhältnisse hinausgeführt, aber die Fluxionenrechnung dabey nicht angewandt hatte. Nur in dem Lemma zum 7. Satze des zweyten Buchs kommt ein Satz aus dieser vor: Momentum genitae aequatur momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum et coefficientia continue ductis. Im 10. Satze werden die kleinen, zuletzt verschwindenden Unterschiede durch *o* bezeichnet. Ungeachtet Newton seine Fluxionenrechnung viel früher erfunden hatte, als Leibnitz

seine Differentialrechnung, so ward dieser doch fast durchgehends als Erfinder der neuen Rechnung des Unendlichen angesehen, sogar daß sie nach ihm die Leibnitzische Rechnung genannt wurde. England selbst lernte sie früher in der Form, welche Leibnitz ihr gegebeu hatte, kennen, als in der Newtonischen. Craig, ein Schottländer, gebrauchte in seiner Schtift: Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi, Lond. 1685, bey der Auflösung einer Aufgabe die Leibnitzische Differentialrechnung. In einer spätern Schrift: de Figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis, Londini 1693, rühmt er Leibnitzens Differentialrechnung als eine herrliche Erweiterung der höhern Geometrie, und gesteht, daß ohne dieselbe seine Untersuchungen ihm sehr schwer geworden seyn würden. Er gebraucht auch die Leibnitzische Bezeichnungsart. Bis dahin war also Newtons Fluxionen-Methode in England selbst nicht bekannt. Es war auch erst im J. 1693, daß Wallis in dem zweyten Theile seiner Werke, worin die Algebra enthalten ist, einiges davon öffentlich mittheilte.

Dies veranlaßte Wallis, daß er Newton ermahnte, die beiden Briefe an Oldenburg, welche Leibnitz mitgetheilt erhalten hatte, bekannt zu machen, weil seine Methode der Fluxionen unter dem Namen der Leibnitzischen Differentialrechnung mit großem Beyfall aufgenommen würde. Er bemerkte deshalb in der Vorrede zu dem ersten Theile seiner Werke, der 1695, später als der zweyte, erschien, ausdrücklich, daß die von Leibnitz sogenannte Differentialrechnung mit der Newtonischen Fluxionenrechnung, wovon er in der Algebra, in dem zweyten Theile seiner Werke, einen Abriß gegeben habe, überein komme. Leibnitz habe die Methode im J. 1676 in zwey Briefen von Newton mitgetheilt erhalten. Die beiden Briefe ließ Wallis in dem dritten Bande seiner Werke, 1699, abdrucken. Der Abriß, den er von der Fluxionen-Rechnung aus jenen Briefen in der Algebra giebt, möchte doch für sich unverständlich seyn.

Allein einige Jahre nachher behauptete Nicol. Fatio de Duillier aus Genf, der in England lebte, nicht allein, daß Newton lange Zeit vor Leibnitz die Rechnung des Unendlichen erfunden hätte, sondern fügte noch hinzu, daß er es denen, die Newtons Briefe und handschriftliche Abhandlungen gesehen hätten, überlassen wolle zu beurtheilen, was Leibnitz als zweyter Erfinder der Rechnung von Newton erborgt haben möchte. Dieses geschah in einer Schrift über die Linie des schnellsten Falles und das Solidum des geringsten Widerstandes, London 1699. Leibnitz antwortete auf diese für ihn sehr nachtheilige Äußerung ziemlich lebhaft, und gab zu verstehen, Duillier möchte es übel genommen haben, daß er ihn nicht unter denjenigen genannt hätte, von welchen die Aufgabe über die Linie des schnellsten Falles aufgelöset war, oder wahrscheinlich hätte aufgelöset werden können, wenn sie sich darum bemüht hätten. Er bezeugt die größte Hochachtung für Newton, und beruft sich darauf, daß dieser selbst in den Principien der Naturwissenschaft (Schol. Lemmatis 2. prop. 7. L. II.) im J. 1687 anführe, von ihm vor zehn Jahren eine Methode mitgetheilt erhalten zu haben, die von der seinigen kaum anders als in den Ausdrücken und Bezeichnungen, und noch in der Vorstellungsart von der Entstehung der Größen verschieden sey. Er habe im J. 1684, als er seine Rechnung bekannt machte, von Newtons Erfindung nichts weiter gewußt, als was dieser ihm von dem Gegenstande derselben angezeigt hätte.

Vermuthlich wäre durch diesen Angriff auf Leibnitzens Ehre, der von Privatabsichten herzurühren scheinen mußte, das gute Vernehmen zwischen Newton und Leibnitz nicht gestört worden, wenn nicht in Deutschland selbst bald darauf die Veranlassung zu einem heftigen gelehrten Prozesse, der fast national ward, gegeben worden wäre. Als Newtons Tractat von der Quadratur der krummen Linien mit seinem Werk über die Optik 1704 erschienen war, druckte sich der Recensent dieser Schriften in den Act. Erud. 1705 über Newtons Erfindungsrecht an die

Infinitesimalrechnung etwas zweydeutig aus. Anstatt der Leibnitzischen Differentiale, sagte er, werden von Newton Fluxionen gebraucht, und sind immer gebraucht worden, wovon er sowohl in seinen Principien als in andern Schriften eine schöne Anwendung macht, so wie auch Honoratus Fabri in seiner Synopsis geometrica die Cavalerische Methode mit der fortschreitenden Bewegung vertauscht hat (substituit). Die Verehrer Newtons legten diese Stelle dahin aus, daß so wie Fabri seine Methode von Cavaleri entlehnt habe, so hätte auch Newton seine Fluxionen-Rechnung von Leibnitz genommen. Leibnitz erklärte zwar, daß dieses nicht der Sinn sey. Allein Keill, Professor der Astronomie zu Oxford, behauptete nun sogar in den Philosophical Transactions, 1708, Newton sey nicht bloß der Erfinder der Fluxionen-Methode, sondern Leibnitz habe nach dieser die seinige gebildet, mit Veränderung der Ausdrücke und der Bezeichnung.

Leibnitz beschwerte sich wegen dieser Beschuldigung bey der Societät zu London. Keill suchte seine Behauptung ausführlich zu rechtfertigen. Als Leibnitz seine Beschwerde bey der Societät wiederholte, setzte diese einen Ausschuß nieder, um die in ihrem Archiv befindlichen Briefe und Schriften, welche über die Streitfrage Licht geben könnten, durchzusehen, und der Societät davon Bericht zu erstatten. Der Bericht der Commissarien fiel dahin aus, daß die Differential- und Fluxionen-Methode wesentlich nicht verschieden seyn, und daß die eigentliche Frage hier sey, nicht, wer diese oder jene Methode erfunden habe, sondern wer der erste Erfinder der Methode sey. Sie glaubten, daß diejenigen, welche Leibnitz für den ersten Erfinder hielten, wenig oder nichts von seinem frühen Briefwechsel mit Collins und Oldenburg erfahren haben, und nicht wissen möchten, daß Newton die Methode schon seit länger als funfzehn Jahre erfunden gehabt hätte, wie Leibnitz sie in den Actis Eruditorum bekannt zu machen anfieng. Daher habe Keill durch seine Behauptung, daß Newton der erste Erfinder sey, gar nichts beleidigendes gegen Leibnitz gesagt. Ob Leibnitz auf seine

Methode durch sich selbst gekommen sey, lassen sie ganz unberührt; inzwischen geben sie doch in den drey ersten Artikeln des Berichts zu verstehen, daß er bey seiner zweymahligen Anwesenheit in England, und durch den Briefwechsel, den er mit Newton und Collins mittelbar durch Oldenburg unterhalten, hinlängliche Winke von Newtons Methode bekommen haben möchte. Die Societät ließ alle auf die Streitfrage sich beziehenden Briefe, zum Theil Stellenweise, mit der Newtonischen Schrift: Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, die Collins im J. 1669 durch Barrow mitgetheilt erhalten hatte, nebst dem Berichte der Commission abdrucken, und an die vorzüglichsten Mathematiker in Europa versenden. Der Titel ist: Commercium epistolicum D. Joh. Collins et aliorum de Analysi promota, jussu Societatis regiae in lucem editum. Londini 1712. 4. Diese Ausgabe ist gar nicht in den Buchhandel gekommen; auch sind nur wenige Abdrücke gemacht, daher sie sehr selten ist. Es ist 1725 eine zweyte Ausgabe erschienen, welche eine sehr ausführliche, gegen Leibnitz bittere Recension der Sammlung aus den Transactionen im J. 1715 enthält. Der Titel dieser Ausgabe ist: Commercium epistolicum de varia re mathematica inter celeberrimos praesentis saeculi Mathematicos, ... Londini, 1725. 8. Diese ist in dem vierten Bande der Horsleyischen Ausgabe von Newtons Werken eingerückt. In derselben sind viele gegen Leibnitz gerichtete Anmerkungen enthalten. Herr Professor Pfleiderer hat die Güte gehabt, auf meine Bitte die Original-Ausgabe mit dem Abdrucke in der Horsleyischen Ausgabe zu vergleichen. Es sind hier einige kleine Zusätze mit wenigen Worten gemacht, die aber unbedeutend sind, außer einem einzigen, worin gesagt wird, daß Leibnitz irrationale Exponenten der veränderlichen Größen, die Newton in einem Beyspiele gebraucht, in Fluenten umgewandelt, und daraus die Exponentialrechnung gebildet habe, eine sehr ungegründete und unbillige Vermuthung. In der Recension wird gerade zu behauptet, Leibnitz habe seine Differen-

tialrechnung ganz von Newtons Fluxionen-Methode hergenommen.

Ein Gutachten über das Commercium epistolicum, worin die Vermuthung geäußert wird, daß Newton seine Fluxionenrechnung gar wohl nach der Differentialrechnung gebildet haben möchte, und ein Fehler, den Newton wirklich in Absicht auf die Werthe der höhern Differentiale begangen hatte, mit zum Grunde dienen soll, ward ohne Benennung des Verfassers und Ortes gedruckt, auch ohne des Verfassers, Joh. Bernouilli's, Wissen, der Leibnitzen ausdrücklich ersucht hatte, ihn nicht in den Handel zu ziehen. (Das Original ist in dem Commercio philos. et mathem. Leibnitzii et Jo Bernoulli, T. II. p. 305 befindlich). Keill antwortete darauf, wie leicht zu erachten ist, heftig. Chamberlayne in England suchte Newton und Leibnitz auszusöhnen, allein ohne Erfolg. Leibnitz scheint vielmehr das Mißverständniß aufs neue rege und größer gemacht zu haben, durch einen Brief an den Abbé Conti, der sich damahls in England aufhielt, und der gemeinschaftliche Freund seyn wollte. Er beschwerte sich darin, daß man durch gezwungene Auslegungen seine Wahrheitsliebe zweifelhaft zu machen suchte, und die Streitfrage veränderte, indem man die Reihen herbeyzöge, worin er Newton den Vorgang nicht streitig mache; ja er gab zu verstehen, daß Newton die Charakteristik und den Algorithmus für unendlich kleine Größen vor ihm nicht möchte gehabt haben, wie Bernouilli ganz richtig geurtheilt hätte. Hier entdeckte er den Verfasser des vorher angeführten Gutachtens. Zugleich breitete er sich umständlich über Newtons physikalische Grundsätze aus, die er für befremdend und unhaltbar erklärte. Der Brief ward Newton mitgetheilt, da Leibnitz es Conti erlaubt hatte. Newton antwortete hierauf in einem an Conti gerichteten Schreiben, welches Leibnitz erwiederte, worauf Newton die Vertheidigung wieder ausführlich beantwortete. Tantaene animis coelestibus irae! mag man zwar bey diesem Briefwechsel sagen; doch ward der Streit auf eine sehr gemäßigte Art geführt in Verglei-

chung mit den schriftstellerischen Balgereyen zu unsern Zeiten. Leibnitzens Tod, der am 14. Novemb. 1716 erfolgte, machte dem Streit ein Ende. Die Acten dieses gelehrten Prozesses findet man in dem vorher angeführten Commercium epistolicum, in dem dritten Theile von Leibnitzens Werken, in dem Recueil de diverses pieces sur la philosophie, etc. par Des Maizeaux, T. II. und in dem Journal literaire, das damahls im Haag heraus kam. Eine ausführliche Relation daraus ist in Leibnitzens Lebensbeschreibung von Jaucourt anzutreffen, und dem gedachten Theile von seinen Werken beygefügt. Die Lebensbeschreibung selbst ist der von Neufville besorgten Ausgabe der Theodicee, Amsterdam 1734, ohne Benennung ihres Verfassers vorgesetzt. Wer der Verfasser der Recension in den Actis Erud. die zu dem Streite den nächsten Anlaß gegeben, gewesen sey, ist nicht bekannt geworden. Leibnitz läßt in den Briefen, wo er den wahren Sinn der zweydeutigen Stelle erklärt, sich gar nicht darüber aus, ob er selbst oder ein anderer Verfasser sey. In dem Exemplar der Actorum, das auf der Göttingischen Bibliothek befindlich ist, und die Namen der Recensenten beygeschrieben enthält, wird G. G. Leibnitzius als Verfasser angegeben, nach Kästners Bericht in der Anal. des Unendl. 3te Ausg. S. 44.

Gegenwärtig möchte fast allgemein über diese durch den Gegenstand und durch die Hauptpersonen merkwürdige Streitfrage das Urtheil dahin ausfallen, daß Newton ohne allen Zweifel seine Fluxionen- und Fluentenrechnung lange vorher, als Leibnitz seine Differentialrechnung bekannt machte, erfunden habe; daß aber auch Leibnitz von dem Verdachte, die Fluxionenrechnung sich zugeeignet, und nur in der Form verändert zu haben, gänzlich frey zu sprechen sey. So urtheilen Montücla in der ersten und zweyten Ausgabe der Geschichte der Mathematik; d'Alembert in der Encyclopédie méthodique; la Croix und Bossut in den Vorreden zu ihren Traités de calcul différentiel et intégral. Bossut ist in der Vertheidigung der Ansprüche von Leibnitz umständlich.

Auch Engländer treten diesem Urtheile bey, als Waring in seinen meditationibus analyticis, Cantabr. 1785, (s. Kästners Anal. des Unendl. S. 49. und Götting. gel. Anz. 1786. S. 700.). Hutton in seinem mathem. u. physik. Wörterbuche äußert zwar, man habe vielen Grund zu vermuthen, daß Leibnitz einige ihm mitgetheilte Papiere und Aufsätze benutzt haben möge, erinnert aber hernach, daß auch nach einiger Urtheil starke Gründe vorhanden seyn, zu glauben, daß Leibnitz seine Methode selbst erfunden habe. Denn in seiner Theoria motus abstracti vom J. 1671, ehe er etwas von Newtons Sachen gesehen haben konnte, nehme er schon unendlich kleine Größen an, die unter sich ungleich seyn, welches einer der vornehmsten Grundsätze seiner Methode sey.

Leibnitz ist vielleicht durch den zweyten Brief von Newton, den vom 24. Octob. 1676, worin viele wichtige Mittheilungen, aber ohne Beweis und Nachricht von ihren Gründen, gemacht waren, gereizt worden, der Sache anhaltend nachzudenken, und seine Ungeduld, deren er sich irgendwo selbst anklagt, zu bezwingen. Den Zeitpunct von 1676 giebt er selbst, in dem oben angeführten Briefe an die Gräfinn von Kielmannsegg, an, so viel er sich damahls noch erinnern konnte. Was er übrigens daselbst von der Art, wie er zu seiner Differentialrechnung gekommen, erzählt, stimmt sehr wohl zu dieser Vorstellung. Darum hat er aber nicht seine Rechnungsmethode nach der Newtonischen gebildet, da er von dieser nichts erfahren hatte, und vielmehr, wie aus seinem Briefe vom 27. August 1676 erhellt, schon die Differenzenrechnung zu Quadrirungen, bey rationalen Ordinaten, nach Mercators Verfahren bey der Hyperbel, gebrauchte. Man braucht daselbst in dem Werthe des Rectangels nur dx für β zu setzen, so hat man das Differential einer Area. Eben daselbst kommt die Integration der Formel $\partial a \,.\, \cos a$ als Summirung vor, nachdem für $\cos a$ eine Reihe gesetzt ist, nur daß hier noch nichts von Differentialen und deren Bezeichnung sich findet.

Das Zeugniß, welches Newton in dem Scholium des Lemma II. Princip. L. II. Leibnitzen giebt, ist von Wichtigkeit, wenn gleich Newton in der Folge, als er mit Leibnitz zerfallen war, es nur als ein Verwahrungsmittel für sein Eigenthum angesehen haben will. Denn es zeigt, daß er Leibnitzen nichts mitgetheilt hatte, was auf seine Methode hätte leiten können, und daß er auch voraussetzte, es sey demselben von andern nichts eröffnet worden. Es ist ein Zug von Newtons feiner und edler Denkungsart, daß er einem andern, ja einem Ausländer, das Mitrecht an eine Erfindung öffentlich versichern will. Die erste Ausgabe der Principien ist vom J. 1687. In der zweyten vom J. 1713 zu Cambridge, wovon die zu Amsterdam 1714 ein Nachdruck ist, ist jenes Zeugniß noch stehen geblieben; aber in der von 1726 ist es durch den Herausgeber, Pemberton, weggelassen, gleichsam, als wenn Newtons Freunde ein für ihn nachtheiliges Actenstück hätten vernichten wollen.

Die beiden Briefe Newtons vom J. 1676 an Oldenburg für Leibnitz enthalten nur Resultate seiner Methode, nichts von ihr selbst. Ein kurzer Brief von Newton an Collins, der Leibnitzen im J. 1676 mitgetheilt ist, enthält nur die Formel für die Subtangente an einer Curve, bloß in einem leichten Falle, woraus sich noch nichts von dem Verfahren selbst ergab. Die Form seiner Infinitesimal-Rechnung mußte er offenbar selbst erfinden; die Methode aber auch, welches ihm freylich dadurch erleichtert ward, daß er manche Sätze, die dadurch schon in England gefunden waren, mitgetheilt bekommen hatte.

Man hat gesagt, Leibnitz möchte wohl, als er in London war, die erste Schrift von Newton, Analysis per aequationes, etc. bey Collins gesehen haben. Eine Vermuthung ist kein Beweis. In dieser Schrift wird noch keine Vergleichung der verschwindenden Differenzen gemacht, daher auch noch nichts von Fluxionen darin erwähnt wird. Die darin am Ende vorgetragene Methode, krummlinichte Figuren zu quadriren, ist der von Fermat für berührende an einer Curve gebrauchten ganz ähnlich,

wie die oben gegebene Nachricht von dieser Schrift es zeigt. Eine Abschrift von derselben hat Leibnitz nicht erhalten. Denn in einem Briefe vom 27. Aug. 1676 fragt er an, wie Newtons Reversions-Methode beschaffen sey, als in dem Falle, wenn die Zahl aus dem Logarithmen gefunden werden soll. Dieses ist in der Abhandlung deutlich gewiesen, da von der Reihe für die Zahl die ersten fünf Glieder darin berechnet sind.

Man kann dagegen fragen, wo die Aufsätze, welche Leibnitz bey seiner zweyten kurzen Anwesenheit in London Collins für Newton zugestellt hat, geblieben seyn. Jener erwähnt sie in einem Briefe an Newton. Vielleicht hätten diese noch einige Aufschlüsse gegeben.

So wie man ohne Bedenken Newtons Nachrichten von seinen Erfindungen Glauben beymißt, so muß billig dasselbe auch für Leibnitz geschehen. Ein Mann von dem großen, viel umfassenden, wirksamen Geiste, wie Leibnitz, brauchte nicht fremde Erfindungen sich zuzueignen, und seine Denkungsart war zu edel, oder wenigstens zu stolz, um sich dazu herabzulassen Die Leichtigkeit, womit Leibnitz verschiedene schwere Aufgaben aus der Geometrie und Mechanik durch die Analysis des Unendlichen auflösete, zeigt, daß er nicht eine erborgte Methode befolgte, von welcher damahls noch wenig, oder eigentlich gar nichts bekannt gemacht worden war.

Ungeachtet mancherley fremdartiger Beschäftigungen suchte Leibnitz seine neue Analysis weiter zu treiben, und ihre Wichtigkeit durch Anwendungen auf schwere Aufgaben zu zeigen. Hiezu vereinten sich bald mit ihm zwey vortreffliche Männer, die beiden Brüder, Jakob und Johannes Bernoulli. Jener war zuerst der Lehrer seines Bruders, der bald mit ihm zu wetteifern im Stande war, und bey einem etwas eigensüchtigen Charakter sich sogar auf eine beleidigende Art über ihn zu erheben suchte. Der ältere Bernoulli besaß mehr Erfindungskraft, die er durch manche ihm eigenthümliche Untersuchungen bewiesen hat; dagegen der jüngere größere Gewandtheit in der Be-

handlung schwerer Fragen hatte. Dieser hat mehr geliefert als jener, ist aber auch 30 Jahre älter geworden als sein Bruder, der in einem Alter von 50 Jahren starb. (Bossüt in der Vorrede zu seiner Differential- und Integral-Rechnung).

Diesen beiden großen Analysten ist man eine meisterhafte, von Leibnitzen selbst anerkannte und öffentlich gerühmte Bearbeitung der neuen Rechnung, und ihre Verbreitung besonders auf dem festen Lande schuldig. Es wurde, nach Leibnitzens Vorgang, nun gewöhnlich, daß die Mathematiker sich gegenseitig schwere Aufgaben vorlegten. Dieses vermehrte die Theilnahme an der Wissenschaft, indem es zugleich ein vortreffliches Übungsmittel war. Unter diesen Aufgaben zeichnen sich aus die über die Isochrona, und Isochrona paracentrica von Leibnitz, über die Kettenlinie von Jakob Bernoulli, über die Linie des schnellsten Falles (Brachystochrona) von Joh. Bernoulli; das problema isoperimetricum von dem ältern Bernoulli, wodurch dieser die Zudringlichkeiten seines Bruders zurückzuhalten suchte. Auch ein braver Veteran in der alten Geometrie, Viviani, legte den neuen Analysten zur Prüfung ihrer Methode, die unter dem Namen Aenigma Florentinum bekannte Aufgabe vor. Leibnitz und Jakob Bernoulli löseten sie noch an demselben Tage auf, an welchem sie das Programm von Viviani erhielten. Der Marquis de l'Hopital, ein Zögling des Johannes Bernoulli, trug zur Bekanntmachung der neuen Analysis viel bey, durch seine Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, à Paris 1696, 181 pag. in 4. zweyte ungeänderte Auflage 1715, ohne den Namen des Verfassers. Sie enthält nur die Differentialrechnung mit ihrer Anwendung auf geometrische Fragen. Stone übersetzte sie ins Englische, und fügte die Integralrechnung hinzu. The method of fluxions both direct and inverse. London 1730. Die Integralrechnung aus diesem Werke ist ins Französische übersetzt. Analyse des infiniment petits, comprenant le Calcul intégral, par Rondet, à Paris 1735.

162 pag. in 4. Joh. Bernoulli hat an diesem Werke viele Fehler gerügt. Opp. T. IV. pag. 169—192. Zur Fortsetzung jenes Werkes ist auch bestimmt Traité du Calcul intégral par M. de Bougainville, 2 vols, à Paris 1754. 56. 326. und 246 pag. in 4. Die ältern Methoden sind darin deutlich und ordentlich vorgetragen. Als eine Fortsetzung des von l'Hopital gelieferten Werks können auch die Lectiones mathematicae von Joh. Bernoulli, welche dieser bey seinem Aufenthalte in Paris 1691 und 1692 für den Marquis ausgearbeitet hat, angesehen werden. Sie sind aber erst in der Sammlung der Bernoullischen Werke, im dritten Bande, 1742 im Druck erschienen. Vielleicht hatte Bernoulli auch Antheil an l'Hopitals Werke; er hätte nur nicht nach dessen Tode seine Ansprüche daran geltend zu machen suchen sollen.

Die Leibnitzische Differentialrechnung erregte anfangs einige Bedenklichkeit wegen der unendlich kleinen Größen, die darin angenommen werden. Nieuwentiit, der Verfasser eines großen physiko-theologischen Werkes, schrieb Considerationes circa Analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis. Amstel. 1694, und considerationes secundas. 1696. Es war ein Mißverstand, daß er die Differentiale höherer Ordnungen nicht zugeben wollte. Leibnitz zeigte ihm den Grund davon leicht. Nieuwentiit macht in der erstern Schrift, S. 8, gegen Barrows Methode der berührenden den Einwurf, daß das Verhältniß der unendlich kleinen Differenzen der Coordinaten entweder gar keines oder das der Gleichheit seyn müsse. Doch hat dieser Mann eine Analysis Infinitorum, Amstel. 1695, geschrieben. Die Bescheidenheit, womit er seine Bedenklichkeiten vorträgt, erwirbt ihm Recht auf Nachsicht, wenn sie nicht, nach den neuesten Principien, für Bewußtseyn von Schwäche zu halten ist.

In der französischen Akademie der Wissenschaften entstand ein lebhafter und langwieriger Streit über die

neue Infinitesimalrechnung. Der vornehmste Gegner war Rolle, ein sehr geschickter Algebraist, der aber für seine Meynungen ganz besonders eingenommen, sehr übereilt und mißgünstig gegen andere wegen ihren Erfindungen war. Er wollte zeigen, daß die Differentialrechnung bey den berührenden in vielfachen Puncten, und in einigen Fällen des Größten und Kleinsten kein Genüge thue, oder gar irriges angebe. (Remarques de M. Rolle touchant le problême général des tangentes, à Paris 1703. 47 pag. 4.). Varignon und Saurin brachten ihn endlich von seinen Vorurtheilen zurück. Er beichtete sogar, daß er auf einiger anderer Antrieb die Differentialrechnung angegriffen hätte.

Späterhin (1734) stand Berkley, Bischof von Cloyne, der warme Anpreiser des Theerwassers und Gegner der Wirklichkeit der Materie, gegen die Mathematik überhaupt und die Infinitesimalrechnung insbesondere auf. In einer Schrift betitelt, the Analyst, behauptete er, die Geometer seyn gegen die Lehren der Religion ungläubig, und glaubten doch an die Geheimnisse der Fluxionenrechnung, die auf dunkle und irrige Grundsätze gebauet sey, und nur in so fern richtige Resultate gebe, als ein Irrthum den andern aufhöbe. Hierauf antworteten Middleton und Smith, beide Professoren zu Cambridge, in einer Schrift: Geometry no friend to infidelity, by Philalethes Cantabrigiensis, London 1734; hernach Wilson, Professor der Mathematik zu Dublin, und Benjamin Robins, der Verfasser einer wichtigen Schrift über die Geschützkunst. Der letztere gerieth mit den beiden zuerst genannten in einen lebhaften Streit über die Erklärung von Newtons Infinitesimalrechnung. Die Schrift von Robins (Discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's method of fluxions, and of prime and ultimate ratios) nebst seinen Vertheidigungsschriften ist in dem zweyten Bande der Sammlung seiner Abhandlungen, London 1761, 2 Bde. enthalten. In diesem findet sich auch vieles über den Streit zwischen Newton und

Leibnitz, nebst ungünstigen Äußerungen über die Differentialrechnung und die Analysten auf dem festen Lande.

Durch diesen neuen Angriff auf die Rechnung des Unendlichen scheint Maclaurin veranlaßt worden zu seyn, sein berühmtes Werk über die Fluxionen zu verfassen. (A treatise of fluxions, Edinburgh, 1742. 2 vols. 4. zusammen 754 S.). Sein Zweck war, die Methode der Fluxionen auf eine eben so augenscheinliche und unwidersprechliche Art zu begründen, als die alten Geometer bey ihren Beweisen verfahren, und dabey von leichtern Begriffen und Sätzen auszugehen, als der Erfinder der Fluxionen nöthig gefunden hatte. Dieses Verfahren macht die Beweise weitläuftig und sehr anstrengend. Allein, wenn man sich schon eine zuverlässige Kenntniß der Infinitesimalrechnung sonst erworben hat, wird man das scharfsinnige Werk, besonders wegen der Anwendungen in der mathematischen Physik mit großem Nutzen lesen, und dabey das bloß zur Methode gehörige übergehen können.

Die Exponentialrechnung ward sehr bald nach der Differentialrechnung erfunden, sowohl von Joh. Bernoulli als Leibnitz, unabhängig von einander, zufolge des Commerc. epist. T. I. p. 8, 10. u. m. Bernoulli hatte krumme Linien erdacht, in deren Gleichungen die eine der Coordinaten der Exponens einer Potenz ist. Diese nannte er curvas percurrentes, weil darin diese Potenz alle mögliche Dimensionen durchläuft, und daher auch die Rechnung, welche sich damit beschäftigt, calculum percurrentem, wofür hernach die schicklichere Benennung, calculus exponentialis eingeführt ist. Die erste Abhandlung darüber von Bernoulli erschien in den Act. Er. 1697. Mart. In den Opp. T. I. p. 179.

Leibnitz erweiterte die Differentialgleichung noch dahin, daß er in einer Differentialgleichung für eine Function von x eine der beständigen Größen als veränderlich betrachtete, und daraus das Differential der Function für ein gegebenes x, zufolge der Veränderung der zuerst als unveränderlich betrachteten Größe, herleitete. Z. B. das Differential des Bogens einer Curve ist ge-

geben; man sucht das Differential des Bogens, der zu derselben Abscisse mit jenem gehört, in Beziehung auf eben denselben, bey einer unendlich kleinen Veränderung einer der Constanten in der Gleichung für die Curve. Hieraus leitete Leibnitz eine Methode her, eine krumme Linie zu ziehen, die auf einer stetigen Folge von krummen Linien einerley Art, mit gemeinschaftlicher Axe, und einem gemeinschaftlichen Puncte für alle auf derselben, gleiche Bogen von jenem Puncte an abschneidet Die Veranlassung zu dieser Untersuchung hatte Joh. Bernoulli gegeben in einem Briefe an Leibnitz, worin er eine allgemeine Methode wünscht, berührende an eine Curve zu ziehen, deren Puncte durch Quadraturen stetig neben einander geordneter Curven bestimmt werden. (Quadraturen sind Functionen, wie Längen, Flächenräume, Fallzeiten, die nicht unmittelbar in endlichen Größen, sondern durch Integration einer Differentialfunction gegeben werden). Leibnitz nannte diese Methode differentiatio de curva in curvam. (Commerc. epist. LIX. LX. im J. 1697). Er bemerkt, daß dieses Verfahren von größerer Wichtigkeit sey, als man zuerst vermuthen möchte; daher es wohl gethan seyn würde, andern die Frage nicht vorzulegen, noch bekannt zu machen, daß er und Bernoulli sie aufzulösen wüßten, sondern zu warten, bis daß sie selbst die Untersuchung hinlänglich ausgeführt hätten. Bernoulli bezeugte große Freude über diese neue analytische Aussicht, und zugleich ein freundschaftliches Mißvergnügen, daß Leibnitz das Geheimniß ganz entdeckt hätte, dem er selbst auch auf die Spur gekommen sey. Dies war bey der Untersuchung über die Synchrona geschehen. Nach Leibnitzens Tode maaßte Bernoulli sich die Ehre der Miterfindung der Methode an, wovon er freylich viele schöne Anwendungen gemacht hat. Sein Bruder war aber auch auf diese Methode gekommen, wie zwey Aufsätze in den Act. Erud. May 1698, und ein anderer, im Journ. des Sc. Aug. 1693. (Opp. T. II. p. 785. 796. 829.) zeigen. In dem letztern ist die Auflösung der Aufgabe, die berührenden an eine Linie zu ziehen, welche an unendlich

vielen Curven von einerley Art gleiche Bogen abschneidet, in einem Anagramm versteckt, dessen Erklärung a. a. O. p. 1021 sich findet. S. Differentialgleichung und Trajectoria.

Die Entwickelung der Functionen einer veränderlichen Größe mittelst der successiven Differentiale, welche Taylor lehrte, ward das Band zwischen der Analysis des Unendlichen und des Endlichen, indem sein Lehrsatz zeigt, wie man durch die unendlich kleinen Differenzen zu der endlichen Differenz einer Function in Beziehung auf die endliche Differenz der Functionalgröße gelangen könne, welches bey transscendenten Functionen wichtig ist.

Da zwar zu jeder Gleichung zwischen endlichen Größen die Differentialgleichung gefunden werden kann, aber nicht umgekehrt jede Differentialgleichung aus einer Gleichung zwischen endlichen Größen entstanden seyn mag, so ist es wichtig, bey einer vorgegebenen Differentialgleichung mit Gewißheit bestimmen zu können, ob sich zu ihr eine Integralgleichung finden lasse, oder ob es nothwendig sey, ihr eine andere Form zu geben, wie durch Zufügung eines Factors, damit sie nun aus einer Gleichung zwischen endlichen Größen entstanden seyn könne. Man hatte fast funfzig Jahre hindurch mancherley künstliche Integrationen ausgeführt, ohne darauf bedacht zu seyn, die vorläufige Bedingung der Integrabilität fest zu setzen. Man hatte in den Fällen, wo eine Differentialgleichung widerspänstig war, ihre Form geändert, und sie auf solche Art oft aufgelöset. Erst gegen das J. 1740 entdeckte man die Bedingungen der Integrabilität der Differentialgleichungen. Dieses geschah fast zu gleicher Zeit von Euler, Fontaine und Clairaut. Euler ist in der That der erste gewesen, der diese Bedingungen gefunden hat, wie Bossut in der Einleitung zu seinem Werke über die Differential- und Integralrechnung einräumt. Die beiden andern Geometer haben aber von dem, was Euler in seiner Mechanik schon beygebracht hatte, nichts gewußt.

Die Differentialrechnung und ihre Anwendungen ausführlich zu studiren, dienen

Euleri Institutiones Calculi differentialis. Berol. 1755. 4. welche immer noch für ein Hauptwerk erkannt werden.

Segneri elementa Analyseos Infinitorum. P. I. II. Halae 1761. 63. 8.

Tempelhoff Analysis des Unendlichen. Erster Theil. Berlin 1770. 8. Die Integralrechnung ist nicht herausgekommen.

Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral par *Lacroix*, à Paris, T. I. an V. (1797). 4.

Differentialformeln sind analytische Ausdrücke, die eine Function einer veränderlichen Größe (x) mit ihrem Differential multiplicirt enthalten. Z. B.

$$x^3 \partial x;\ (a + bx)^2 \partial x;\ (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \partial x.$$

Eine solche Formel ist wegen des Factors ∂x, der einzeln genommen keine Größe bedeuten kann, ebenfalls keine Größe, die sich auf irgend eine Art angeben läßt; sie bezieht sich aber auf ein anderes Differential (∂y), so daß der Factor von ∂x der Differentialquotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist, oder mit la Grange zu reden, die abgeleitete erste Function einer ursprünglichen von x. Der Zweck bey diesem Artikel ist, solche Differentialquotienten analytischer Functionen zu finden, die als Grundformeln für zusammengesetztere dienen, um die Integration der letztern auf die von jenen zu bringen.

I. Differentiale algebraischer Functionen.

1. Es sey $y = x^m$, so ist $\partial y = m x^{m-1} \partial x$.

Denn es verändern sich y um Δy, wenn x sich um Δx verändert, so ist $y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$, und

$$\Delta y = m x^{m-1} \Delta x + \frac{m.m-1.}{1.2} x^{m-2} \Delta x^2$$

$+ \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} x^{m-3} \Delta x^3 +$ etc. (Differenzenrechnung); also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m x^{m-1} + \frac{m.m-1.}{1.2} x^{m-2} \Delta x + \text{etc.}$$

Der von Δx unabhängige Theil dieses Quotienten ist $m x^{m-1}$; dieser wird durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet, (s. Differentiale), und so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = m x^{m-1}$. Der Bequemlichkeit im Schreiben und Aussprechen willen setzt man dafür $\partial y = m x^{m-1} \partial x$, wobey aber ∂y und ∂x nicht für absolute Größen zu nehmen sind.

$$y = x^3 \qquad \partial y = 3x^2 \partial x$$
$$y = x^2 \qquad \partial y = 2x \partial x$$
$$y = x \qquad \partial y = \partial x$$

$$y = x^{-1} \qquad \partial y = - x^{-2} \partial x$$
$$y = x^{-2} \qquad \partial y = -2x^{-3} \partial x$$
$$y = x^{\frac{1}{2}} \qquad \partial y = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \partial x$$
$$y = x^{-\frac{1}{3}} \qquad \partial y = -\tfrac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} \partial x.$$

Ein negativer Werth eines Differentials bedeutet, daß die dazu gehörige Größe abnimmt, wenn die dazu gehörige zunimmt. Das Differential $x^{-1} \partial x$ oder $\frac{\partial x}{x}$ entsteht aus keiner algebraischen Function, sondern aus der transcendenten, log. nat. x.

2. Es sey

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \text{etc.}$$

so ist

$\partial y = b\partial x + 2cx\partial x + 3ex^2\partial x + 4fx^3\partial x + \text{etc.}$

Denn man suche zuerst Δy, lasse in dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ alles von den Veränderungen abhängige weg, und multiplicire darauf den Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ und dessen Werth durch ∂x.

3. Es seyn t und u irgend zwey Functionen von x, und $y = tu$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial x},$$

oder auch $\partial y = u\partial t + t\partial u$.

Denn es verändere sich y um Δy, wenn t um Δt, und u um Δu sich verändert. Es ist demnach $y + \Delta y = (t + \Delta t)(u + \Delta u)$, und $\Delta y = u\Delta t + t\Delta u + \Delta t . \Delta u$. Dividirt man mit der für x gehörigen Veränderung Δx, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta t}{\Delta x} + t\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta t . \Delta u}{\Delta x}.$$

Der von den Veränderungen unabhängige Differentialquotient ist $\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial x}$, da das letzte Glied $\frac{\Delta t . \Delta u}{\Delta x}$ immer von der einen oder der andern Veränderung Δt oder Δu abhängig bleibt, man mag darin den Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$, oder $\frac{\partial t}{\partial x}$, jenen für $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, oder diesen für $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ setzen. Behandelt man die Diffe-

rentialzeichen wie endliche Größen, so läßt man den Divisor ∂x weg, und es ist $\partial y = u\partial t + t\partial u$.

4. Es seyn t, u, v, Functionen von x, und $y = tuv$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = uv\frac{\partial t}{\partial x} + tv\frac{\partial u}{\partial x} + tu\frac{\partial v}{\partial x},$$

oder $\partial y = uv\partial t + tv\partial u + tu\partial v$.

Der Beweis ist dem vorher geführten ähnlich.

5. Es seyn wiederum t und u Functionen von x, und $y = \frac{t}{u}$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{u\partial t : \partial x - t\partial u : \partial x}{u^2},$$

$$\text{oder } \partial y = \frac{u\partial t - t\partial u}{u^2}.$$

Denn es ist $y + \Delta y = \frac{t + \Delta t}{u + \Delta u}$, daher

$\Delta y = \frac{u\Delta t - t\Delta u}{u(u + \Delta u)}$, und

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta t : \Delta x - t\Delta u : \Delta x}{u(u + \Delta u)}$. Die von den Veränderungen unabhängigen Differentialquotienten sind $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, welche man für die ihnen zustimmenden $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, etc. zu setzen hat. Im Divisor wird Δu weggelassen, damit dieser, und dadurch der Bruch selbst, nicht von Δu abhangen. Mit $u + \Delta u$ dividiren, ist mit $\frac{1}{u} - \frac{\Delta u}{u^2} + \frac{\Delta u^2}{u^3} -$ etc. multipliciren. Von diesem Factor darf in dem Differentialquotienten nur das

erste Glied $\frac{1}{u}$ genommen werden. Multiplicirt man in dem Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{u \partial t : \partial x - t \partial u : \partial x}{u^2}$ auf beiden Seiten mit ∂x wie mit einer eigentlichen Größe, so hat man

$$\partial y = \frac{u \partial t - t \partial u}{u^2}.$$

6. Exempel. Es sey

$$y = \frac{a + bx}{\alpha + \beta x}, \text{ so ist } \partial y = \frac{b\alpha - a\beta}{(\alpha + \beta x)^2} \partial x.$$

7. Wenn der Nenner eines Bruchs ein Product aus einfachen Factoren von der Form $x + p$ ist, so zerlege man den Bruch in Brüche mit diesen Factoren als Nennern (s. Function 19 ff.), und differentiire jeden der Brüche. Z. B. Es sey $y = \frac{ax + b}{(x + p)(x + q)}$, so ist $y = \frac{A}{x + p} + \frac{B}{x + q}$. Die Werthe von A und B sind a. a. O. 20 bestimmt. Nun ist

$$\partial y = -\frac{A \partial x}{(x + p)^2} - \frac{B \partial x}{(x + q)^2}.$$

8. Es sey $y = (a + bx^n)^m$, so ist
$$\partial y = mnbx^{n-1} (a + bx^n)^{m-1} dx.$$

Denn man setze $a + bx^n = z$, so ist $y = z^m$, eine mittelbare Function von x. Nun ist $\frac{\partial y}{\partial z} = mz^{m-1}$, und $\frac{\partial z}{\partial x} = nbx^{n-1}$, also $\frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = mnbz^{m-1}x^{n-1}$. Es ist $\frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}$, eben so wie bey Quotienten von endlichen Größen, da die Verhältnisse $\partial y : \partial z : \partial x$ in endlichen Größen ausgedruckt

werden können. In der Formel $\frac{\partial y}{\partial x} = m n b z^{m-1} x^{n-1}$ setze man für z seinen Werth, und multiplicire durch ∂x, so erhält man den Werth für ∂y.

9. Es sey $y = x^p (a + b x^n)^m$, so ist

$$\partial y = p x^{p-1} (a + b x^n)^m \partial x$$
$$+ m n b x^{n+p-1} (a + b x^n)^{m-1} \partial x,$$

oder auch

$$\partial y = x^{p-1} (p a + (p + m n) b x^n) (a + b x^n)^{m-1} d x.$$

Denn man setze $x^p = t$; $(a + b x^n)^m = u$, so ist $y = t u$. Nun ergiebt sich zufolge (2.) das hier aufgestellte Differential.

10. Exempel. I. Es sey $y = (a + b x^2)^{\frac{1}{2}}$, so ist

$$\partial y = b x (a + b x^2)^{-\frac{1}{2}} \partial x = \frac{b x \partial x}{\sqrt{(a + b x^2)}}.$$

Exempel. II. Es sey $y = x (a + b x^2)^{-\frac{1}{2}}$, so ist

$$\partial y = \frac{a \partial x}{(a + b x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exempel. III. Es sey $y = \frac{\sqrt{(a + b x^2)}}{x}$, so ist

$$\partial y = - \frac{a \partial x}{x^2 \sqrt{(a + b x^2)}}.$$

11. Es sey $y = x^p (a x + b x^2)^m$, so ist

$$\partial y = p x^{p-1} (a x + b x^2)^m \partial x$$
$$+ m x^p (a + 2 b x)(a x + b x^2)^{m-1} \partial x.$$

12. Die Differentiale dreytheiliger und mehrtheiliger Potentialgrößen, mit Potenzen der Functionalgröße, oder andern Potentialgrößen multiplicirt, werden auf ähnliche Art gefunden. Auch ist es nun leicht, jede auf irgend eine Art zusammengesetzte Function einer veränderlichen Größe zu finden.

13. Das Verfahren hiebey im Allgemeinen ist folgendes. Jeder Theil, Factor oder Divisor der ganzen veränderlichen Function, wird für sich differentiirt, als wenn derselbe allein veränderlich wäre. Das Aggregat aller solchen partiellen Differentiale ist das Differential der ganzen Function. Die constanten Factoren einer Function bleiben auch in dem Differential.

II. Differentiale transscendenter Functionen.

1. Logarithmische.

14. Es sey z eine Zahl, und x ihr Logarithme in dem System, dessen Basis $= B$, so ist $z = B^x$, s. Logarithmen. Es wachse x um Δx, wenn z sich um Δz verändert, so ist $z + \Delta z = B^{x+\Delta x}$. Diese Gleichung durch jene dividirt, giebt $\frac{z + \Delta z}{z} = B^{\Delta x}$, und . . . $\frac{\Delta z}{z} = B^{\Delta x} - 1$. Man zerfälle B in die Theile 1 und b, so daß $B = 1 + b$, und es ist nach dem binomischen Lehrsatze, $(1 + b)^{\Delta x} = 1 + \Delta x . b + \frac{\Delta x(\Delta x - 1)}{1 . 2} b^2$ $+ \frac{\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)}{1 . 2 . 3} b^3 +$ etc. also ist

$$\frac{\Delta z}{z} = \Delta x . b + \frac{\Delta x(\Delta x - 1)}{1 . 2} b^2 + \frac{\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)}{1 . 2 . 3} b^3$$
$$+ \frac{\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)(\Delta x - 3)}{1 . 2 . 3 . 4} b^4 + \text{etc.}$$

Die Theile dieser Reihe, welche die erste Potenz von Δx enthalten, sind $b . \Delta x - \frac{1}{2} b^2 \Delta x$

$$+ \frac{1 . 2}{2 . 3} b^3 . \Delta x - \frac{1 . 2 . 3}{2 . 3 . 4} b^4 . \Delta x + \frac{1 . 2 . 3 . 4}{2 . 3 . 4 . 5} b^5 . \Delta x - \text{etc.}$$

oder $b.\Delta x - \frac{1}{2}b^2\Delta x + \frac{1}{3}b^3 . \Delta x - \frac{1}{4}b^4 . \Delta x + \frac{1}{5}b^5 . \Delta x$ — etc. Die übrigen Theile zusammen bezeichne man durch $R.\Delta x^2$, wo R eine Function von b und Δx ist.

Demnach ist $\frac{\Delta z}{z\Delta x} = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5}b^5 - \text{etc.}$

$$+ R.\Delta x.$$

Da der von Δz und Δx unabhängige Theil des Quotienten $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ durch $\frac{\partial z}{\partial x}$ bezeichnet wird, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z(b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5}b^5 - \text{etc.}).$$

Den Werth der Reihe bezeichne man durch c, so sind die Differentialgleichungen zwischen einer Zahl z und ihrem Logarithmen x in dem System, dessen Basis $B = 1 + b$, diese:

$$\text{I. } \frac{\partial z}{z} = c\partial x. \quad \text{II. } \partial z = cB^x dx.$$

wo für z dessen Werth gesetzt ist.

In dem System der natürlichen Logarithmen ist $c = 1$. Die Basis in diesem System wird durch e bezeichnet.

15. In dem System der briggischen Logarithmen ist $B = 10$, und $b = 9$. Die Reihe $b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.}$ ist sehr divergirend. Man sehe b als eine veränderliche Größe an, und setze $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \text{etc.} = u$, so ist $(1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - \text{etc.})\,\partial y = \partial u$, das ist,

$$\frac{\partial y}{1+y} = \partial u. \quad \text{Folglich ist log. nat. } (1+y) = u,$$

wobey es keiner constanten Größe bedarf, da für $y = 0$ nach dieser Gleichung auch $u = 0$ ist, wie es nach der ursprünglichen Gleichung zwischen y und u seyn muß. Es ist also $b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.} = \text{log. nat. } (1 + b) = \text{log. nat. } B$, und $c = \text{log. nat. } B$. Die logarithmi-

sche Differentialgleichung ist demnach

$$\frac{\partial z}{z} = (\log.\ nat.\ B)\,dx,\ \text{und}\ \partial z = (\text{lognat.}\ B)\,B^x\,\partial x.$$

Wie der log. nat. B gefunden wird, wird in dem Artikel, Logarithmen, gezeigt.

16. Es sey $z = a^2 + my^2$ und $x = \text{lognat.}\ z$, für welchen $c = 1$ ist, so ist $\partial x = \frac{2my\partial y}{a^2 + my^2}$.

17. Es sey $z = (a+y)(b+y)$, und $x = \text{logn.}\ z$, so ist $\partial x = \frac{\partial y}{a+y} + \frac{\partial y}{b+y}$, oder

$$\partial x = \frac{a+b+2y}{(a+y)\,(b+y)}\,\partial y.$$

Es ist nämlich $l(a+y)\,(b+y) = l(a+y) + l(b+y)$.

18. Es sey $z = \frac{a+y}{a-y}$, und $x = \text{logn.}\ z$, so ist $\partial x = \frac{2a\partial y}{a^2 - y^2}$.

Es ist nämlich $\log.\ z = l\,(a+y) - l\,(a-y)$.

19. Es sey $z = y + \sqrt{(a^2+y^2)}$, und $x = \text{logn.}\ z$, so ist $\partial x = \frac{\partial y}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$.

20. Es sey $z = y + \sqrt{(y^2-a^2)}$, und $x = \text{logn.}\ z$, so ist $\partial x = \frac{\partial y}{\sqrt{(y^2-a^2)}}$.

21. Es sey $z = \frac{a+\sqrt{(a^2+y^2)}}{y}$, und $x = \text{logn.}\ z$, so ist $\partial x = -\frac{a\partial y}{y\sqrt{(a^2+y^2)}}$.

Es ist nämlich $\partial z = \frac{-a(a+\sqrt{(a^2+y^2)})}{y^2\sqrt{(a^2+y^2)}}\partial y.$

22. Es sey $z = \frac{a-\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}$, und $x = \text{logn.}\ z$,

so ist $\partial x = \frac{a\partial y}{y\sqrt{(a^2-y^2)}}$.

23. Es sey $z = y + \sqrt{(a^2+y^2)}$, und $y = \frac{bu-c^2}{u}$, und $x = \text{logn.}z$, so ist aus (19.)

$$\partial x = \frac{c^2\partial u}{u\sqrt{((a^2+b^2)u^2 - 2bc^2u + c^4)}}.$$

24. Es sey $z = y + \sqrt{(y^2-a^2)}$, und $y = \frac{bu-c^2}{u}$, und $x = \text{log. nat.}\ z$, so ist

$$\partial x = \frac{c^2\partial u}{u\sqrt{((b^2-a^2)u^2 - 2bc^2u + c^4)}}.$$

In beiden Formeln kann auch $+c^2$ statt $-c^2$ gesetzt werden.

25. Es sey $z = \frac{a+y}{a-y}$, und $y = b+v$, und $x = \text{logn.}\ z$, so ist $\partial x = \frac{2a\partial v}{a^2-b^2-2bv+v^2}$.

26. Es sey $y = (lz)^n$, der natürliche Logarithme verstanden, so ist $\partial y = n(lz)^{n-1}\frac{\partial z}{z}$.

Man setze $lz = u$, so ist $y = u^n$, und $\partial y = nu^{n-1}\partial u$. Nun ist $\partial u = \frac{\partial z}{z}$, also, rc.

27. Es sey $y = z^m lz$, so ist
$\partial y = (mlz + 1) z^{m-1} \partial z$, (aus 3 u. 14).

Also ist

$z^{m-1} lz . \partial z$ das Differential von $\frac{1}{m} z^m lz - \frac{1}{m^2} z^m$.

28. Es sey $y = llz$ (der Logarithme des Logarithmen von z), so ist $\partial y = \frac{\partial z}{zlz}$.

Man setze $lz = u$, so ist $y = lu$, also

$$\partial y = \frac{\partial u}{u} = \frac{\partial z}{uz} = \frac{\partial z}{zlz}.$$

2. Differentiale circularer Functionen.

29. Es sey s ein Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser $= a$; der linearische Sinus des Bogens sey $= y$; der Cosinus $= x$, so ist $\partial s = \frac{a \partial y}{x} = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$.

Denn es ist überhaupt $\partial s = \partial y \sqrt{(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2})}$ (Rectification). Für den Kreis ist $a^2 = x^2 + y^2$. Setzt man $x + \Delta x$ für x, und $y + \Delta y$ für y, so ist $a^2 = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2$, also $0 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2$, wo Δx und Δy von entgegengesetzter Beschaffenheit in Absicht des Wachsthums und Abnehmens sind. Es folgt hieraus $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}$, und $\frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^2}$; folglich $1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2}$; also ist

$$\partial s = \frac{a \partial y}{x} = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}.$$

30. Ferner ist $\partial s = - \frac{a \partial x}{y} = - \frac{a \partial x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Hier wird ∂y durch ∂x ausgedruckt.

31. Es sey t die linearische Tangente des Bogens s, so ist $\partial s = \frac{a^2 \partial t}{a^2 + t^2}$. Denn es ist $y = \frac{a t}{\sqrt{(a^2 + t^2)}}$; und $x = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + t^2)}}$, (Goniometrie, 14). Aus dem Werthe von y folgt $\partial y = \frac{a^3 \partial t}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$ (10. II.); also ist $\frac{a \partial y}{x} = \frac{a^4 \partial t}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(a^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2} = \frac{a^2 \partial t}{a^2 + t^2}$, das ist $\partial s = \frac{a^2 \partial t}{a^2 + t^2}$.

32. Ist t die linearische Cotangente des Bogens s, so ist $\partial s = - \frac{a^2 \partial t}{a^2 + t^2}$, weil die Tangente $= \frac{a^2}{t}$ ist, wenn t die Cotangente bedeutet. Oder, es ist hier t die Tangente von $\frac{1}{2} \pi - s$.

33. Es sey z die linearische Secante des Bogens s, so ist $\partial s = \frac{a^2 \partial z}{z \sqrt{(z^2 - a^2)}}$.

Denn es ist der Cosinus $x = \frac{a^2}{z}$, also $\partial x = - \frac{a^2 \partial z}{z^2}$. Da $a^2 - x^2 = \frac{a^2 (z^2 - a^2)}{z^2}$, so ist

$$\partial s = - \frac{a \partial x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{a^2 \partial z}{z \sqrt{(z^2 - a^2)}}.$$

34. Es sey z die linearische Cosecante des Bogens s, so ist $\partial s = -\frac{a^2 \partial z}{z\sqrt{(z^2-a^2)}}$.

35. Es sey v der linearische Sinus versus eines Bogens, so ist $\partial s = \frac{a\partial v}{\sqrt{(2av-vv)}}$.

Denn es ist $x = a - v$, also $\partial x = -\partial v$. Durch die Substitution dieser Werthe in (30.) wird der angegebene Werth des Differentials ∂s erhalten.

36. Es sey der Sinus $y = \frac{bu - c^2}{u}$, so ist

$a^2 - y^2 = \frac{(a^2-b^2)u^2 + 2bc^2u - c^4}{u^2}$, u. $\partial y = \frac{c^2 \partial u}{u^2}$;

also ist

$$\partial s = \frac{ac^2 \partial u}{u\sqrt{((a^2-b^2)u^2 + 2bc^2u - c^4)}}.$$

Anstatt $-c^2$ kann auch $+c^2$ gesetzt werden.

37. Es sey die Tangente $t = b + v$, so ist

$\partial s = \frac{a^2 \partial v}{a^2 + b^2 + 2bv + v^2}$.

Zu vergleichen sind die logarithmischen Differentiale in (24. 25).

38. Wird der Halbmesser $= 1$ gesetzt, so sey der Bogen $= \varphi$, und es ist

$$\partial\varphi = \frac{\partial \sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\partial\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

$$\partial\varphi = \frac{\partial \tang\varphi}{1+\tang\varphi^2} = \cos\varphi^2 . \partial\tang\varphi$$

$$\partial\varphi = -\frac{\partial\cot\varphi}{1+\cot\varphi^2} = -\sin\varphi^2 . \partial\cot\varphi$$

$$\partial\varphi = \frac{\partial\sec\varphi}{\sec\varphi . \tang\varphi} = -\frac{\partial\operatorname{cosec}\varphi}{\operatorname{cosec}\varphi . \cot\varphi}.$$

Aus diesen Formeln werden unmittelbar die Differentiale des Sinus, der Tangente, rc. durch das Differential des Bogens mit einer goniometrischen Function verbunden ausgedruckt.

39. Es ist ∂ log. nat. $\sin\varphi = \cot.\varphi \,.\, \partial\varphi$

Denn $\frac{\partial \sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,\partial\varphi = \cot\varphi \,.\, \partial\varphi$.

40. Es ist ∂ log. nat. $\cos\varphi = -\tan\varphi \,.\, \partial\varphi$.

Diese Formel entsteht aus jenen, wenn $90° - \varphi$ für φ gesetzt wird.

41. Es ist ∂ log. nat. tang $\varphi = \frac{2\partial\varphi}{\sin 2\varphi}$. Denn

$$\frac{\partial \tan\varphi}{\tan\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2 \,.\, \tan\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi \,.\, \sin\varphi} = \frac{2\partial\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

42. Es ist ∂ log. nat. tang $(45° + \varphi) = \frac{2\partial\varphi}{\cos 2\varphi}$,

und ∂ . log. nat. tang $(45° - \varphi) = -\frac{2\partial\varphi}{\cos 2\varphi}$.

Diese Formeln entstehen aus (41), wenn $45° \pm \varphi$ für φ daselbst gesetzt wird.

43. Es sey $\sin\varphi = ly$, oder $y = e^{\sin\varphi}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Daraus ist $\partial y = e^{\sin\varphi} \cos\varphi\,\partial\varphi$.

44. In diesen Formeln sind die natürlichen Logarithmen zu verstehen. Diese werden durch die Multiplication mit dem Modulus des briggischen Systems, 0,43429448 ... in briggische verwandelt. Die Winkel sind Bogen für den Halbkreis $= 3,141592...$ Also ist $1° = 0,017453292$ ..; $1' = 0,000290888$... $1'' = 0,000004848$... (Cyklometrie, S. 643).

45. Der Logarithme eines Sinus, als eines Bruchs für den Halbmesser als Einheit, ist negativ, und nimmt der Quantität nach ab, wenn der Winkel und der Sinus zunehmen. Die absolute Verminderung einer negativen Größe wird als eine Vergrößerung betrachtet. (Entgegengesetzte Größen). Daher ist das Differential des log. sin φ gleichnamig mit $\partial\varphi$. Bey dem log. cos φ verhält es sich umgekehrt. Mit dem ∂ log. tang φ hat es dieselbe Beschaffenheit wie mit dem ∂ log. sin φ. Ist hier φ größer als 45° und kleiner als 90°, so ist log. tang φ positiv, und dessen Veränderung mit $\partial\varphi$ gleichnamig.

46. Um die Formeln, besonders der Differentiale logarithmischer und circularer Größen sich geläufig und anschaulich zu machen, berechne man kleine Veränderungen von Functionen aus der angenommenen Veränderung der Functionalgröße. Dann setze man diese letztere für ihr Differential, und berechne nach der Differentialformel das Differential der Function. Dieses stimmt mit der gefundenen endlichen Veränderung desto genauer, je kleiner die Veränderungen sind.

Exempel.

Es sey $\varphi = 1°$; $\Delta\varphi = 10'' = 0,000048481$.
Es soll Δ log. Br. sin φ, oder der Unterschied der Briggischen Logarithmen von sin 1° und sin 1°10″ gefunden werden. Es ist Δ log. Br. sin 1° = cot. 1°. $\Delta\varphi$. 0,434 ...
Mittelst der Logarithmen ist die Rechnung folgende:

log. cot. 1°	= 1,7580785	
l $\Delta\varphi$	= 5,6855748	— 10
l 0,434..	= 9,6377843	— 10
	7,0814376	— 10

also Δ log. Br. sin 1° = 0,0012062. Nach den Tafeln ist dieser Unterschied = 0,0012046. Die Differentialformel giebt nur das erste Glied einer Reihe, wenn die Differentiale als endliche Größen behandelt werden. In dem Exempel verändern sich die Logarithmen stark.

III. Analogie zwischen den logarithmischen und circularen Differentialen.

47. Die logarithmischen und circularen Differentiale kommen mit einander überein bis auf die Vorzeichen der quadratischen Größen. Es ist in (19), $\partial x = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 + y^2)}}$, wenn daselbst noch der Factor a zugesetzt wird, und in (23.), $\partial s = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$. Setzt man in der einen Formel $y\sqrt{-1}$ für y, so entsteht daraus die andere, nur mit dem Factor $\sqrt{-1}$. So ist $\partial x = \frac{a \partial y . \sqrt{-1}}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$, folglich $\partial x = \partial s . \sqrt{-1}$. Daher $x = s . \sqrt{-1}$, so daß ein Logarithme als ein unmöglicher Kreisbogen anzusehen ist. Die Logarithmen werden hier als Linien betrachtet.

48. Man setze $a = 1$; $s = \varphi$, damit der Bogen φ, so wie der Logarithme x, eine bloße Zahl sey.

So ist $y = \sin \varphi$; $\sqrt{(1 - y^2)} = \cos \varphi$; und $\varphi = \text{Arc. sin } y$; $\partial \varphi = \frac{\partial y}{\sqrt{(1 - y^2)}}$. Die logarithmischen Formeln (19.) sind $z = e^x$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet; $z = y + \sqrt{(1 + y^2)}$, und $\partial x = - \frac{\partial y}{\sqrt{(1 + y^2)}}$. In diesen setze man $y\sqrt{-1}$ statt y, so wird $z = y\sqrt{-1} + \sqrt{(1 - y^2)}$, und $\partial x = \frac{\partial y \sqrt{-1}}{\sqrt{(1 - y^2)}}$. Die Vergleichung mit dem circularen Differential giebt $\partial x = \partial \varphi . \sqrt{-1}$, also $x = \varphi \sqrt{-1}$, und daher $z = e^{\varphi \sqrt{-1}}$, das ist,

$$e^{\varphi \sqrt{-1}} = y\sqrt{-1} + \sqrt{(1 - y^2)}.$$

Es ist $\frac{1}{e^{\varphi\sqrt{-1}}} = e^{-\varphi\sqrt{-1}}$, und

$$\frac{1}{y\sqrt{-1}+\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{\sqrt{(1-y^2)}-y\sqrt{-1}}{1}, \text{ also}$$

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \sqrt{(1-y^2)} - y\sqrt{-1}.$$

Beide Exponentialgrößen addirt, geben

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\sqrt{(1-y^2)} = 2\cos\varphi.$$

Das Unmögliche in beiden Exponentialgrößen hebt sich, und das Mögliche giebt $2\cos\varphi$.

Hingegen ist

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2y\sqrt{-1} = 2\sin\varphi.\sqrt{-1},$$

wo die möglichen Theile sich einander aufheben.

49. Eine ähnliche Relation der Exponentialgrößen findet in Absicht der Tangenten der Kreisbogen Statt. Es sey $z = e^x$, oder $x = \log.\text{nat}.\,z$, und $z = \frac{1+t}{1-t}$, so ist (aus 18.), $\partial x = \frac{2\partial t}{1-t^2}$. Hier setze man $t\sqrt{-1}$ statt t, so ist $\partial x = \frac{2\partial t.\sqrt{-1}}{1+t^2}$, und $z = \frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}$.

Ist $t = \text{tang}\,\varphi$; so ist $\partial\varphi = \frac{\partial t}{1+t^2}$ (aus 31. 38).

Daher ist $\partial x = 2\partial\varphi.\sqrt{-1}$, und $x = 2\varphi.\sqrt{-1}$. Folglich ist

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}} = \frac{(1+t\sqrt{-1})^2}{1+t^2},$$

$$e^{-2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1-t\sqrt{-1}}{1+t\sqrt{-1}} = \frac{(1-t\sqrt{-1})^2}{1+t^2}.$$

Durch Addition wird erhalten

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} + e^{-2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2};$$

Durch Subtraction

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} - e^{-2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{4t\sqrt{-1}}{1+t^2}.$$

50. In der ersten dieser Formeln addire man auf beiden Seiten die Zahl 2, so ist

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} + 2 + e^{-2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{4}{1+t^2},$$

und die Quadratwurzel aus beiden Theilen gezogen

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \frac{2}{\sqrt{(1+t^2)}}.$$

Da $\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}} = \cos\varphi$ ist, so ist dieses dieselbe Formel mit der erstern in (48.).

Der erste Theil der zweyten Formel ist das Product von $e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}$ in $e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}$; der zweyte Theil ist das Product von $\frac{2}{\sqrt{(1+t^2)}}$ in $\frac{2t\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+t^2)}}$, das ist von $2\cos\varphi$ in $2\sin\varphi\sqrt{-1}$. Diesem Producte ist jenes gleich, aus (48).

51. Die Analogie der logarithmischen und circularen Differentiale ist der Grund, daß eine Aufgabe, deren Auflösung auf die eine Gattung führt, mit einer andern vergesellschaftet zu seyn pflegt, zu deren Auflösung die andere Gattung gehört, z. B. die Quadratur eines Kreisabschnittes, und eines hyperbolischen Abschnittes; die Berechnung einer Zone auf der Oberfläche eines gedruckten und eines gestreckten Sphäroids. Hiemit ist zu vergleichen der VIII. Abschnitt in dem Artikel, Goniometrie, von der Analogie der Theilung eines Kreissectors und eines hyperbolischen Sectors in gleich große Theile.

IV. Exponentialrechnung.

52. Exponentialrechnung ist diejenige, worin Potenzen mit einem veränderlichen Exponenten vorkommen, die Wurzel mag unveränderlich oder selbst veränderlich seyn.

Der Fall, da die Wurzel eine unveränderliche Größe ist, ist bey den logarithmischen Differentialen vorgekommen. Es sey $z = a^x$, so ist $lz = xla$. Versteht man die natürlichen Logarithmen, so ist $\frac{\partial z}{z} = \partial x . la$, also $\partial z = a^x \partial x . la$, wie in (15).

53. Es sey $z = u^x$, so ist $lz = xlu$. Daraus $\frac{\partial z}{z} = \partial x . lu + \frac{x \partial u}{u}$, und

$$\partial z = u^{x-1} (u \partial x . lu + x \partial u).$$

54. Es sey $z = e^{e^x}$, wo der Exponens selbst wieder eine Exponentialgröße ist. Die Wurzel e ist die Basis der natürlichen Logarithmen. Man setze $e^x = u$, so ist $z = e^u$, und $\partial z = e^u \partial u = e^u e^x \partial x$, also

$$\partial z = e^{e^x} e^x \partial x.$$

Differentialgleichung des ersten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen ist eine solche, in welcher der Differential-Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine Function von x und y zugleich ist, im Gegensatze gegen eine Differentialformel, worin dieser Quotient eine Function von x allein ist. Euler macht in dem ersten Bande seiner Integralrechnung diesen Unterschied zwischen Differentialformel und Differentialgleichung. Überhaupt ist Differentialgleichung eine jede Gleichung zwischen zwey oder mehrern veränderlichen Größen, welche Differentiale derselben von irgend einem

Grade enthält. In dem gegenwärtigen Artikel werden nur die Gleichungen von der Anfangs bestimmten Beschaffenheit betrachtet.

1. Die Differentiirung der vielfachen Functionen führt auf solche Differentialgleichungen. Es giebt aber viele dieser Gattung, welche nicht auf solche Art entstehen, so daß sich die Integral-Functionen nicht vollständig angeben lassen. Es verhält sich hier, nur auf eine höhere Art, wie mit den Potenzen und Wurzeln. Zu jeder Wurzel läßt sich iraend eine Potenz mit einem ganzen Exponenten vollständig angeben, aber nicht umgekehrt zu jeder Potenz die Wurzel. Auch können Differentialgleichungen so beschaffen seyn, daß ihnen gar keine Integralgleichung entspricht.

2. Die Gleichungen, die hier betrachtet werden, haben die Form, $P\partial x + Q\partial y = o$, wo P und Q Functionen von x und y zugleich sind. Wären P und Q Functionen von x allein, so gehörte die Gleichung unter die Differentialformeln, die in dem vorhergehenden Artikel abgehandelt sind. Wäre P eine Function von x allein, und Q von y allein, so wäre die Gleichung aus zwey Differentialformeln zusammengesetzt. Sie heißt alsdann auch eine solche, in welcher die veränderlichen Größen von einander gesondert sind.

3. Die Gleichung zwischen x und y sey

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = o.$$

Man setze $x + \Delta x$ für x, und $y + \Delta y$ für y, und ziehe jene Gleichung von der hiedurch entstandenen ab, so ist

$$2ay\Delta y + bx\Delta y + by\Delta x + 2cx\Delta x + d\Delta y + e\Delta x + a\Delta y^2 + b\Delta y\Delta x + c\Delta x^2 = o.$$

Hieraus folgt der Differentialquotient,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{by + 2cx + e}{2ay + bx + d},$$

oder die Differentialgleichung,

$$(2cx + by + e)\partial x + (2ay + bx + d)\partial y = o.$$

Der erste Theil ist das partielle Differential der Gleichung nach dx, der andere nach dy.

4. Der Differentialquotient ist möglich, wenn das dazu gehörige Verhältniß zwischen x und y ein mögliches ist. Fehlt dabey in der Gleichung zwischen diesen ay^2 nicht, so ist für irgend einen Werth von x der Werth von y gedoppelt, und daher eben so der Werth des Differentialquotienten. Die Gleichung gehört für die Coordinaten an einem Kegelschnitte, und der Differentialquotient ist, bey rechtwinklichten Coordinaten, die Tangente des Winkels der berührenden mit der Axe der Abscissen, wenn diese durch x bezeichnet werden. Dieser Winkel ist Null, oder die berührende der Axe der Abscissen parallel, wenn $by + 2cx + e = 0$ ist, und ein Rechter, oder die berührende fällt in die Ordinate, wenn $2ay + bx + d = 0$ ist.

5. Die Gleichung, $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, sey ein Product aus zwey Gleichungen, $\alpha y + \beta x + \gamma = 0$, und $\delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$, so stellt sie ein System von zwey geraden Linien vor. Das Product entwickelt ist

$$a\delta y^2 + (\alpha\varepsilon + \beta\delta)\, xy + \beta\varepsilon x^2 + (\alpha\zeta + \gamma\delta)\, y + (\beta\zeta + \gamma\varepsilon)\, x + \gamma\zeta = 0:$$

In der daraus gezogenen Differentialgleichung ist der Factor von $\partial y = 2\alpha\delta y + (\alpha\varepsilon + \beta\delta)\, x + \alpha\zeta + \gamma\delta$. Die Verbindung der beiden Gleichungen, deren Product die Gleichung ist, ergiebt, daß dieser Factor $= 0$ ist. Eben so ist der Factor von $\partial x = 2\beta\varepsilon x + (\alpha\varepsilon + \beta\delta)\, y + \beta\zeta + \gamma\varepsilon = 0$.

Es ist also für das System zweyer geraden Linien $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{0}{0}$. Allein es bleibt in der Gleichung für die endlichen Differenzen (3.) der Theil $a\Delta y^2 + b\Delta y\Delta x + c\Delta x^2 = 0$ übrig, da die Theile, welche die einfachen Δy und Δx enthalten, sich aufheben. Daraus ergiebt

sich nun der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mittelst der quadratischen Gleichung, $a.\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + b.\frac{\Delta y}{\Delta x} + c = 0$, woraus ein gedoppelter Werth des Quotienten folgt, einer für die eine gerade Linie, ein zweyter für die andere. Nimmt man die Coordinaten in einer stetigen Folge, so ist $a\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial y}{\partial x} + c = 0$, oder $a\partial y^2 + b\partial y\partial x + c\partial x^2 = 0$. Eben diese Gleichung wird erhalten, wenn der Zähler und Nenner des Werthes von $\frac{\partial y}{\partial x}$ differentiirt werden, und der daraus entstehende Bruch zum Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ genommen wird.

6. In der allgemeinen Gleichung vom dritten Grade zwischen zwey veränderlichen Größen,

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0,$$

setze man $x + \Delta x$ für x, und $y + \Delta y$ für y, und ziehe von der dadurch entstandenen Gleichung jene ab, so ist

$$\begin{aligned}&(3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h)\Delta y\\ &+ (3dx^2 + 2cxy + by^2 + 2gx + fy + i)\Delta x\\ &+ (3ay + bx + e)\Delta y^2\\ &+ (2by + 2cx + f)\Delta y.\Delta x\\ &+ (3dx + cy + g)\Delta x^2\\ &+ a\Delta y^3 + b\Delta y^2.\Delta x + c\Delta x^2.\Delta y + d\Delta x^3 = 0.\end{aligned}$$

Wie die Factoren der Producte von den Differenzen entstehen, ist in (Differenzenrechnung, 18.) bemerkt.

Aus der endlichen Differenzengleichung entsteht die Differentialgleichung

$$(3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h)\partial y$$
$$+ (3dx^2 + 2cxy + by^2 + 2gx + fy + i)\partial x = 0.$$

7. Allgemein sind hier drey Fortschreitungen der y zu der stetigen Fortschreitung der x geordnet, und umgekehrt. Am deutlichsten wird dies, wenn man die y als Ordinaten einer Linie des dritten Grades betrachtet, an welcher zu derselben Abscisse drey Ordinaten möglich sind. Es kann aber, nach Beschaffenheit der Coefficienten, eine Fortschreitung der Ordinaten wegfallen, selbst nur eine einzige bleiben. Wenn zwey Fortschreitungen der y sich mit einem gemeinschaftlichen Gliede an einander schließen, so hat die Gleichung für y, als eine bestimmte mit einer gegebenen x betrachtet, zwey gleiche Wurzeln, und es ist $3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h = 0$, (Gleichung, IX.). Auf gleiche Art ist, wo zwey Fortschreitungen der x, als Ordinaten betrachtet, zusammenkommen $3dx^2 + 2cxy + by^2 + 2gx + fy + i = 0$. In jenem Falle ist $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, oder $\frac{\partial y}{\partial x}$ unendlich groß, und die berührende fällt in die Ordinate; in dem andern ist $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, und die berührende fällt in die Ordinate x, oder ist parallel mit der Axe der Abscissen x. Treten beide Fälle zugleich ein, so schneiden sich zwey Zweige der krummen Linie in einem Puncte. Alsdann haben nämlich zwey verschiedene Fortschreitungen der y ein gemeinschaftliches Glied, und zwey Fortschreitungen der x eben ein solches zu jenem coordinirtes. Die Differentialgleichung wird nun $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{0}{0}$, welches überhaupt etwas unbestimmtes bedeutet.

Man suche nun aus der Differenzengleichung denjenigen Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der von der Quantität

der Differenzen unabhängig ist, und durch $\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$ bezeichnet wird. Die beiden ersten Glieder, welche Δy und Δx einfach enthalten, fallen weg, weil die Factoren dieser Differenzen $= 0$ sind. Die übrigen dividire man durch Δx^2, und lasse diejenigen Glieder weg, welche von den Differenzen Δy und Δx abhängig bleiben, so ist, nach der hierauf sich beziehenden Bezeichnung,

$$(3ay + bx + e)\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + (2by + 2cx + f)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+ 3dx + cy + g = 0.$$

Die beiden Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ sind die Tangenten der Winkel der beiden berührenden in dem Durchschnittspuncte der beiden Zweige der Curve mit der Axe der Abscissen.

Eben diese Gleichung wird erhalten, wenn in dem Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ Zähler und Nenner differentiirt, und durch ∂x dividirt werden.

8. Ist die Gleichung vom dritten Grade ein Product aus einer vom zweyten Grade, nicht zerlegbaren, $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, und der vom ersten Grade, $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, so wird der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, was auch für Werthe x und y haben mögen. Man bezeichne die erstere Gleichung durch V, die zweyte durch U, so ist

$$\partial . VU = (2ay + bx + d)\,U\partial y + \beta V \partial y$$
$$+ (by + 2cx + e)\,U\partial x + \alpha V \partial x.$$

Hier ist, da $V = 0$, und $U = 0$ ist, der Factor von ∂y sowohl als der von ∂x, wie man ihn aus der endlichen Gleichung unmittelbar erhält, jeder $= 0$. Zerlegt man aber die Differentialgleichung in zwey Gleichungen, so wird

$(2ay + bx + d)\partial y + (by + 2cx + e)\partial x = 0$, und $\beta\partial y + \alpha\partial x = 0$. Die erste ist die Differentialgleichung für einen Kegelschnitt, die zweyte für eine gerade Linie. Die endliche Gleichung gehört für das System eines Kegelschnitts und einer geraden Linie.

9. Wären nicht allein die Factoren von Δy und Δx, sondern auch von Δy^2, $\Delta y . \Delta x$ und Δx^2 Null, so bliebe von der endlichen Differenzengleichung nur der Theil

$$a\Delta y^3 + b\Delta y^2 . \Delta x + c\Delta x^2 . \Delta y + d\Delta x^3 = 0$$

übrig. Diese Gleichung zeigt ein System von drey geraden Linien an, die sich in drey verschiedenen Puncten, in zweyen, und in einem einzigen schneiden können, so wie die Gleichung für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ drey verschiedene, oder zwey gleiche nebst einer von ihnen verschiedenen, oder drey gleich große Wurzeln haben kann.

Dieselbe Gleichung wird erhalten, wenn der Zähler und Nenner des Werthes von $\frac{\partial y}{\partial x}$ zweymahl nach einander differentiirt werden, in Absicht auf x und y allein, ohne höhere Differentiale aufzunehmen.

Eigenschaften der Differentialgleichungen in Beziehung auf ihre Realität.

10. Es sey V eine gleichartige Function von x und y, (eine solche, worin die Summe der Exponenten von x und y in allen Theilen dieselbe ist); die Anzahl ihrer Dimensionen $= m$; ihr Differential $\partial V = P\partial x + Q\partial y$; so ist $Px + Qy = mV$.

Beweis. Es sey λ die Summe der Exponenten in jedem Theile des Zählers der Function, μ die Summe in jedem Theile des Nenners, (bey einer ganzen Function ist $\mu = 0$); also $\lambda - \mu = m$. Man setze $y = ux$, so enthält jeder Theil des Zählers die Potenz x^λ in eine Potenz

von u multiplicirt, so wie jeder Theil des Nenners die Potenz x^μ in eine Potenz von u, und V ist ein Product aus x^m in eine Function von u. Diese Function sey U, also $V = U x^m$, und $\partial V = m U x^{m-1} \partial x + x^m \partial U$. Da $y = u x$, so ist $\partial y = u \partial x + x \partial u$, also ist $\partial V (= P \partial x + Q \partial y) = P \partial x + Q u \partial x + Q x \partial u$. Die Vergleichung beider Werthe von ∂V giebt $m U x^{m-1} \partial x = P \partial x + Q u \partial x$, indem dieses die Theile sind, welche von ∂x abhangen, dagegen $x^m \partial U$ und $Q x \partial u$ von ∂u abhängig sind. Da $U x^m = V$ ist, so ist $\frac{mV}{x} = P + Q u$, und daher $m V = P x + Q y$.

Der Satz wird von Euler erfunden seyn, welcher davon schon in seiner ältern Mechanik (1736) Gebrauch macht, T. II. §§. 106. 497. 498.

11. Exempel. I. Es sey $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$, so ist

$m = 2$, und $P = \frac{3x^2y - 2x^3 + y^3}{(y-x)^2}$; $Q = \frac{2y^3 - 3\ {}^2x - x^3}{(y-x)^2}$.

Daraus ist $Px + Qy = \frac{2y^3 + 2x^3}{y - x} = 2V$.

Exempel. II. Es sey $V = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, so ist $m = -1$,

und $P = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $Q = \frac{-y}{(x^2 + y^2)_{r}}$. Daraus ist

$Px + Qy = \frac{-1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = -V$.

Man bemerke noch, daß P und Q von $m - 1$ Dimensionen sind, wenn V eine Function von m Dimensionen ist.

12. Es sey V irgend eine Function von x und y, und $\partial V = P \partial x + Q \partial y$; ferner sey $\partial P = p \partial x + q \partial y$,

und $\partial Q = r\partial x + s\partial y$, wo P, Q, p, q, r, s, jede eine Function von x und y, oder einer derselben allein sind, auch constante Größen seyn können: in allen Fällen ist $q = r$.

Bew. Man setze in der Function V für x und y die veränderten $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$, wodurch für V komme $V + \Delta V$. Zieht man jene Function von dieser ab, so ist die endliche Differenz $\Delta V = P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta x\Delta y$, wo der erste Theil die Differenz durch Δx allein, der zweyte die durch Δy allein, der dritte die durch beide gemeinschaftlich entstehende bezeichnet. Die Function P mag noch Δx und Potenzen dieser Veränderung, Q noch Δy und Potenzen derselben, R beides enthalten. Die partielle Differenz von P durch Δy sey $R'\Delta y$, und die partielle Differenz von Q durch Δx sey $R''\Delta x$. In der Differenzenrechnung (42.) ist gezeigt, daß $R' = R''$ ist, (das dortige p und q ist hier R' und R''), oder jedes die hier zuerst durch R bezeichnete Function.

Setzt man Differentiale statt der endlichen Differenzen, so fallen die Potenzen und Producte der endlichen Differenzen weg; P und Q werden die Differentialfactoren; $R'\Delta y$ verwandelt sich in das Differential von P nach y, oder R' wird die hier durch q bezeichnete Function; $R''\Delta x$ verwandelt sich in das Differential von Q nach x, oder R'' wird die hier durch r bezeichnete Function. Da $R' = R''$, was auch die Quantität von Δx und Δy seyn mag, so ist $q = r$.

13. Exempel. I. Es sey $V = ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, so ist $P = by^2 + 2cxy + 3dx^2 + fy + 2gx + i$; und $Q = 3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h$. Das partielle Differential von P nach y durch ∂y dividirt ist $q = 2by + 2cx + f$; und das von Q nach x durch ∂x dividirt ist $r = 2by + 2cx + f$, so daß $q = r$.

von u multiplicirt, so wie jeder Theil des Nenners die Potenz x^{μ} in eine Potenz von u, und V ist ein Product aus x^m in eine Function von u. Diese Function sey U, also $V = U x^m$, und $\partial V = m U x^{m-1} \partial x + x^m \partial U$. Da $y = ux$, so ist $\partial y = u \partial x + x \partial u$, also ist $\partial V (= P \partial x + Q \partial y) = P \partial x + Q u \partial x + Q x \partial u$. Die Vergleichung beider Werthe von ∂V giebt $m U x^{m-1} \partial x = P \partial x + Q u \partial x$, indem dieses die Theile sind, welche von ∂x abhangen, dagegen $x^m \partial U$ und $Q x \partial u$ von ∂u abhängig sind. Da $U x^m = V$ ist, so ist $\frac{mV}{x} = P + Qu$, und daher $mV = Px + Qy$.

Der Satz wird von Euler erfunden seyn, welcher davon schon in seiner ältern Mechanik (1736) Gebrauch macht, T. II. §§. 106. 497. 498.

11. Exempel. I. Es sey $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$, so ist $m = 2$, und $P = \frac{3 x^2 y - 2 x^3 + y^3}{(y - x)^2}$; $Q = \frac{2 y^3 - 3 y^2 x - x^3}{(y - x)^2}$.

Daraus ist $Px + Qy = \frac{2 y^3 + 2 x^3}{y - x} = 2V$.

Exempel. II. Es sey $V = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, so ist $m = -1$, und $P = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $Q = \frac{-y}{(x^2 + y^2)_{\frac{3}{2}}}$. Daraus ist $Px + Qy = \frac{-1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = -V$.

Man bemerke noch, daß P und Q von $m - 1$ Dimensionen sind, wenn V eine Function von m Dimensionen ist.

12. Es sey V irgend eine Function von x und y, und $\partial V = P \partial x + Q \partial y$; ferner sey $\partial P = p \partial x + q \partial y$,

und $\partial Q = r\partial x + s\partial y$, wo P, Q, p, q, r, s, jede eine Function von x und y, oder einer derselben allein sind, auch constante Größen seyn können: in allen Fällen ist $q = r$.

Bew. Man setze in der Function V für x und y die veränderten $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$, wodurch für V komme $V + \Delta V$. Zieht man jene Function von dieser ab, so ist die endliche Differenz $\Delta V = P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta x\Delta y$, wo der erste Theil die Differenz durch Δx allein, der zweyte die durch Δy allein, der dritte die durch beide gemeinschaftlich entstehende bezeichnet. Die Function P mag noch Δx und Potenzen dieser Veränderung, Q noch Δy und Potenzen derselben, R beides enthalten. Die partielle Differenz von P durch Δy sey $R'\Delta y$, und die partielle Differenz von Q durch Δx sey $R''\Delta x$. In der Differenzenrechnung (42.) ist gezeigt, daß $R' = R''$ ist, (das dortige p und q ist hier R' und R''), oder jedes die hier zuerst durch R bezeichnete Function.

Setzt man Differentiale statt der endlichen Differenzen, so fallen die Potenzen und Producte der endlichen Differenzen weg; P und Q werden die Differentialfactoren; $R'\Delta y$ verwandelt sich in das Differential von P nach y, oder R' wird die hier durch q bezeichnete Function; $R''\Delta x$ verwandelt sich in das Differential von Q nach x, oder R'' wird die hier durch r bezeichnete Function. Da $R' = R''$, was auch die Quantität von Δx und Δy seyn mag, so ist $q = r$.

13. Exempel. I. Es sey $V = ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, so ist $P = by^2 + 2cxy + 3dx^2 + fy + 2gx + i$; und $Q = 3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h$. Das partielle Differential von P nach y durch ∂y dividirt ist $q = 2by + 2cx + f$; und das von Q nach x durch ∂x dividirt ist $r = 2by + 2cx + f$, so daß $q = r$.

Exempel. II. Es sey $V = \sqrt{(x^2 + 2xy)}$, so ist
$$P = \frac{x+y}{\sqrt{(x^2+2xy)}};\ Q = \frac{x}{\sqrt{(x^2+2xy)}};\ \text{ferner}$$
$$q = \frac{xy}{(x^2+2xy)^{\frac{3}{2}}};\quad r = \frac{xy}{(x^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exempel. III. Es seyn x und y zwey Kreisbogen, und $V = x \sin y + y \sin x$, so ist $P = \sin y + y \cos x$; $Q = x \cos y + \sin x$; ferner $q = \cos y + \cos x$; $r = \cos y + \cos x$.

14. Der Satz (12.) wird folgendergestalt symbolisch ausgedruckt. Es zeigt $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für V in Rücksicht auf x allein an, so wie $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für V in Rücksicht auf y allein. Demnach ist $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = P$; $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = Q$; $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = q$; $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = r$. Der obige Satz wird nun folgendergestalt ausgedruckt: Wenn $\partial V = P\partial x + Q\partial y$, so ist $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$.

Auch ist $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\partial x = P\partial x$, und $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\partial y = Q\partial y$.

15. Der Satz ist wichtig als Kennzeichen, ob eine Differentialgleichung, so, wie sie vorgegeben wird, real und aus einer endlichen Gleichung entstanden sey. Hat sie die Beschaffenheit nicht, welche sie zufolge des Satzes haben muß, so muß man einen Multiplicator suchen, durch den sie diese Beschaffenheit erhalte.

16. Ist V eine Function dreyer veränderlichen, gegenseitig unabhängigen Größen, x, y, z, und es ist $\partial V =$

$P\partial x + Q\partial y + R\partial z$, so ist $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$;

$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$; $\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$. Denn

da angenommen ist, daß die Größen x, y, z von einander unabhängig sind, so kann jede von ihnen als unveränderlich angesehen werden. So entstehen drey Bedingungsgleichungen für die drey Paare von Functionen, P, Q; P, R; Q, R. Diese sind Functionen von den drey Größen x, y, z, von welchen aber auch eine oder die andere in jenen fehlen kann. Einen andern, aber schwerern Beweis dieser drey Bedingungsgleichungen giebt Clairaut in den Mem. de l'Acad. des Sciences, 1740. p. 305. ed. in 4.

17. Finden diese drey Bedingungen nicht Statt, so setze man, daß die Formel $P\partial x + Q\partial y + R\partial z$ durch die Multiplication mit einer Function M die drey Bedingungen erfülle, so daß

$$MP\partial x + MQ\partial y + MR\partial z$$

das Differential einer Function V der drey Größen x, y, z sey. Nun ist

$$\left(\frac{\partial . MP}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . MQ}{\partial x}\right); \left(\frac{\partial . MP}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial . MR}{\partial x}\right);$$

$$\left(\frac{\partial . MQ}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial . MR}{\partial y}\right).$$

Die Entwickelung der Differentiale von den Producten MP, MQ, MR, giebt folgende drey Gleichungen:

$$\text{I. } M\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)+P\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)=M\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$$

$$\text{II. } M\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)+P\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=M\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$$

$$\text{III. } M\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=M\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Die erste dieser Gleichungen multiplicire man mit R, die zweyte mit Q, die dritte mit P, und ziehe die zweyte von der Summe der ersten und dritten ab, so heben sich die Glieder, welche ∂M enthalten, und es ist, nach der Division durch M,

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Findet diese Bedingungsgleichung nicht Statt, so kann selbst durch die Multiplication mit einer Function M die Differentialformel $P\partial x + Q\partial y + R\partial z$ aus keiner Function von x, y, z entstanden seyn.

18. Die Bedingungsgleichungen (12 u. 17.) hat Clairaut in seinem Mémoire sur l'integration des équations différentielles du premier ordre, Mem. de l'Acad. des Sc. 1740 erwiesen, die erstere schon in einer Abhandlung gleichen Inhalts im J. 1739. Er gesteht, daß außer ihm auch Fontaine und Euler die Bedingungsgleichung (12.) gefunden haben. Die Untersuchungen von Fontaine über diesen Gegenstand sind in den Memoiren der Akademie nicht erschienen, sondern nebst andern, in die akademische Sammlung nicht eingerückten, desselben Verfassers, in einer eigenen 1764 herausgekom-

men. Fontaine scheint das Erstigkeitsrecht vor Clairaut zu haben, der dagegen die Beweise und die Anwendungen einleuchtender und bequemer gemacht haben wird. Von jenem rührt auch die Notation der partiellen Differentialquotienten her, doch ohne die Klammern, die man in der Folge zur bessern Unterscheidung zugesetzt hat. Euler hat den Satz in den Comment. Petrop. T. VII. a. a. 1734 et 1735, die erst 1740 erschienen sind, angewandt, um Gleichungen für unendlich viele Curven derselben Art, deren Gleichungen nicht algebraische sind, zu finden.

Der Beweis der Bedingungsgleichung (17.) ist von Clairaut. Euler hat in seiner Differentialrechnung einen andern, zwar weitläuftigern, gegeben, §. 313—316, der aber nicht die drey Gleichungen (16.) voraussetzt. In dem Calc. integr. T. III. §. 1. und in einer Abhandlung über die Trajectorien, Nova Acta Petrop. T. I. a. a. 1783, gebraucht er denselben Beweis wie Clairaut.

Von einer andern merkwürdigen Bedingungsgleichung in dem folgenden Artikel.

Variation einer Differentialgleichung durch Verwandlung einer unveränderlichen Größe in eine veränderliche.

19. Es ist $\partial z = P \partial x$ eine Differentialgleichung, worin P eine Function der veränderlichen Größe x und einer unveränderlichen a ist, und auch mehrere unveränderliche enthalten mag. Die Größe z sey, wenn die Größen geometrische sind, die Coordinate zu x an einer Curve, oder der zu der Abscisse gehörige Bogen, Flächenraum, Inhalt des durch die Drehung um eine Axe beschriebenen Körpers, oder dessen Oberfläche. Diese Bestimmungen werden der Untersuchung, die hier angestellt werden soll, vieles Licht verschaffen. Auch ist man auf dieselbe ganz durch geometrische Aufgaben geleitet.

Nun werde a veränderlich gesetzt, so hat man eine unendliche Menge von Functionen einerley Art, die nur

durch die Größe a, (den Modulus oder den Parameter der Curve), verschieden sind, z. B. Ellipsen über einer gemeinschaftlichen Axe mit verschiedenen Parametern.

Wenn $P \partial x$ sich integriren läßt, so hat die Sache keine Schwierigkeit, da man in dem Integral nur a veränderlich zu setzen braucht, um das Differential der Function z in der stetigen Folge ihrer Werthe für irgend ein angenommenes x zu erhalten.

Ist aber $P \partial x$ nicht algebraisch integrabel, so kann die Frage Schwierigkeit machen.

20. Es sey nun, wenn a veränderlich genommen wird, $\partial z = P \partial x + Q \partial a$. Der erste Terminus, $P \partial x$, zeigt das Differential von z an, so fern bloß x sich ändert, der zweyte aber die Variation von z, oder die differentielle Veränderung zufolge der von a, wobey x denselben Werth behält.

Es sey $\partial P = p \partial x + q \partial a$, und $\partial Q = r \partial x + s \partial a$, so ist, wenn z eine reale Function ist, $q = r$, (12.), und $Q = \int r \partial x = \int q \partial x$, wenn $s = 0$ gesetzt wird. Dieses muß geschehen, damit Q ganz von P, oder von der Beschaffenheit der Function z abhange, ohne willkührliche Bestimmungen. (Euler betrachtet in der Abhandlung über unendlich viele Curven einerley Art, Comment. Petrop vet. T. VII. p. 178, für das Differential von Q den Modulus a als constant, daher $\partial a = 0$ ist, ungeachtet a in dem Differential ∂P als veränderlich behandelt wird. Auch das Verfahren von Nic. Bernoulli in Joh. Bernoulli Opp. T. II. p. 443. ist in dieser Absicht nicht befriedigend).

Nach der Bezeichnung (14.) ist $Q = \int \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) \partial x$,

und das variirte Differential

$$\partial z = P \partial x + \partial a \int \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) \partial x.$$

21. Das erste Beyspiel dieser Aufgabe giebt Leibnitz in dem Commerc. epist. T. I. ep. 59. wo die Auflösung

aber auf andere Ansichten gegründet ist. Man gedenke sich eine stetige Folge logarithmischer Linien durch einen Punct, bey einer gemeinschaftlichen Abscisse, gezogen; es soll die Curve gefunden werden, welche auf ihnen allen Bogen von einer gegebenen Länge, von jenem Puncte an abschneidet. Die Gleichung für die logarithmische Linie ist $\partial y = \frac{a \partial x}{x}$. Das Differential des Bogens z ist $\partial z = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)} = \frac{\partial x \sqrt{(aa+xx)}}{x}$. Hier ist $P = \frac{\sqrt{(aa+xx)}}{x}$, und $\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) = \frac{a}{x\sqrt{(aa+xx)}}$; also ist die variirte Differentialgleichung,

$$\partial z = \frac{\partial x \sqrt{(aa+xx)}}{x} + a \partial a \int \frac{\partial x}{x\sqrt{(aa+xx)}}.$$

Der erste Terminus ist das Differential des Bogens auf derselben krummen Linie, der zweyte ist die verschwindende Variation des Bogens durch die Variation des Modulus, bey unveränderter Abscisse. Die Integralgröße, $\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(aa+xx)}}$, zeigt an, wie die Variation von der Beschaffenheit der Curve abhängt, daher a in derselben nicht veränderlich ist; aber die Verbindung mit der Variation $a \partial a$ zeigt, wie jene ferner durch die Variation des Modulus bestimmt wird.

Die Frage wegen der gleiche Bogen abschneidenden Curve gehört in den Artikel, Trajectoria.

22. Ein anderes Beyspiel gebe die Area einer Parabel. Ihre Gleichung ist $yy = ax$. Die Area sey z, so ist $\partial z = y \partial x = \partial x \sqrt{ax}$. Mit der Variation ist $\partial z = P \partial x + Q \partial a$, wo $P = \sqrt{ax}$. Nun ist $\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}$, und $\int \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) \partial x = \frac{1}{3} x \sqrt{\frac{x}{a}}$, also

$$\partial z = \partial x \sqrt{ax} + \frac{1}{3} x \partial a \sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Eben dieses findet man aus der endlichen Gleichung $yy = ax$, wenn sowohl a als x veränderlich gesetzt werden.

23. Es sey $\partial y = P \partial x$, und P eine Function von x, y, a, nebst andern Constanten, die außer a vorhanden seyn mögen. Man setze, daß die variirte Gleichung sey $\partial y = P\partial x + R\partial a$, so daß $P\partial x - \partial y + R\partial a = 0$ sey. Damit diese Gleichung real sey, muß zufolge (17.) seyn,

$$-\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right),$$

oder

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = R\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right),$$

indem das dortige Q hier $= -1$, also $\partial Q = 0$ ist. Für z daselbst steht hier a.

Nikol. Bernoulli (Brudersohn von Jakob und Johann Bernoulli) hat diese Aufgabe schon aufgelöset, aber auf einem andern Wege. Sein Verfahren steht in Joh. Bernoulli Opp. T. II. p. 443. Für das hiesige

$$y,\ x,\ P,\ R,\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial a},$$

steht bey ihm

$$x,\ y,\ p,\ q,\ T,\ R$$

Er findet die Gleichung, $Tq\partial y + R\partial y = \partial q$. Es fehlt also der Terminus $P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$.

Euler hat sich früh sehr viel mit dieser ganzen Untersuchung beschäftigt, wie seine Abhandlungen in den Comm. Petrop. vet. T. VII. VIII. IX. zeigen.

24. Das $\int P\partial x$, wo P eine Function von x und y ist, in Absicht auf y differentiiren, nennt man, unter dem Integralzeichen differentiiren. Dieses

Differential ist $= \partial y \int \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \partial x$, nach (21.), wo a ist, was hier durch y bezeichnet wird.

Differentio-Differentialrechnung ist die Entwickelung der Differentiale des zweyten Grades, und höherer, nach ihren Verhältnissen gegen einander, und zu den Potenzen derer vom ersten Grade. Ihr Gebrauch ist wichtig in der höhern Geometrie, und in der reinen Mechanik, deren erste Grundformeln Differentiale vom zweyten Grade enthalten. Sie werden in dem Taylorschen Lehrsatze zur Berechnung der endlichen Differenzen einer Function aus den Potenzen der Differenz der Functionalgröße angewandt.

1. In dem Artikel, Differentiale, (S. 822.), sind schon die Begriffe von den höhern Differentialen erklärt worden. Sie sind so wenig als die des ersten Grades als Größen absolut zu betrachten, sondern bezeichnen, ohne Rücksicht auf bestimmte Quantität, Glieder eines Verhältnisses, welches im Allgemeinen endlich ist, in einzelnen Fällen das von 1 : 0, oder das von 0 : 1 seyn kann, und, wenn es 0 : 0 wird, mehrdeutig ist.

2. Es sey zuerst eine Relation zwischen zwey veränderlichen Größen, x und y, angenommen. Man setze $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; $\frac{\partial p}{\partial x} = q$; $\frac{\partial q}{\partial x} = r$; $\frac{\partial r}{\partial s} = s$, u. s. f; so ist eine Differentialgleichung vom ersten Grade zwischen x und y eine endliche zwischen x, y, p; eine vom zweyten Grade ist eine endliche zwischen x, y, p, q; eine vom dritten Grade ist eine endliche zwischen x, y, p, q, r; u. s. f.

3. So wie p der von der Quantität der Veränderungen unabhängige Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist, so ist es q in

Absicht auf $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$; r in Absicht auf $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$; s in Absicht auf $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}$, u. s. f. wenn nämlich die durch x bezeichneten Größen eine Reihe mit gleich großen Unterschieden ausmachen.

4. Darum ist in diesem Falle $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r$; $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = s$; etc. Die Bezeichnungen der Differentialquotienten beziehen sich auf eine stetiger Weise sich verändernde Reihe. Man mag die eine oder die andere Bezeichnungsart gebrauchen. Die Differentialquotienten stellen oft die Relation der veränderlichen Größen und ihrer Veränderungen in einer stetigen Reihe am augenfälligsten dar.

5. Es sey $y = x^m$, und x verändern sich gleichförmig (oder ∂x sey constant, oder $\partial^2 x = 0$), so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = m x^{m-1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

u. s. f.

Wenn m eine ganze Zahl ist, so ist der mte Differentialquotient constant.

6. Hieraus ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial y^3} = \frac{m-1 \cdot m-2}{m^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

u. s. f.

7. Es sey $z = xy$, und ∂x constant, so ist

$$\partial z = y\partial x + x\partial y$$
$$\partial^2 z = 2\partial x\partial y + x\partial^2 y$$
$$\partial^3 z = 3\partial x\partial^2 y + x\partial^3 y$$
$$\partial^4 z = 4\partial x\partial^3 y + x\partial^4 y$$

u. s. f.

oder

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + px; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2p + qx;$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 3q + rx; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 4r + sx$$

u. s. f.

8. Es sey $z = \frac{y}{x}$, und ∂x constant, so ist

$$\partial z = \frac{\partial y}{x} - \frac{y\partial x}{xx}$$
$$\partial^2 z = \frac{\partial^2 y}{x} - \frac{2\partial x\partial y}{xx} + \frac{2y\partial x^2}{x^3}$$
$$\partial^3 z = \frac{\partial^3 y}{x} - \frac{3\partial x\partial^2 y}{x^2} + \frac{6\partial x^2\partial y}{x^3} - \frac{6y\partial x^3}{x^4}$$

u. s. f.

9. Es sey $y = \sin\varphi$, und $z = \cos\varphi$, so ist, wenn $\partial\varphi$ constant gesetzt wird,

$$\partial y = \cos\varphi \,.\, \partial\varphi \qquad \partial z = -\sin\varphi \,.\, \partial\varphi$$
$$\partial^2 y = -\sin\varphi \,.\, \partial\varphi^2 \qquad \partial^2 z = -\cos\varphi \,.\, \partial\varphi^2$$
$$\partial^3 y = -\cos\varphi \,.\, \partial\varphi^3 \qquad \partial^3 z = +\sin\varphi \,.\, \partial\varphi^3$$
$$\partial^4 y = +\sin\varphi \,.\, \partial\varphi^4 \qquad \partial^4 z = +\cos\varphi \,.\, \partial\varphi^4$$

u. s. f. u. s. f.

10. Es sey $t = \tan \varphi$, und $\partial \varphi$ unveränderlich, so ist (Differentialformel, 31.)

$$\partial t = (1 + t^2)\, \partial \varphi$$
$$\partial^2 t = 2t\,(1 + t^2)\, \partial \varphi^2$$
$$\partial^3 t = 2(1 + 3t^2)(1 + t^2)\, \partial \varphi^3$$

u. s. f.

11. Es sey $y = e^x$, und $z = e^{-x}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, und x der Logarithme der Zahl y und der Zahl $\frac{1}{z}$ ist. Es ist, wenn ∂x constant gesetzt wird,

$\partial y = e^x \partial x$	$\partial z = - e^{-x} \partial x$
$\partial^2 y = e^x \partial x^2$	$\partial^2 z = + e^{-x} \partial x$
$\partial^3 y = e^x \partial x^3$	$\partial^2 z = - e^{-x} \partial x$
u. s. f.	u. s. f.

12. Es sey $2ax - xx = yy$, so ist $a\partial x - x\partial x = y\partial y$. Setzt man sowohl ∂x als ∂y veränderlich, so ist

$$a\partial^2 x - \partial x^2 - x\partial^2 x = \partial y^2 + y\partial^2 y,$$

oder

$$(a - x)\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}.$$

Der zweyte Theil dieser Gleichung ist, aus der Differentialgleichung vom ersten Grade,

$$= 1 + \left(\frac{a - x}{y}\right)^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2}.$$

Also ist

$$(a - x)\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2},$$

Dieses ist eine unbestimmte Gleichung für die Differentialquotienten des zweyten Grades, da die Art, wie sich ∂x oder ∂y verändern sollen, nicht festgesetzt ist. Soll

die Gleichung eine bestimmte werden, ohne daß eines der Differentiale unveränderlich sey, so muß irgend ein anderes Differential unveränderlich gesetzt werden. Man nehme dazu das $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Dadurch ist $\partial(\partial x^2 + \partial y^2) = 0$, also $\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y = 0$. Durch die Substitution des Werthes von $\partial^2 y$ oder $\partial^2 x$ aus dieser Gleichung in der unbestimmt gelassenen wird nun diese eine bestimmte.

$$\frac{a\partial^2 x}{\partial x^2} = \frac{aa - ax}{y^2}, \text{ oder } \frac{a\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{a}{a-x}.$$

Setzt man für $\partial^2 x$ seinen Werth durch $\partial^2 y$, so ist

$$\frac{a\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{a}{y}, \text{ oder } \frac{a\partial^2 y}{\partial y^2} = -\frac{ay}{(a-x)^2}.$$

Die hier zum Beyspiel genommene Gleichung ist für einen Kreis, worin y der Sinus eines Bogens, x der Sinus versus, $a - x$ der Cosinus für den Halbmesser a ist. Die Differentialformeln folgen auch aus denen für $\partial^2 y$ und $\partial^2 z$ in (9.), wenn a statt der Einheit, und $a - x$ für az gesetzt wird, durch Elimination von $\partial\varphi$.

13. Exempel. Da die Differentialverhältnisse auch für endliche kleine Differenzen beynahe gelten, so suche man das Verhältniß der zweyten Unterschiede dreyer Sinus zu dem Quadrate des Unterschiedes des ersten und zweyten, oder des zweyten und dritten Cosinus, z. B. zu dem Winkel $\varphi = 30°$, mit einem Unterschiede von 1 Gr, für die folgenden Winkel. Es ist

	I. Untersch.	II. Untersch.
sin 30° = 0,5000000		
sin 31° = 0,5150381	150381	
sin 32° = 0,5299193	148812	—1569
cos 30° = 0,8660254		
cos 31° = 0,8571673	—88581	
cos 32° = 0,8480481	—91192	

Die Einheit für die Unterschiede ist, wie man von selbst bemerken wird, ein Zehnmilliontheilchen. Sieht man $\partial^2 y$ und ∂z (oder ∂x) als endliche Größen an, so ist hier $\partial^2 y = - 0{,}0001569$, und $\partial x = 0{,}0088581$. nämlich als Differenz des Sinus versus. Das Quadrat davon ist $= 0{,}000078466$.. Jener zweyte Unterschied mit $y = 0{,}5$ multiplicirt giebt zum Producte $0{,}00007845$, welches von dem Quadrate erst in der achten Stelle verschieden ist. Das Quadrat des Unterschiedes von $\cos 31^\circ$ und $\cos 32^\circ$ weicht mehr ab.

14. Setzt man $y \partial x = \text{const.}$ oder läßt die Kreisabschnitte über dem Sinus versus gleichförmig wachsen, so ist

$$\frac{a \partial^2 x}{\partial x^2} = - \frac{a^2 - a x}{y^2};$$

$$\frac{a \partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{(2 a^3 - a y^2)}{y^3}.$$

15. Aus dem Beyspiele für den Kreis in (12.) sieht man deutlich, wie eine Differentialgleichung eine unbestimmte ist, wenn kein Differential als unveränderlich angesehen wird. Es erhellt schon hieraus, daß um eine Differentialgleichung zwischen x und y zu einer bestimmten für jeden Werth von x und den dazu gehörigen von y zu machen, entweder eines der Differentiale ∂x, ∂y, oder das von irgend einer Function derselben als constant angenommen werden müsse. Dieses erhellt allgemein aus dem, was in dem Artikel Differenzenrechnung (45.) von der Nothwendigkeit einer beständigen Differenz bemerkt worden ist. Die Anfangsglieder der Differenzreihen zu einer Hauptreihe von Größen, die nach irgend einem Gesetze gebildet werden, erhalten keine bestimmte Werthe, wenn jene Größen nicht einer arithmetischen Reihe von Stellen, Zahlen oder Repräsentanten der Stellen, zugeordnet werden.

16. Es sey in einer Differentialgleichung zweyten Grades zwischen x und y das Differential einer derselben

oder einer Function von ihnen unveränderlich gesetzt, man will statt desselben aber ein anderes Differential als unveränderlich ansetzen, so hat man zu dem Ende folgendergestalt zu verfahren.

Man setze $p = \frac{\partial y}{\partial x}$; $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, ohne weder ∂x noch ∂y unveränderlich anzunehmen, so ist

$$q = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}.$$

Hiemit verbinde man die Differentialgleichung, welche aus der Annahme des beständigen Differentials entspringt, so kann man die zweyten Differentiale wegschaffen, und dafür q nebst p einführen. In der verwandelten Gleichung setze man für q den Werth $\frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}$, so erhält man eine Gleichung, worin kein Differential constant ist.

17. Fall. I. Es sey ∂x constant genommen, so ist bey dieser Annahme, $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Setzt man nun $q \partial x^2$ für $\partial^2 y$, und darauf $\partial^2 y - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x}$ für $q \partial x^2$, so ist dieses eben so gut, als unmittelbar für $\partial^2 y$ setzen $\partial^2 y - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x}$.

18. Fall. II. Es sey ∂y constant genommen, so hat man für $\partial^2 y$ zu setzen $\partial^2 x - \frac{\partial x \partial^2 y}{\partial y}$. Hier sind nur für die Buchstaben x und y in Fall I. gesetzt y und x.

19. Fall. III. Es sey $y \partial x$ (das Differential der Area einer Curve bey rechtwinklichten Coordinaten) con-

stant gesetzt, so ist $\partial y \partial x = -y \partial^2 x$, also ist $q \partial x^3 = \partial x \partial^2 y + \frac{\partial y^2 \partial x}{y}$. Dafür ist nun zu setzen $\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x$. Folglich ist für $\partial^2 x$ zu setzen $-\frac{\partial y \partial x}{y}$. Ferner ist eben daher, $\partial^2 y = q \partial x^2 - \frac{\partial y^2}{y}$, folglich ist für $\partial^2 y$ zu setzen $\partial^2 y - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{y}$.

20. Fall. IV, Es sey das Differential $\sqrt{(\partial x^2 + \partial x^2)}$ oder das Differential eines Bogens, als unveränderlich angenommen. Dadurch ist $\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y = 0$, also $q = -\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)\partial^2 x}{\partial x^2 \partial y}$. Daher ist für $\partial^2 x$ zu setzen $\frac{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial y \partial^2 y}{\partial x^2 + \partial y^2}$. Auf gleiche Art wird gefunden, daß für $\partial^2 y$ zu setzen ist $\frac{\partial x^2 \partial^2 y - \partial x \partial y \partial^2 x}{d x^2 + \partial y^2}$, worin nur x und y für y und x in jener Formel stehen.

21. Die Substitutionen für $\partial^3 x$ und $\partial^3 y$ in diesem Falle giebt Euler in Calc. diff. P. I. Cap. 8. Die Rechnungsprobe ist, daß, wenn mit der verwandelten Gleichung diejenige verbunden wird, welche das beständige Differential differentiirt giebt, die zuerst gegebene wieder hervorgehen muß.

22. Die Differentialformeln zeigen zum Theil merkwürdige Fortschreitungen, wenn kein Differential constant gesetzt wird.

23. Es sey $z = xy$, so ist

$$\partial z = y\partial x + x\partial y$$
$$\partial^2 z = y\partial^2 x + 2\partial x\partial y + x\partial^2 y$$
$$\partial^3 z = y\partial^3 x + 3\partial^2 x\partial y + 3\partial x\partial^2 y + x\partial^3 y$$
$$\partial^4 z = y\partial^4 x + 4\partial^3 x\partial y + 6\partial^2 x\partial^2 y + 4\partial x\partial^3 y + x\partial^4 y$$

Man sieht gleich, daß die numerischen Coefficienten die Binomialcoefficienten nach der Folge der Potenzen sind. Dieses allgemein einzusehen, setze man die Binomialcoefficienten in der nten Potenz 1, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ... $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, 1, und nehme an, daß

$$\partial^n z = y\partial^n x + \mathfrak{A}\partial^{n-1}x\partial y + \mathfrak{B}\partial^{n-2}x\partial^2 y + \mathfrak{C}\partial^{n-3}x\partial^3 y + \mathfrak{D}\partial^{n-4}x\partial^4 y \ldots + \mathfrak{B}\partial^2 x\partial^{n-2}y + \mathfrak{A}\partial x\partial^{n-1}y + x\partial^n y,$$

so ist

$$\partial^{n+1} z = y\partial^{n+1}x + (1+\mathfrak{A})\partial^n x\partial y + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\partial^{n-1}x\partial^2 y + (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\partial^{n-2}x\partial^3 y + (\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\partial^{n-3}x\partial^4 y \ldots + (\mathfrak{B}+\mathfrak{A})\partial^2 x\partial^{n-1}y + (\mathfrak{A}+1)\partial x\partial^n y + x\partial^{n-1}y.$$

Es sind aber 1; $1+\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}+\mathfrak{C}$; ...... $\mathfrak{B}+\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}+1$; 1, die Binomial-Coefficienten in der $(n+1)$ten Potenz. Gilt also die Form des Differentials mit den numerischen Coefficienten für irgend eine Ordnung, so gilt sie auch für die nächst höhere, und daher für alle folgende. Sie gilt aber für die ersten vier Ordnungen, also auch für die fünfte, sechste und alle folgenden.

Leibnitz hat dieses Gesetz für die successiven vollständigen Differentiale von xy bemerkt, s. Commerc. epist. Leibn. et Bernoullii, T. I. p. 46.

24. Man setze für x^n das Differential ∂x veränderlich, so ist, $y = x^n$ gesetzt, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. die Bedeutung in (23.) behalten,

$\partial y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial x$

$\partial^2 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^2 x + \mathfrak{B} x^{n-2} . 2 \partial x^2$

$\partial^3 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^3 x + \mathfrak{B} x^{n-2} 6 \partial x \partial^2 + \mathfrak{C} x^{n-3} 6 \partial x^3$

$\partial^4 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^4 x + \mathfrak{B} x^{n-2} (8 \partial x . \partial^3 x + 6 (\partial^2 x)^2)$
$+ \mathfrak{C} x^{n-3} 36 \partial x^2 . \partial^2 x + \mathfrak{D} x^{n-4} . 24 \partial x^4$

$\partial^5 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^5 x + \mathfrak{B} x^{n-2} (10 \partial x . \partial^4 x + 20 \partial^2 x . \partial^3 x)$
$+ \mathfrak{C} x^{n-3} (60 \partial x^2 . \partial^3 x + 90 \partial x . (\partial^2 x)^2)$
$+ \mathfrak{D} x^{n-4} . 240 \partial x^3 . \partial^2 x + \mathfrak{E} x^{n-5} . 120 \partial x^5$

u. s. f.

25. Die Formen dieser Differentiale sind den Coefficienten der nten Potenz des Polynomium, $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}$ ähnlich, nur die numerischen Coefficienten sind verschieden.

Man nehme aber die Reihe,

$$x = a + bx + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 + \frac{e}{1..4} x^4 + \text{etc.}$$

und setze

$$x^n = A + \frac{B}{1} x + \frac{C}{1.2} x^2 + \frac{D}{1.2.3} x^3 + \frac{E}{1.2.3.4} x^4 + \text{etc.}$$

so ist (combinat. Analysis, S. 492),

$A = a^n$

$B = \mathfrak{A} a^{n-1} b$

$C = \mathfrak{A} a^{n-1} c + \mathfrak{B} a^{n-2} . 2 b^2$

$D = \mathfrak{A} a^{n-1} d + \mathfrak{B} a^{n-2} . 6 bc + \mathfrak{C} a^{n-3} . 6 b^3$

$E = \mathfrak{A} a^{n-1} e + \mathfrak{B} a^{n-2} (8 bd + 6 c^2)$
$+ \mathfrak{C} a^{n-3} . 36 b^2 c + \mathfrak{D} a^{n-4} . 24 b^4$

$F = \mathfrak{A} a^{n-1} f + \mathfrak{B} a^{n-2} (10 be + 20 cd)$
$+ \mathfrak{C} a^{n-3} (60 b^2 d + 90 bc^2)$
$+ \mathfrak{D} a^{n-4} . 240 b^3 c + \mathfrak{E} a^{n-5} . 120 b^5.$

etc.

Hier ist die Formation ganz dieselbe mit der für die successiven Differentiale gefundenen.

Da diese nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden, und die Polynomial-Coefficienten ebenfalls, und da die Form hier bis zu dem fünften Differential einerley ist mit der Form der Coefficienten des Polynomium, so ist die Induction hinlänglich, um den Satz aufzustellen, daß sie auch für höhere Differentiale und die folgenden Coefficienten dieselbe bleibe.

25. In den Polynomial-Coefficienten werden a, b, c, d, e, etc. so wie A, B, C, D, E, etc. jedes mit dem nachfolgenden vertauscht, um die Coefficienten folgweise aus einander herzuleiten. Eben dies geschieht in den Differentialformeln mit x, ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, etc. und mit y, ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y$ etc. Da die ersten Formeln beiderley Art zusammen stimmen, so geschieht dies auch mit allen folgenden.

Die hier bemerkte Derivation ist der in dem Artikel, combinatorische Analysis (46.), angegebenen ähnlich.

27. Setzt man $a = x$; $b = \partial x$; $c = \partial^2 x$; $d = \partial^3 x$; etc. und nimmt die Scale der Coefficienten in der Reihe p,

$$\left(x, \frac{\partial z}{1}, \frac{\partial^2 z}{1 \cdot 2}, \frac{\partial^3 z}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc.}\right)$$

so ist, nach der combinatorischen Bezeichnungsart,

$$\partial^m x^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m p^n \varkappa (m + 1).$$

Eine andere Methode, die höhern Differentiale von x^n zu finden, gebraucht Pfaff in der Hindenburgischen Sammlung c. a. Abhandlungen, II. nr. V. Man vergleiche etwa auch noch meine Bemerkungen über den polynomischen Lehrsatz in dem ersten Bande, S. 80 ff.

Bedingungsgleichung der Realität einer jeden Differentialgleichung zwischen zwey veränderlichen Größen.

28. Es seyn zwey veränderliche Größen, x, y; und $\partial y = p \partial x$; $\partial p = q \partial x$; $\partial q = r \partial x$; $\partial r = s \partial x$; etc. Eine Function der Größen x, y, p, q, r, s, etc. sey V, und das gegebene Differential dieser Function

$$\partial V = M \partial x + N \partial y + P \partial p + Q \partial q + R \partial r + S \partial s + \text{etc.}$$

Ist hieraus

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \text{etc.} = 0,$$

wobey das Differential ∂x unveränderlich genommen wird, so ist die Differentialformel $V \partial x$ integrirbar, was auch die Relation zwischen x und y seyn mag.

29. Euler trägt diesen Satz in dem Calculo variationum, der dem dritten Theile seines Werks über die Integralrechnung beygefügt ist, vor, §. 92. Er hat den Satz aus der Lehre von den Variationen hergeleitet, und sagt, daß ein directer Weg ihn zu erweisen (das ist, aus unmittelbaren Gründen der Differentialrechnung), schwer zu finden seyn möchte. Lexell hat in den Novis Comm. Petrop. T. XV. in der Abhandlung de criteriis integrabilitatis formularum differentialium einen verwickelten Beweis vorgetragen, den er in einer folgenden Abhandlung T. XVI. noch abändert, weil er ihm noch nicht Genüge that. Der Verfasser der Anzeige dieser Abhandlungen in denselben Commentarien versichert, daß Euler wenigstens 16 Jahre vor der Ausgabe seiner Integralrechnung den Satz gefunden gehabt hätte. Er habe ihn einem Mathematiker in Frankreich mitgetheilt, und dadurch habe der Marquis de Condorcet vermuthlich Kenntniß davon erhalten, und sey veranlaßt worden, einen Beweis zu suchen, den er der Pariser Akademie im J. 1764 vorgelegt hat, worauf er ferner in seiner Schrift über die Integralrechnung die Lehre von den Kennzeichen der Integrabilität ausführlich vorgetragen hat. Nachher haben Cousin und la Croix in ihren Lehrbüchern über die Differential- und Integralrechnung Beweise des Satzes gegeben, jener in dem ersten Bande §. 240; dieser in dem 1. Cap. §. 86.

30. Ein leichtes Beyspiel ist folgendes. Es sey

$$V \partial x = \left(\frac{p}{y} - \frac{x p p}{y y} + \frac{x q}{y}\right) \partial x.$$

Diese Formel ist integrabel, da sie aus der, $\int V \partial x = \frac{xp}{y}$ hergeleitet ist. Setzt man nun $\partial V = M \partial x + N \partial y + P \partial p + Q \partial q$, so ist

$$M = -\frac{pp}{yy} + \frac{q}{y}; \quad N = \frac{-p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy};$$

$$P = \frac{1}{y} - \frac{2xp}{yy}; \quad Q = \frac{x}{y}.$$

Hieraus $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-3p}{yy} + \frac{4xpp}{y^3} - \frac{2xq}{yy}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{xp}{yy},$$

ferner $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{-2p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}$.

Folglich $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{-p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}$,

welcher Werth dem von N gleich ist.

Dignität einer Zahl bedeutet ein Product von gleichen Factoren. In deutschen Schriften ist Potenz gewöhnlicher.

Dimensionen, s. Abmessung.

Dimensionszeichen sind Bezeichnungen der Coefficienten in einer Reihe und den Potenzen derselben, welche E. G. Fischer in seiner Schrift: Theorie der Dimensionszeichen, Halle, 1792, gebraucht, um bey den Substitutionen dieser Potenzen in einer andern Reihe das Gesetz der dadurch entstehenden Coefficienten in dieser leicht anschaulich zu machen, und insbesondere dadurch zu einer allgemeinen Auflösung algebraischer Gleichungen, und Umkehrungsmethode der Reihen zu gelangen.

Die Coefficienten in einer Reihe bekommen alle dasselbe Symbol, aber mit Ziffern oder allgemeinen Zahlzei-

chen darüber, um die Stelle zu bezeichnen. Die Symbole sind theils die römischen Zahlzeichen, theils Buchstaben. Z. B.

$$y = \overset{1}{I}x + \overset{2}{I}x^2 + \overset{3}{I}x^3 + \overset{4}{I}x^4 + \text{etc.}$$
$$y^2 = \overset{2}{II}x^2 + \overset{3}{II}x^3 + \overset{4}{II}x^4 + \overset{5}{II}x^5 + \text{etc.}$$
$$y^3 = \overset{3}{III}x^3 + \overset{4}{III}x^4 + \overset{5}{III}x^5 + \overset{6}{III}x^6 + \text{etc.}$$

u. s. f.

Hier zeigt das Symbol II ein Product von zwey einfachen Coefficienten der ersten Reihe, III ein Product von dreyen an, u. s. f. Daher die Benennung, Dimensionszeichen. Die Zahl darüber, in ihre ganzen Theile aufgelöset, zeigt an, aus welchen Coefficienten in der Reihe y der Coefficient zusammengesetzt wird, z. B. $\overset{5}{II}$ aus dem 1sten und 4ten; dem 2ten und 3ten, oder $\overset{6}{III}$ aus denen in den Stellen 1, 1, 4; 1, 2, 3; 2, 2, 2. Dazu müssen dann noch die Versetzungszahlen beygefügt werden. Man sieht, daß die Dimensionszeichen mehr in sich enthalten, als die Benennung anzeigt: sie sind Reihen-, Local- und Combinations-Zeichen, bey welchen man noch die Versetzungszahl zu den Bestandtheilen der zusammengesetzten Größe nicht vergessen muß.

Oft bekommt das erste Glied einer Reihe kein Dimensionszeichen, sondern erst das zweyte nebst der folgenden. Die Reihe von dem zweyten an sey

$$y = \overset{2}{\mathfrak{A}}x^m + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + \text{etc.}$$

so sind die Coefficienten in y^2 folgende:

$\overset{4}{\mathfrak{B}}$; $\overset{5}{\mathfrak{B}}$, $\overset{6}{\mathfrak{B}}$, etc. in y^3 sind sie $\overset{6}{\mathfrak{C}}$, $\overset{7}{\mathfrak{C}}$, $\overset{8}{\mathfrak{C}}$; etc.

in y^4 sind sie $\overset{8}{\mathfrak{D}}$, $\overset{9}{\mathfrak{D}}$, $\overset{10}{\mathfrak{D}}$, etc.

Hier sind diese Symbole ebenfalls Reihen- Local- und Combinations- Zeichen zugleich mit Einschluß der Versetzungszahl zu jedem Bestandtheile.

Diese, zwar nicht ganz neue Bezeichnungsart, oder eine ähnliche, ist sehr dienlich, die Fundamental-Einrichtung einer zusammengesetzten Reihe deutlich und einfach darzustellen, gleichsam das Skelett einer Reihe zu zeigen. Ohne die Combinationstheorie aber möchte das Verfahren bey der Entwickelung noch dunkel bleiben. Da Fischer diese nicht mit in seinen Vortrag gehörig aufnahm, so sind ihm weitläufige Hülfstafeln nöthig geworden. Übrigens ist sein Werk den Liebhabern der feinern Analysis zur Übung in der Behandlung der Reihen und Gleichungen sehr zu empfehlen. Es ist mit Fleiß, Genauigkeit und vieler Kenntniß ausgearbeitet, welches desto rühmlicher ist, da das Amt des Verfassers, als Lehrers der lateinischen Sprache an einer gelehrten Schule in Berlin, ihm nur erlaubte, Nebenstunden der Mathematik zu widmen.

Diminutus numerus, eben das, was deficiens numerus, s. oben S. 719.

Diophanteische Analysis, Aufgaben, s. unbestimmte Analytik.

Diorismus, s. oben S. 88.

Directrix, oder linea dirigens, ist diejenige gerade Linie, längs welcher die Bewegung einer andern geraden Linie oder einer Ebene geschieht, bey der Beschreibung einer ebenen Figur oder eines Körpers. So entsteht ein Parallelogramm, indem die eine Seite längs der andern, der dirigirenden, sich parallel bleibend fortgeschoben wird, oder ein Prisma durch die Bewegung längs der einen Seitenlinie. Die Basis der Conchoide, von welcher aus die gegebene gerade Linie auf einer, um einen festen Punct sich drehenden, geraden Linie genommen wird, heißt auch linea directrix Conchoidis.

In der Lehre von den Kegelschnitten heißt die gerade Linie durch den Scheitelpunct des Kegels, in einer Ebene senkrecht auf die Ebene des Scheitels, parallel mit dieser Ebene, die Directrix plani Sectionis. (Hausenii elementa, p. 200.). Man nennt aber auch so die Durchschnittslinie einer, der Ebene des Schnittes parallelen, Ebene mit der Ebene der Grundfläche des Kegels. (Cousin calc. diff. et int. pag. 8.).

Unter mehrern Arten, wie die Kegelschnitte gezeichnet werden können, sind auch solche, wobey eine gerade Linie oder der Schenkel eines Winkels auf einer der Lage nach gegebenen Linie, der Directrix, verschoben wird. S. Kegelschnitte.

Discerptions-Problem, s. Zerlegung der Zahlen.

Discontinuum, was nicht nach dem Gesetz der Stetigkeit verbunden ist. So unterscheidet man die krummen Linien in curvas continuas et discontinuas s. mixtas. Jene werden in allen ihren Theilen durch eine und dieselbe Function der Abscisse x bestimmt; diese aber bestehen aus Theilen verschiedener stetigen Curven, so daß, wenn ein Theil nach einer Function der Abscisse gezogen ist, der folgende nach einer andern Function bestimmt wird. Dergleichen sind Ovalen, die aus Kreisbogen zu verschiedenen Halbmessern zusammengesetzt werden.

Was functio discontinua ist, s. Art. Function.

Discretum, was getrennt ist. I. Discreta (disjuncta) proportio, worin die beiden mittlern Glieder einander nicht gleich sind, wie in $3:5=6:10$, dagegen $3:5=5:8\frac{1}{3}$ eine proportio continua ist. II. Discreta quantitas, eine Größe, die aus abgesonderten Theilen besteht, wie jede Zahl, eine Anzahl Kugeln u. dgl. III. Discreta series, eine Reihe, deren zunächst auf ein ander folgende Glieder endliche Unterschiede haben.

Distanzpunct, s. Perspectiv.

Divergirend. 1) Gerade Linien, die sich in einem Puncte schneiden, sind nach der, diesem Puncte entgegengesetzten Seite hin divergirend, oder aus einander fahrend. 2) Eine Reihe ist divergirend, wenn die Summe ihrer auf einander folgenden Glieder, von dem Anfangsgliede an genommen, sich immer mehr von dem Werthe der Function, die sie der Form nach richtig darstellt, entfernt, je mehr Glieder zusammen genommen werden. 3) Eine divergirende Hyperbel nennt Newton eine Linie der dritten Ordnung, deren Schenkel sich die convexe Seite zukehren, und entgegengesetzte Richtung ihres Zuges haben, wie an den Curven dieser Art mit drey Asymptoten, von welchen zwey einander parallel sind. Enum. lin. tertii ordinis Fig. 66. 67. 68. 4) Eine divergirende Parabel hat zwey Schenkel, deren Richtungen immer größere Winkel mit einander machen, je weiter sie sich erstrecken. Solche sind die glockenförmigen, a. a. O. Fig. 74. 75. 78. 79; und mit zwey sich schneidenden Schenkeln, Fig. 77, und mit einer Spitze, Fig. 80. Die Schenkel der apollonischen Parabel nähern sich immer mehr der parallelen Lage.

Dividendus; Dividiren, s. Division.

Division, Theilung, ist ein arithmetisches Verfahren, wodurch man denjenigen Theil einer gegebenen Zahl A findet, welcher darin eben so vielmahl enthalten ist, als die Einheit in einer andern gegebenen Zahl B. Die zu theilende Zahl A heißt der Dividendus, die Zahl B der Divisor, der gesuchte Theil der Quotient.

Der Dividendus enthält also den Quotienten so vielmahl als der Divisor die Einheit. Der Quotient giebt die Größe des Theils an, der Divisor die Anzahl der Theile. Ist der Divisor eine ganze Zahl, so wird der Dividendus in lauter gleiche Theile getheilt, und der Quotient ist einer der gleichen Theile. Ist der Divisor eine ganze Zahl mit einen anhängenden Bruche, z. B. $12\frac{2}{3}$, so muß man sich den Dividendus gleichfalls in 12 gleich

große Theile, nebst einem Theile, der ⅔ eines dieser Theile ist, eingetheilt vorstellen, und der Quotient ist einer der 12 gleichen Theile. Ist der Divisor ein eigentlicher Bruch, z. B. ⅗; so enthält der Dividendus in diesem Falle von 5 Theilen des Quotienten nur 3, und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Das Product aus dem Quotienten (der Größe des Theils) in den Divisor (die Menge der Theile) giebt den Dividendus. Daher kann man die Beziehungen verwechseln, und den Divisor auch als die Größe des Theils, und den Quotienten als die Anzahl der Theile in dem Dividendus betrachten. Diese zweyfache Beziehung ist wichtig bey der Division einer benannten Zahl. Wenn 36 Thlr. in 9 gleiche Theile zu theilen sind, so ist der Divisor die Anzahl der Theile, und der Quotient 4 Thlr. Die Größe des Theils, von einerley Art mit dem Dividendus. Fragt man aber, wie oft 9 Thlr. in 36 Thlrn. enthalten sind, so zeigt der Divisor die Größe des Theils an, und der Quotient 4 die Anzahl der gleichen Theile. Der Quotient bekommt bey der Antwort oder in dem Facit den Zusatz, mahl.

Bey der Erfindung des Quotienten sieht man den Divisor als die Größe des Theils an, und den Quotienten als die Anzahl der gleichen Theile. Denn man zieht den Divisor von dem Dividendus so oft ab, bis dieser erschöpft ist, und, wenn dieses nicht der Fall ist, verwandelt man den nicht mehr theilbaren Rest in eine Anzahl kleinerer Theile, und nimmt von dem Divisor ebenfalls einen gewissen Theil. In dem beygefügten Schema ist ABCD der Dividendus, AB der Divisor.

A * * * * * C
* * * * *
B * * * * * D

Setzt man diesen so oft hin, bis die Menge der Einer in ABCD erschöpft ist, so ist AC der Quotient, so groß als die Anzahl der gleichen in ABCD enthaltenen AB. Aber AC ist nun auch die Größe des Theils, der in ABCD so vielmahl enthalten ist, als die Einheit in dem Divisor AB.

Da es fast immer sehr beschwerlich seyn würde, den Quotienten durch wiederholtes Abziehen des Divisors zu finden, so muß die Arithmetik zeigen, wie dieses bequemer und möglichst leicht geschehen könne.

Man theile also den Dividendus in mehrere Partialdividenden, deren jeder ein Vielfaches des Divisors sey, doch nicht über das Neunfache, so fern sie als Einer ohne Rücksicht auf ihren dekadischen Werth betrachtet werden. Die Einheiten dieser Partialdividenden nehmen dekadisch ab. Wenn der letzte, der die Einer enthält, kein Vielfaches des Divisors ist, so wird der Überschuß in kleinere Theile aufgelöset. Die Partialquotienten sind jeder gleichnamig mit dem Dividendus, woraus sie entstehen, so daß in dieser Rücksicht der Quotient die Größe des Theils angiebt. Den ersten findet man, wenn man in dem Dividendus von der linken Hand an so viele Ziffern nimmt, daß diese als eine Anzahl von Einern betrachtet, größer als der Divisor, aber kleiner als sein Zehnfaches sind. Man sucht nun die größte Zahl des Vielfachen vom Divisor, welches hierin als in einer Anzahl von Einern steckt, zieht dieses Vielfache ab, und fügt zu dem Reste, als Zehner betrachtet, die nächstfolgende Ziffer des Quotienten als Einer. Mit diesem zweyten Partialdividendus verfährt man wie mit dem ersten, u. s. f. bis man zum letzten Dividendus bloße Einer erhält.

Exempel. Die Zahl 3296517582 zu dividiren durch 4358.

Divisor	
4358	756429, Quotient
	3296517582, Dividendus
30506	24591
21790	28017
26148	18695
17432	12638
8716	39222
39222	0 Rest.

Der erste Partialdividendus ist 32965 hunderttausend, weil 3296 Millionen keine Millionen zum Quotienten geben. Da der dekadische Werth des ersten Partialquotienten, hunderttausend, bestimmt ist, so hat man nun noch nur den Zahlwerth desselben zu suchen, wozu man die 32965 als bloße Einer anzusehen hat. Das Product aus diesem Zahlwerthe 7 in den Divisor, nämlich 30506, ist zur Seite gesetzt, und von 32965 abgezogen. So auch die übrigen Partialproducte. Dieses Verfahren erspart Raum. Den Quotienten setzt man am bequemsten und deutlichsten über den Dividendus, so daß die Ziffern von gleichem dekadischen Werthe über einander zu stehen kommen.

Ein geübter Rechner kann sich die Hinsetzung der Producte ersparen, und jedes Partialproduct dieser Producte sogleich von dem Dividendus abziehen. Das obige Exempel bekommt sonach diese Gestalt:

Divisor	756429 Quotient
4358	3296517582 Dividendus
	245919320
	2806620
	18290
	130
	0

Die Partialdividenden laufen mit einem Theile schräg hinauf: der lezte ganz und gar. Die erste Art erfordert weniger Anstrengung, und gewährt eine leichte Revision, erlaubt auch das Ausstreichen eines zu groß oder klein genommenen Products.

Man hat noch eine Art, wo die Reste jedes Partialdividendus überhalb des ganzen Dividendus gesetzt werden, wie in folgendem Beyspiele, wo 582758 durch 463 getheilt sind, und 304 zum Reste bleiben.

```
                 43
                2700
Divisor |     118104   | Quotient
  463   |     582758   |  1258
              463654
               9210
                237
                 3
```

Allein diese Art zu dividiren kann leicht einen Irrthum veranlassen, und gestattet keine Revision. Man nennt sie das **über sich Dividiren**, wie die zuerst gewiesene das **unter sich Dividiren**. Die alten Rechenmeister pflegten bey dem Dividiren über sich allerhand künstliche Figuren, durch dazu ausgesonnene Exempel, hervor zu bringen.

Die Rechnung wird bey einem öftrer vorkommenden Divisor sehr erleichtert durch eine Tafel der Vielfachen des Divisors bis zum Neunfachen, dergleichen man durch Hülfe der Neperischen Stäbe leicht erhält.

Wo ein Rest bleibt, nachdem das Product aus den Einern des Quotienten in den Divisor abgezogen ist, wird dieser Rest, durch den Divisor dividirt, in Form eines Bruchs dem Quotienten beygefügt, als in dem zweyten Beyspiele der Bruch $\frac{304}{463}$; oder man sezt die Division für die Zehntheile und folgende Decimaltheile fort. S. Decimalbruch.

In der dodekadischen Arithmetik verfahre man nach Art des ersten Exempels.

Divisor		
	3 . 0 . 5 . 8 . 11 9	Quot.
2. 6. 3. 2	7.7.11.11.11.6.11.2.6	Divid.
7. 6. 9. 6	1. 2. 5. 11. 6	
1. 0. 7. 3. 10	1. 10. 7. 8. 11	
1. 8. 2. 1. 4	2. 5. 7. 7. 2	
2. 3. 8. 10. 10	1. 10. 8. 4. 6	
1. 10. 8. 4. 6	1. 10. 8. 4. 6	
	0	Rest.

Wenn man sich bey dieser Form der Zahlen die Vielfachen des Divisors bis zum Eilffachen, und zur Probe bis zum Zwölffachen verfertigt, so hat die Division nach dieser Form keine Schwierigkeit. Der Quotient ist etwas kürzer.

Division mit Brüchen, s. Bruchrechnung und Decimalrechnung.

Division mit allgemeinen Größen, oder algebraische, s. Buchstabenrechnung.

Divisio rationis, Theilung (Trennung) eines Verhältnisses, A:B, ist die Vergleichung des Überschusses von A über B mit B. Wenn A : B = C : D ist, so ist getheilt, A — B : B = C — D : D. Aus der Proportion 12 : 5 = 60 : 25 folgt 7 : 5 = 35 : 25. Der Kunstausdruck kommt aus der Geometrie der Griechen. Euklides nennt diese Umwandlung Διαιρεσις λογου. Man muß sie nicht mit einer andern Theilung, oder besser Zerlegung eines Verhältnisses verwechseln, die darin besteht, daß man zwischen zwey Größen eine oder mehrere stetige Proportionale einschiebt.

Dodecaedron, s. Körper, reguläre.

Dodecagonum, s. Vieleck, reguläre.

Dodekadik, dodekadisches Zahlensystem, dodekadische Form der Zahlen, ist die Vertheilung der Zahlen in Classen von zwölffach steigenden Einheiten, deren jede Classe zwölf enthält, so daß zwölf Einheiten einer Classe eine Einheit der nächsthöhern Classe ausmachen. Es fehlt den Sprachen aber an Benennungen zu dem Gebrauche dieses Zahlensystems, das sonst dem dekadischen vorzuziehen seyn möchte, daher man es für Maaßstäbe häufig gebraucht, s. Duodecimal-Maaß. Wir müßten in jeder Classe zwey neue Wörter haben. Auch sind zwey neue Zeichen nöthig, um die Zehn und Eilf in jeder Classe zu bezeichnen. Inzwischen kann man diese durch unsere Zahlzeichen ersetzen, wenn man die Einheiten jeder Classe durch Puncte von einander absondert, z. B.

8 . 4 . 11 . 5 . 10 . 7

sind 7 Einer; 10 Zwölfer; 5 Zwölfer von Zwölfern, oder fünf 12^2, eilf 12^3; vier 12^4; acht 12^5, da die Einheiten jeder Classe Potenzen von 12 sind, wie in dem dekadischen System von 10.

Man kann eine dodekadische Zahl leicht in die dekadische übersetzen, wenn man eine Tafel der Vielfachen der Potenzen von 12 bis zum Zwölffachen zur Hand hat. Eine solche Tafel für die vier ersten Potenzen folgt hier.

V.	III.	II.	I.	0.
20736	1728	144	12	1
41472	3456	288	24	2
62208	5184	432	36	3
82944	6912	576	48	4
103680	8640	720	60	5
124416	10368	864	72	6
145152	12096	1008	84	7
165888	13824	1152	96	8
186624	15552	1296	108	9
207360	17280	1440	120	10
228096	19008	1584	132	11
248832	20736	1728	144	12

So ist die dodekadische Zahl

4 . 11 . 5 . 10 . 7

gleich der dekadischen 102799.

Hat man keine hinlänglich große Tafel der Vielfachen von den Potenzen der 12 zur Hand, so multiplicire man die höchste Ziffer mit 12, addire dazu die folgende (10 und 11 als eine einzelne Ziffer betrachtet); die Summe multiplicire man ebenfalls mit 12 und addire die dritte Ziffer; u. s. f. bis zu Ende. In dem Exempel sind die Producte nach der Reihe; 48, 708; 8556; 102792; und die letzte Summe 102799, die gesuchte dekadische Zahl.

Eine dekadische Zahl wird in eine dodekadische verwandelt, wenn man sie durch 12 fortgesetzt dividirt, und die Reste nach der Reihe von der rechten nach der linken Hand hin stellt.

Divisor	Dividenden	Reste
12	102799	7
	8566	10
	713	5
	59	11
	4	4

Der erste Quotient giebt die Zwölfer, der zweyte die 12.12; der dritte die 12.12.12, u. s. f. Die Reste sind den Dividenden gleichnamig.

Auf dieselbe Art kann man auch eine dodekadische Zahl in eine dekadische verwandeln. Die dodekadische sey 4.11.5.10.7. Diese ist successiv durch 10 zu dividiren, wobey die Reste den dekadischen Werth von den Einern an hinaufwärts geben.

Divisor	Dividenden	Reste
10	4.11.5.10.7	9
	5.11.4.7	9
	7.1.7	7
	8.6	2
	10	0
	1	1

Der dekadische Werth der gegebenen dodekadischen Zahl ist 102799.

Die Dodekadik hat darin einen Vorzug vor der Dekadik, daß die Duodecimalbrüche (solche, deren Nenner bloß Potenzen von 12 sind) öfterer vollständig geliefert werden, als Decimalbrüche. Diese letztern brechen nur alsdann ab, oder lassen sich vollständig darstellen, wenn der Nenner des Bruchs, der in Decimaltheilen ausgedruckt wird, blos 2 und 5 als Factoren enthält, vorausge-

setzt, daß der Bruch auf die kleinste Benennung gebracht sey. Duodecimalbrüche brechen ab, wenn der Nenner bloß 2 und 3 zu Factoren hat. Es giebt von 1 bis zu irgend einer Zahl N mehr Zahlen, die 3, als solche, die 5 zum Factor haben.

Darum kann man aber nicht das dekadische System abschaffen, und das dodekadische einführen, wie es Werneburg in seiner Begeisterung will, der es jedem redlichen Manne, selbst jeder gebildeten vernünftigen Regierung zur Pflicht macht, das dodekadische System zu verbreiten und gesetzlich zu machen. Er hat dazu eigene neue Wörter und Ziffern angegeben, und ein starkes Rechenbuch, nach der von ihm ungrammatisch sogenannten Teliosadik (dem allein vollkommenen unter allen Zahlen-Systemen) ausgearbeitet, wovon der erste Theil im J. 1060 (dodekadisch) erschienen ist.

Dodekagonalzahl, s. Polygonalzahl.

Doppelbruch, s. Bruch. S. 362.

Doppelpunct ist ein Punct einer Curve, worin sich zwey Zweige derselben schneiden, oder auch eine Spitze bilden. In jenem Falle hat die Subtangente, daher auch $\frac{\partial y}{\partial x}$, zwey Werthe, so daß für diesen Quotienten eine quadratische Gleichung gefunden wird. In dem andern Falle wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ auch durch eine quadratische Gleichung, aber mit zwey gleichen Wurzeln gefunden. S. berührende Linie, und krumme Linie.

Doppeltgerade ganze Zahl ist, die sich zweymahl durch 2 theilen läßt, oder ein Vielfaches von 4.

Doppelverhältniß, s. duplicirtes Verhältniß.

Dragma ist in der alten Algebra die gegebene Größe in einer Gleichung. (Kästners Geschichte der Mathem.

I. S. 70.). Christoff Rudolff benennt in seiner Coß die Einheit in einer geometrischen Progression durch Dragme. Das nächste Glied nach derselben nennt er Radix, die folgenden Zensus, Cubus, Zensdezens, u. s. f.

Dreyeck ist eine von drey Linien eingeschlossene Figur. Diese Umfangslinien heißen die Seiten des Dreyecks. Sie bilden an ihren Durchschnittspuncten drey Winkel, daher die lateinische Benennung, triangulum, und die griechische, trigonum (τριγωνον). Der Urheber des deutschen Ausdrucks hat die zusammenstoßenden Seiten von außen her angesehen. Die Fläche eines Dreyecks ist entweder eben oder gekrümmt. Die ebenen Dreyecke sind geradlinicht, krummlinicht, gemischtlinicht, nach Beschaffenheit der Seiten. Dreyecke, deren Fläche gekrümmt ist, werden nur auf der Kugel, und etwa noch auf einem Sphäroid betrachtet. Auf der Kugel sind die Seiten Bogen größter Kreise. Es müßte ausdrücklich erinnert werden, wenn ein Bogen eines kleinern Kreises eine Seite abgeben sollte.

In diesem Artikel ist nur von geradlinichten Dreyecken die Rede. Von den Kugeldreyecken handelt der Artikel, Kugeldreyeck. Die Berechnung beider Gattungen lehrt der Artikel, Trigonometrie.

1. Ein Dreyeck, dessen Seiten alle gleich groß sind, heißt ein gleichseitiges (triangulum aequilaterum, isopleuron).

Sind zwey Seiten einander gleich, so heißt es ein gleichschenklichtes (aequicrurum, isosceles). Die dritte Seite heißt die Grundlinie (basis).

Ein ungleichseitiges Dreyeck (scalenum, griechisch) hat drey unter sich ungleiche Seiten.

2. Ein Dreyeck, worin ein Winkel ein Rechter ist, heißt ein rechtwinklichtes (tr. rectangulum, orthogonium), jedes andere ein schiefwinklichtes (obliquangulum). Sind alle drey Winkel spitz, so ist

das Dreyeck spitzwinklicht (acutangulum, oxygonium); ist ein Winkel stumpf, so ist es ein stumpfwinklichtes (obtusangulum, amblygonium).

Die beiden Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten; die gegenüber stehende Seite heißt die Hypotenuse.

3. Ein geradlinichtes Dreyeck stellt zugleich ein System von drey sich gegenseitig schneidenden geraden Linien dar, wenn die Seiten desselben unbestimmt verlängert werden. Der äußere Winkel, welchen eine verlängerte Seite mit der anliegenden Seite des Dreyecks macht, ist gleich der Summe der beiden innern entgegengesetzten Winkel. Daher ist die Summe der drey innern Winkel zwey Rechten gleich. — In dem gleichseitigen Dreyeck sind alle drey Winkel gleich groß; in dem gleichschenklichten sind die Winkel an der Grundlinie sich gleich; in dem ungleichseitigen sind alle Winkel ungleich. — Der größern Seite steht der größere Winkel gegen über, der kleinern Seite der kleinere Winkel, und umgekehrt.

4. Ein Dreyeck wird vollkommen bestimmt, 1) durch zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel; 2) durch zwey Winkel und eine Seite; 3) durch alle drey Seiten. — Rechtwinklichte Dreyecke sind ganz bestimmt durch zwey Seiten; schiefwinklichte können mit zwey Seiten und einem von ihnen nicht eingeschlossenen Winkel auf zweyerley Art verzeichnet werden. Das eine ist spitzwinklicht, das andere stumpfwinklicht.

5. Dreyecke, welche die genannten Bestimmungen gemein haben, sind congruent, oder decken sich. Die Winkel, welche in ihnen denselben Seiten gegen über liegen, sind sich gleich; so auch die Seiten, welche denselben Winkeln gegen über stehen.

6 Dreyecke, wie ABC, abc (Fig. 116, Tab. VIII.) sind ähnlich, erstlich, wenn die Winkel des einen den

Winkeln des andern gleich sind, A = a; B = b; C = c. Zweytens, wenn A = a, und AB : AC = ab : ac ist. Drittens, wenn die Seiten einerley Verhältnisse haben, nämlich, wenn AB : AC = ab : ac, und AB : BC = ab : bc, oder AC : BC = ac : bc ist. In allen drey Fällen liegen die übereinstimmenden Winkel denjenigen Seiten gegenüber, welche gleichnamige Glieder der Proportionen sind, und umgekehrt sind diejenigen Seiten gleichnamige Glieder der Proportionen, welche den übereinstimmenden Winkeln gegen über stehen.

In dem ersten Falle ist AB : AC = ab : ac und AB : BC = ab : bc; auch AC : BC = ac : bc. In dem zweyten ist B = b; C = c, woraus dann die beiden übrigen Proportionen folgen. In dem dritten Falle ist A = a; B = b; C = c.

7. Rechtwinklichte Dreyecke sind ähnlich, wenn zwey Seiten in dem einen sich verhalten wie zwey Seiten in dem andern, es sey, daß beide den rechten Winkel einschließen, oder daß beide einen der spitzen enthalten.

8. In dem Dreyeck ABC (Fig. 117.) sey DE parallel mit BC, so ist AB : AC = AD : AE, und AD : BD = AE : EC. Auch AB : BC = AD : DE; und AC : BC = AE : DE. Die Dreyecke ABC, ADE sind sich ähnlich.

9. In dem Dreyeck ABC (Fig. 118.) sey der Winkel BAC durch die Linie AD halbirt, welche BC in D schneidet, so ist AB : AC = BD : CD. Denn man ziehe DE parallel mit AC, so ist der W. EDA = DAC = DAE, also DE = AE. Wegen der ähnlichen Dreyecke ABC, BDE ist AB : AC = BE : ED = BE : AE = BD : DC, aus (8.).

10. Die Seite AB des Dreyecks ABC (Fig. 119.) werde nach AE hin verlängert, und der äußere Winkel CAE werde durch die Linie AD halbirt, welche die verlängerte BC in D schneidet; es ist AB : AC = BD : CD.

Denn man ziehe DE parallel mit AC, so ist W. CAD = ADE, also auch W. EAD = ADE, und daher AE = DE. Ferner ist AB : AC = BE : ED = BE : AE = BD : CD.

11. In dem bey A rechtwinklichten Dreyeck BAC (Fig. 120.) sey AD senkrecht auf BC gezogen; es ist

BD : AB = AB : BC
BD : AD = AD : DC
BC : AC = AC : DC.

12. In dem Dreyeck ABC (Fig. 121.) sey AD so gezogen, daß der W. DAC = B ist. Dadurch sind die Dreyecke ABC, DAC ähnlich, und es ist BC : AC = AC : CD. Mit AC ziehe man eine Parallele EF, welche AD in E, AB in F schneide, so ist das Dreyeck AEF ähnlich dem ABD, und es ist AB : AD = AE : AF.

Die Linien BD, EF sind antiparallele.

13. In dem Dreyeck ABC (Fig. 122.) sind die Seiten in D, E, F halbirt, und durch diese Mitten senkrechte gezogen; diese schneiden sich alle drey in demselben Puncte O.

Denn man ziehe durch den Punct O, in welchem sich zwey Perpendikel, DO, EO, schneiden, die Linien AO, BO, CO, so ist AO = BO, und BO = OC, aus (5.), also AO = OC. Man ziehe OF, so sind die Dreyecke AFO, CFO einander gleich, also OF senkrecht auf AC; daher geht das in F errichtete Perpendikel durch den Durchschnittspunct der beiden übrigen Perpendikularen.

Der Punct O ist der Mittelpunct eines um das Dreyeck beschriebenen Kreises.

14. In dem Dreyeck ABC (Fig. 123.) sind aus den Winkelpuncten die senkrechten AP, BQ, CR auf die gegenüber stehenden Seiten gezogen; diese schneiden sich in einem einzigen Puncte O.

Die beiden senkrechten BQ, CR schneiden sich in O; durch A und O ziehe man an BC die Linie AP. Wegen der rechten Winkel BQC, BRC liegen die Puncte Q, R in dem Halbkreise über dem Durchmesser BC; und auch in dem Kreise, der über AO als Durchmesser beschrieben ist. In dem erstern ist der W. BCR = BQR, weil sie auf demselben Bogen BR stehen; in dem andern Kreise ist der W. BQR = BAO; also ist W. BCR = BAO. Da BAO + AOR = R, so ist auch BCR + COP = R, also ist OPC ein Rechter.

15. In dem Dreyeck ABC (Fig. 124.) werden die Winkel durch die Linien AO, BO, CO halbirt. Diese schneiden sich in demselben Puncte O.

Denn man ziehe durch den Durchschnitt zweyer, BO, CO, die senkrechten OP, OQ, OR, so sind diese senkrechten sich gleich. Daher ist ΔAOQ = AOR, folglich der W. OAQ = OAR.

Der Punct O ist der Mittelpunct des in das Dreyeck eingeschriebenen Kreises.

16. In dem Dreyeck ABC (Fig. 125.) werden die Seiten durch die aus den Winkelpuncten gezogenen Linien AP, BQ, CR, halbirt; diese schneiden sich in demselben Puncte O.

Denn man ziehe durch einen der halbirenden Puncte Q die parallele QN mit der CR, bis an AB, so ist AN : RN = AQ : QC, (8.), also AN = RN, und daher BN : BR = 3 : 2. Folglich ist auch BQ : BO = 3 : 2. Man ziehe QR, so ist diese, wegen der gleichen Verhältnisse AQ : AC und AR : AB, der BC parallel. Also ist BO : OQ = CO : OR und BQ : BO = CR : CO. Die halbirenden Linien schneiden sich also so, daß der Abstand des Durchschnitts auf jeder von dem Winkelpuncte zwey Drittheile der ganzen Linie beträgt. Da

nun BQ von AO so geschnitten wird, so muß AO verlängert die Seite BC halbiren.

Der Punct O ist der Schwerpunct des Dreyecks.

17. Über die Lage dieser vier merkwürdigen Puncte in einem Dreyeck hat Euler eine algebraische Untersuchung angestellt. Solutio facilis problematum quorundam geometricorum, Novi Comm. Petrop. T. XI a. a. 1765. Er erweiset, daß der Mittelpunct des umgeschriebenen Kreises, der Durchschnitt der Perpendikel von den Winkelpuncten auf die Seiten, und der Schwerpunct allemahl in gerader Linie liegen, und zwar so, daß der letztere immer zwischen jenen beiden liegt, von dem zweyten zweymahl so weit entfernt als von dem ersten.

18. In einem rechtwinklichten Dreyeck ist das Quadrat von der Hypotenuse so groß als die Summe der Quadrate von den Katheten. Hievon in dem Artikel, pythagorischer Lehrsatz.

19. In dem spitzwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 126.) sey CD senkrecht auf AB; es ist

$$BC^2 + 2AB \times AD = AB^2 + AC^2.$$

Denn es ist $AB^2 = AD^2 + 2AD \times BD + BD^2$, und $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2AD \times BD + BD^2 + CD^2 = BC^2 + 2AB \times AD$.

20. In dem bey A stumpfwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 127.) ist CD auf die verlängerte BA senkrecht gezogen; es ist $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AD$.

Denn $BD^2 = AB^2 + 2AB \times AD + AD^2$ also $BC^2 = AB^2 + 2AB \times AD + AD^2 + CD^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AD$.

21. In beiden Fällen ist $BC^2 - AC^2 = BD^2 - AD^2$. Wäre in dem spitzwinklichten Dreyeck BC kleiner als AC, so ist $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.

22. Dadurch ist $(BC + AC)(BC - AC) = (BD + AD)(BD - AD)$, oder in dem spitzwinklichten Dreyeck, $AB : BC + AC = BC - AC : BD - AD$;

und in dem stumpfwinklichten, $AB : BC + AC = BC - AC : BD + AD$.

Die Verwandlung des Unterschiedes zweyer Quadrate in ein Rechteck mag hier aus arithmetischen Gründen (Buchstabenrechn. 18.) angenommen werden. Man kann es aber leicht nach Euklideischer Art erweisen.

23. Die Seite AB, auf welche, oder auf deren Verlängerung das Perpendikel von C gelassen ist, werde in E halbirt; es ist $2AB : BC + AC = BC - AC : DE$.

Denn in dem spitzwinklichten Dreyeck (Fig. 126.) ist $BD - AD = AE + DE - AD = 2DE$, so daß diese Proportion die in (22.) gefundene ist. In dem stumpfwinklichten (Fig. 127.) ist $BD + AD = AE + ED + AD = 2ED$, also ist die zweyte Proportion ebenfalls die hier aufgestellte.

Diese Proportion wird in den Elementen angewandt, aus den Seiten eines Dreyecks die Winkel zu finden. Der Unterschied zwischen AE und DE ist AD, und $AC : AD = 1 : \cos A$.

24. In eben diesen Dreyecken ziehe man von C nach der Mitte E von AB die Linie CE; es ist $AC^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2EC^2$.

Denn das spitzwinklichte (Fig. 126.) zerfällt in das spitzwinklichte ACE, und das stumpfwinklichte BCE. In jenem ist $AC^2 + 2AE \times DE = AE^2 + CE^2$, (19.), in diesem ist $BC^2 = BE^2 + CE^2 + 2BE \times DE$ (20.). Beide Gleichungen zusammengenommen, geben die aufgestellte.

Das stumpfwinklichte Dreyeck ABC (Fig. 127.) zerfällt in zwey stumpfwinklichte ACE, BCE, für deren ersteres aber der Satz in (19), nämlich $AC^2 + 2AE \times DE = AE^2 + EC^2$ gilt, weil der von AE, CE eingeschlossene Winkel E spitz ist.

25. In dem Dreyeck ABC (Fig. 128.) sey der Winkel A durch die Linie AD halbirt; es ist $AB \times AC = AD^2 + DB \times DC$.

Man fälle von C die senkrechte CE auf AD, wenn nämlich der an der Seite des spitzen Winkels ADC liegende Winkel des Dreyecks durch C bezeichnet wird. Man nehme $EF = ED$, und ziehe CF, so ist W. $AFC = ADB$, und $\triangle ACF$ ähnlich dem $\triangle ABD$; also ist

$$BD : AD = FC : AF = DC : AF,$$

und $AB : AD = AC : AF$.

Ferner ist aus (20.), $AC^2 = AF^2 + FC^2 + 2 AF \times FE = DC^2 + AF(AF + FD) = DC^2 + AF \times AD$.

Aus der ersten der angezeigten Proportionen, oder aus $BD : DC = AD : AF$ wird erhalten $BD \times DC : DC^2 = AD^2 : AF \times AD$; hieraus $BD \times DC + AD^2 : DC^2 + AF \times AD = AD^2 : AF \times AD = AD : AF$; das ist $BD \times DC + AD^2 : AC^2 = AD : AF$. Die zweyte Proportion, oder die, $AB : AC = AD : AF$, giebt $AB \times AC : AC^2 = AD : AF$.
Folglich ist $AB \times AC = AD^2 + BD \times DC$.

26. In dem Dreyeck ABC (Fig. 129.) sey AD senkrecht auf BC, und AE willkührlich gezogen. Aus (22.) ist

$$\text{I. } BC : AC + AB = AC - AB : CD - BD;$$
$$\text{II. } BE : AE + AB = AE - AB : ED - BD;$$
$$\text{III. } EC : AC + AE = AC - AE : CD + ED.$$

Wenn BD größer als CD oder als ED ist, so werden die Unterschiede entgegengesetzt genommen. Das vierte Glied dieser Proportionen bezeichne man in I. durch a; in II. durch b; in III. durch c, so ist

$$a - b = EC; \quad c - a = BE; \quad c - b = BC.$$

Behandelt man diese Proportionen arithmetisch, so ist

$$\text{I. } \frac{AC^2 - AB^2}{BC} - \frac{AE^2 - AB^2}{BE} = EC,$$

$$\text{II. } \frac{AC^2 - AE^2}{EC} - \frac{AC^2 - AB}{BC} = BE,$$

$$\text{III. } \frac{AC^2 - AE^2}{EC} - \frac{AE^2 - AB^2}{BE} = BC,$$

und daraus

$$BE(AC^2 - AB^2) - BC(AE^2 - AB^2) =$$
$$BC(AC^2 - AE^2) - EC(AC^2 - AB^2) =$$
$$BE(AC^2 - AE^2) - EC(AE^2 - AB^2)$$

27. In dem gleichschenklichten Dreyeck ABC (Fig. 130.) sey willkührlich AE bis an die Grundlinie BC gezogen; es ist $AB^2 = AE^2 + CE \times BE$.

Denn man ziehe die senkrechte AD, so ist $AE^2 = AD^2 + DE^2$, und $AD^2 + BD^2 = AB^2$, daraus $AE^2 + BD^2 - DE^2 = AB^2$, oder $AE^2 + (BD + DE)(BD - DE) = AB^2$, welches die Aussage des Satzes enthält.

Inhalt der Dreyecke.

28. Dreyecke, die über derselben Grundlinie gleiche Höhe haben, sind gleich groß — Bey einerley Höhe verhalten sie sich wie die Grundlinien, bey einerley Grundlinie wie die Höhen. — Das Verhältniß ungleicher Dreyecke wird zusammengesetzt aus den Verhältnissen der Grundlinien und der Höhen. Dieses Verhältniß arithmetisch auszudrucken, werden Grundlinien und Höhen durch eine willkührliche linearische Einheit ausgedruckt, und so ist das Verhältniß der Dreyecke gleich dem Verhältnisse der Producte aus den Grundlinien in die Höhen. Z. B. die Grundlinien seyn 12 und 20; die Höhen 9 und 7, so verhalten sich die Dreyecke wie 108 : 140.

29. Verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen, so sind die Dreyecke gleich groß, z. B. wenn die Grundlinien 12 und 20, die Höhen 15 und 9 sind.

30. Dreyecke, welche in einem ihrer Winkel übereinkommen, und in welchen die Seiten an diesem Winkel wiederkehrend proportional sind, sind gleich groß.

Es seyn (Fig. 131.) in den Dreyecken BAC, DAE die Winkel bey A gleich groß, so daß, wenn AB, AE in eine gerade Linie fallen, auch AC, AD eine gerade ausmachen, und es sey dabey AC : AD = AE : AB. Man ziehe BD. so ist △BAC : △BAD = AC : AD; und △DAE : △BAD = AE : AB; daher ist △BAC : △BAD = △DAE : △BAD. Da das zweyte Glied der Verhältnisse dasselbe ist, so ist △BAC = △DAE.

31. Ähnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten. Verhalten sich diese z. B. wie 1 : 2 : 3 : 4, etc. so verhalten sich die Flächenräume der Dreyecke wie 1 : 4 : 9 : 16 : etc.

32. Ein Dreyeck ist die Hälfte eines Parallelogramms, das dieselbe Grundlinie und Höhe wie jenes hat.

33. Wenn Grundlinie und Höhe durch eine linearische Einheit arithmetisch ausgedruckt werden, so giebt das halbe Product beider die Zahl an, wie vielmahl das Dreyeck das Quadrat enthalte, dessen Seite jene linearische Einheit ist. Z. B. Die Grundlinie sey 7, (Zoll, Fuß) die Höhe $4\frac{3}{5}$, so ist der Inhalt des Dreyecks $16\frac{1}{10}$ Quadraten (Qu. Zollen oder Qu. Fußen) gleich. Die Grundlinie sey $\frac{3}{4}$, die Höhe $\frac{2}{5}$, so ist das Dreyeck $\frac{3}{25}$ des Quadrats, welches zur Einheit oder zum Maaße dient.

34. Die drey Seiten eines Dreyecks ABC (Fig. 126. 127.) werden folgendergestalt bezeichnet, BC = a; AC = b; AB = c; die gegenüberliegenden Winkel durch A, B, C; es ist der Inhalt des Dreyecks $= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$, oder, wenn

$a + b + c = s$ ist, und das Dreyeck durch T bezeichnet wird, $T = \sqrt{\tfrac{1}{2}s\,(\tfrac{1}{2}s - a)(\tfrac{1}{2}s - b)(\tfrac{1}{2}s - c)}$.

Man halbire AB in E, und ziehe CD senkrecht auf dieselbe, so ist $DE = \frac{a^2 - b^2}{2c}$ (23.), und $BD = \tfrac{1}{2}c + \frac{a^2 - b^2}{2c} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$. Man setze $DE = d$, und $CD = p$, so ist $p^2 = a^2 - (\tfrac{1}{2}c + d)^2 = (a + \tfrac{1}{2}c + d)(a - \tfrac{1}{2}c - d)$. Nun ist $a + \tfrac{1}{2}c + d = \frac{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}{2c} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2c} = \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}$. Ferner ist $a - \tfrac{1}{2}c - d = a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - a^2 + 2ac - c^2}{2c} = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2c} = \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2c}$. Folglich ist

$$p^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4cc}$$

Der Inhalt des Dreyecks arithmetisch ausgedruckt ist $\tfrac{1}{2}pc$. So erhellt die Aussage des Satzes.

35. Der Satz ist hier arithmetisch ausgedruckt, und durch allgemeine Rechnung erwiesen. Wollte man denselben nach geometrischer Art ausdrucken, so würde er folgendergestalt lauten: Das Verhältniß des Quadrats von der Summe aller Seiten eines Dreyecks zu der Fläche desselben wird zusammengesetzt aus den subduplicirten Verhältnissen von 2 : 1, und von der Summe zu dem Unterschiede der halben Summe und jeder einzelnen Seite. — Das subduplicirte Verhältniß zweyer Größen m : p ist nämlich das von m zu der mittlern proportionalen n zwischen beiden, wenn m : n = n : p ist.

36. Der Satz ist zu Berechnungen sehr brauchbar, da Winkel und Perpendikel dadurch entbehrlich gemacht werden, auch keine genaue Zeichnung nöthig ist. Er kommt zuerst in der Geodäsie (praktischen Geometrie) des jüngern Hero vor, der im achten Jahrhundert oder später gelebt hat. Montucla führt den Satz daraus an, (Histoire des Mathem. nouv. ed. T. I. p. 343.), und Pfleiderer theilt in seiner ebenen Trigonometrie, S. 389, eine Stelle aus einer Pariser Handschrift mit, welche der Diaconus Camerer daraus abgeschrieben hat. Die Regel wird darin ohne Beweis vorgetragen, und durch ein Beyspiel erläutert. In der Ausgabe der Geodäsie nebst einem Buche von Kriegsmaschinen durch Barocius, Venedig 1572, ist die Regel nicht befindlich. Die erste gedruckte Schrift, worin der Satz mit dem Beweise vorkommt, ist des Minoriten Lucas de Burgo Summa de Arithmetica, Geometria, cet. 1494. Derselbe Beweis steht in des Tartalea Trattato de numeri e misure, daher bisweilen der Satz diesem letztern zugeschrieben wird. Ramus theilt ihn auch mit in den Scholis mathematicis, ist aber damit unzufrieden, wegen der dunkeln Hysterologie, worunter er vielleicht den Mangel des kunstgerechten geometrischen Vortrages versteht. Er schreibt den Beweis dem Jordanus Nemorarius und Tartalea zu, von welchen der erstere im 13ten Jahrhundert gelebt haben mag. Sie hätten, sagt er, dadurch sehr gute Geschicklichkeit in der Mathematik, aber nicht in der Logik gezeigt. Denselben Beweis trägt van Ceulen vor, in den Fundamentis arithm. et geom. probl. 35, wobey der Übersetzer, Snellius, erinnert, daß alle, welche sich desselben bedient hätten, sich einen Fehler gegen die wahre Methode zu Schulden kommen ließen, durch die planoplanorum stereometriam, wie er es nennt. Er verändert daher den Beweis etwas, um diesen Mangel zu heben. Newtons Beweis in der Arithm. univ. probl. geom. XI. kommt im Wesentlichen mit dem hier gegebenen überein, ist aber in der Form verschieden, weil er ganz geometrisch ist, außer daß noch

die Quadratwurzel aus dem Product von vier Linien gezogen wird. Boscovich (Operum T. V. Opusc. XIV.) sucht den Halbmesser des in ein Dreyeck einzuschreibenden Kreises durch eine theils geometrische, theils trigonometrische Methode. Wenn dieser gefunden ist, so wird auch unmittelbar daraus der Inhalt des Dreyecks hergeleitet. Euler (Novi Comm. Petrop. T. I. a. a. 1747, 48.) sucht durch eine rein geometrische Construction den Werth dieses Halbmessers. Einen Beweis durch analytische Trigonometrie allein, unabhängig von irgend einer Construction, findet man in Karstens Mathesi theoretica elementari et sublimiori, 1760. §. 43. pag. 313, und Lehrbegriff der Mathematik, 2. Th. 461 §. auch in Kästners Anfangsgründen, Trigonometrie 20 u. 21. Satz, und in meiner analytischen Trigonometrie, S. 23. Die linearischen Nachrichten von diesem Lehrsatze, und die Methoden ihn zu beweisen, sind ausführlich in Pfleiderers ebenen Trigonometrie S. 374 — 394. mitgetheilt.

37. Da der Raum auf Tab. VIII. noch verstattet, eine Figur beyzufügen, so benutze ich denselben, um den von Euler a. a. O. gegebenen feinen geometrischen Beweis des Lehrsatzes mitzutheilen.

In dem Dreyeck ABC (Fig. 132.) werden die Winkel durch die Linien AO, BO, CO, halbirt, die sich in O schneiden, (15.). Von O werden die senkrechten OP; OQ, OR auf die Seiten gezogen. Der Inhalt des Dreyecks ist $= \frac{1}{2}$ (AB + AC + BC) OP, oder so groß als des Rechtecks, dessen eine Seite die halbe Summe von AB + AC + BC, die andere die senkrechte OP ist. Nun hat man diesen Ausdruck in einen andern zu verwandeln, worin die senkrechte OP nicht vorhanden ist.

Zuerst bemerke man, daß AR = AQ; BR = BP; CP = CQ ist. Daher ist AR + BP + CQ die halbe Summe der Seiten, und der Inhalt des Dreyecks = (AR + BP + CQ) OP.

Nun suche man vermittelst ähnlicher Dreyecke einen Ausdruck, der diesem gleich ist, und ganz durch die Seiten des Dreyecks gegeben wird.

Auf eine der ihren Winkel halbirenden Linien, wie CO, die hier zu verlängern ist, ziehe man aus einem der beiden andern Winkel, B, die senkrechte BMN, welche der verlängerten PO in N begegne. Es ist der W. $BOM = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, also OBM das Complement dieser beiden zum Rechten. Da $A + B + C =$ zwey Rechten, so ist $\frac{1}{2}A$ auch das Complement von $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ zum Rechten, also W. $OBM = OAR$. Daher sind die rechtwinklichten Dreyecke BMO, ARO sich ähnlich, und es ist $BM : MO = AR : OR = AR : OP$. Da der W. BNP, so wie BCM, jeder das Complement von CBM zum Rechten sind, so ist W. $BCM = BNP$, und in den ähnlichen Dreyecken BMC, OMN ist $BM : BC = MO : ON$, oder $BM : MO = BC : ON$, folglich ist $BC : ON = AR : OP$, also

$$AR \times ON = BC \times OP.$$

Zu beiden Rechtecken addire man das $AR \times OP$, so ist $AR \times PN = (AR + BC) OP = (AR + BP + CQ) OP$. Wegen der ähnlichen Dreyecke BPN, OPC ist $PN : PP = CP : OP$, also $PN \times OP = BP \times CP = BP \times CQ$. Aus der Gleichheit jener Rechtecke folgt die Gleichheit der Prismen $AR \times PN \times OP$ und $(AR + BP + CQ) OP^2$; also ist

$$AR \times BP \times CQ = (AR + BP + CQ) OP^2.$$

Hieraus ergiebt sich nun sogleich der Satz, wie der Inhalt eines Dreyecks durch die Seiten gefunden wird. Es sey die Summe aller drey Seiten = S, so ist $AR + BP + CQ = \frac{1}{2}S$; $AR + BC = \frac{1}{2}S$; $BP + AC = \frac{1}{2}S$; $CQ + AB = \frac{1}{2}S$, und es ist $(\frac{1}{2}S - BC)(\frac{1}{2}S - AC)(\frac{1}{2}S - AB) = \frac{1}{2}S \times OP^2$ und der arithmetische Ausdruck des Inhalts des Dreyecks ist

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - AB)(\tfrac{1}{2}S - BC)(\tfrac{1}{2}S - AC)}.$$

38. Die in (37.) gefundene Gleichung verwandle man in diese,

$$\frac{AR}{OR} \times \frac{BP}{OP} \times \frac{CQ}{OQ} = \frac{AR}{OR} + \frac{BP}{OP} + \frac{CQ}{OQ}.$$

Die Quotienten sind nach ihrer Folge die Cotangenten der Hälften von den Winkeln A, B, C, so daß

$$\cot\tfrac{1}{2}A . \cot\tfrac{1}{2}B \times \cot\tfrac{1}{2}C = \cot\tfrac{1}{2}A + \cot\tfrac{1}{2}B + \cot\tfrac{1}{2}C,$$

wenn $A + B + C = 2$ Rechten ist. Der Satz wird in der Goniometrie II. durch Rechnung erwiesen.

39. Aus der Gleichung in (37.) ergiebt sich auch der Werth des Halbmessers des in ein Dreyeck einzuschreibenden Kreises durch die Seiten desselben.

Von der Verwandlung eines Dreyecks in ein anderes oder in eine mehrseitige Figur, von der Theilung nach gewissen Bedingungen, von der Verbindung mit dem Kreise, s. Verwandlung der Figuren, Theilung der Figuren, Kreis.

Mancherley Sätze und Aufgaben über die Dreyecke, in van Ceulen Fundamentis arithm. et geom. 1615. — Greg. a Sto Vincentio opere geometrico, p. 21–36. — Van Schooten exercit. geometricis 1657. — Newtoni Arithmetica universali. — Gilberts Geometrie nach Le Gendre, Simpson u. m. 1798.

Dreytheilig. s. Trinomisch.

Duodecimal=Maaß ist die Eintheilung der Einheit in 12 gleiche Theile, und eines dieser Theile in 12, und so ferner. Die Brucheinheiten machen die Reihe $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{12.12}$; $\frac{1}{12.12.12}$; $\frac{1}{12^4}$; $\frac{1}{12^5}$, u. s. f. aus. z. B. die Ruthe werde in 12 Fuß, der Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Theile, Skrupel, oder wie man sie nennen will, getheilt, so mißt und rechnet man nach dem Duodecimalmaaße. Die leichtere Eintheilungsart hat dieses Maaß bey Feldmessern und Handwerksleuten beliebt gemacht. Die Zahl 12 läßt sich in

2, 3, 4, 6 gleiche Theile theilen, die Zahl 10 nur in 2 und 5.

Nach diesem Maaße enthält eine Quadratruthe 144 Quadratfuß; 144 mahl 144 Quadrat-Zoll; 144 mahl 144 mahl 144 Quadratlinien. Eine Cubikruthe enthält 1728 Cubikfuß, 1728 mahl 1728 Cubikzoll; 1728 mahl 1728 mahl 1728 Cubiklinien. S. Cubik-Einheit.

Duodecimalrechnung ist die Rechnung nach Duodecimalmaaß. Sie ist nur darin von der dodekadischen verschieden, daß die Menge der Haupteinheiten dekadisch ausgedruckt wird, und daß die kleinern Einheiten bey Flächenrechnungen die Progression $\frac{1}{144}$, $\frac{1}{144^2}$, $\frac{1}{144^3}$, etc. bey Cubikrechnungen die Progression $\frac{1}{1728}$, $\frac{1}{1728^2}$, $\frac{1}{1728^3}$, etc. bilden.

Die Addition und Subtraction ist sehr leicht, und nichts als eine gemeine mit benannten Zahlen. Die Multiplication und Division macht nach der gewöhnlichen Art Schwierigkeit; folgendes Verfahren macht sie leicht.

Ein Rechteck hat die Länge 5° 6′ 7″ und Breite 2° 3′ 5″, Duodecimalmaaß; man soll den Inhalt angeben. Man multiplicire diese dodekadischen Zahlen nach Art der dekadischen in einander, folgendergestalt:

```
        5 . 6 . 7
        2 . 3 . 5
    -------------
    2 . 3 . 8 . 11
1 . 4 . 7 . 9
11 . 1 . 2
--------------------
1 . 0 . 8 . 1 . 5 . 11
```

Die beiden niedrigsten dodekadischen Ziffern, 5 . 11, sind Quadratlinien; die beiden vorhergehenden, 8 . 1, sind

Quadratzolle, und 1 . 0 sind Quadratruthen, da die Längen-Zolle durch $\frac{1}{12}$, und die Linien durch $\frac{1}{144}$ bezeichnet werden. Also ist der Inhalt 12° 97′ 71″ Quadratmaaß.

Es sey der Inhalt eines senkrechten Prisma zu finden, dessen Länge 5° 6′ 7″, Breite 2° 3′ 5″, Höhe 7′ 2″ ist. Man multiplicire die gefundene Grundfläche, aber dodekadisch ausgedruckt, in die Höhe 7′ 2″, wie folget

```
      1 . 0 . 8 . 1 . 5 . 11
                      7 . 2
    ------------------------
      2 . 1 . 4 . 2 . 11 . 10
  7 . 4 . 8 . 10 . 5 . 5
  ---------------------------
  7 . 6 . 10 . 2 . 8 . 4 . 10
```

Die drey letzten dodekadischen Ziffern sind Cubikzolle, die drey vorhergehenden Cubikfuße; die höchste bedeutet Cubikruthen. Die Reduction auf dekadische Werthe giebt den Inhalt 7° 986′ 1210″ Cubikmaaß.

Die Division geschieht wie in dem Artikel, Division, gezeigt ist, nachdem man aber die dekadischen Zahlen auf dodekadische gebracht hat, um die Progression der Einheiten nach den Potenzen von 12 zu erhalten.

Exempel einer Reduction von einem Maaße auf das andere. — Es sollen 584 Cubfuß 622 Cubzoll Decimalmaaß in Duodecimalmaaß verwandelt werden. Die Ruthe ist die Einheit.

Es sind 584622 Cubzoll (dek.) = 2.4.2.3.10.6 Cubzoll (dodek.). Nun verhält sich die Menge der Cubikzoll Decim. zu der Menge der Cubikzoll Duodec. wie $10^6 : 12^6$. Daher ist die Zahl 2.4.2.3.10.6 mit 12^6 (d. i. 1.0.0.0.0.0.0, zu multipliciren, und mit 10^6 das ist, 4.0.2.8.5.4 (dodek.), zu dividiren. Die Rechnung ist folgende.

Divisor	Quotient
4.0.2.8.5.4	7.0.2.2.8.7

Dividend 2.4.2.3.10. 6.0. 0. 0. 0.0.0
2.4.1.6.11. 1.4

1. Rest 8.11. 4.8. 0. 0
8. 0. 5.4.10. 8

2. Rest 10.11.8. 1. 4. 0
8. 0.5. 4.10. 8

3. Rest 2.10.9. 8. 5. 4.0
2. 8.1. 9. 7. 6.8

4. Rest 2.7.10. 9. 9.4.0
2.4. 1. 6.11.1.4

5. Rest 3. 9. 2.10.2.8

Der Quotient ist 7.0.2. Cubf. 2.8.7. Cubzoll. Das ist, 1010 Cubf. 391 Cubz. Duod. Maaß, aber dekadisch ausgedruckt.

Das Exempel, nach gemeiner Art berechnet, steht in Karstens Anfangsgründen, I. Th. 636 S. wo noch Cubiklinien und Cubscr. zugefügt sind.

Setzt man die Division weiter fort, so sind die 3 folgenden Ziffern des Quotienten 11.3.0. Nämlich

Divisor	Dividend	Quot.
4.0.2.8.5.4	3.9.2.10.2. 8.0.0.0	11.3.0

3.8.2. 5.8.10.8

1.0. 4.5. 9.4.0.0
1.0. 0.8. 1.4.0

3.9. 8.0.0.0

Die 11.3.0. Cublin. sind 1620 Cublin. dekadisch gezählt, wofür genauer 1621 zu setzen sind. Karsten hat

über 1621 Cublin. noch eine Anzahl Cubscr. durch einen Rechnungsfehler.

Wären die 1010 Cubf. 391 Cubz. 1621 Cublin. Duod. Maaß auf Decimalmaaß zu reduciren, so wäre die Rechnung etwas leichter, weil, nachdem die dekadischen Zahlen auf dodekadische gebracht sind, das Ganze durch 4.0.2.8.5.4 zu multipliciren, und durch 1.0.0.0.0.0.0 zu dividiren ist.

Duplicirtes, zweyfaches, **Verhältniß** (ratio duplicata); ist ein aus zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetztes. Das einfache sey a:b, so ist das zweyfache, aa:bb. Hier ist der Exponent das Quadrat von dem des einfachen Verhältnisses. In dem a:2b, ist der Exponent das gedoppelte von dem in jenem. Wenn man dieses Verhältniß mit jenem vergleichen wollte, so müßte man es ratio dupla nennen. S. Verhältniß.

Duplicatio cubi, s. Delisches Problem.

Durchmesser einer krummen Linie, ist eine gerade Linie, welche alle parallelen Chorden an derselben halbirt. In dem Kreise halbirt die gerade Linie, welche aus dem Mittelpuncte durch die Mitte einer Chorde gezogen ist, alle derselben parallelen, und schneidet sie unter einem rechten Winkel. In der Ellipse und Hyperbel werden alle unter sich parallelen Chorden, in welcher Lage sie auch genommen werden, durch eine gerade Linie halbirt, die durch einen gegebenen Punct, den Mittelpunct der Curve, geht. Die beiden Hauptdurchmesser schneiden die coordinirten Chorden unter einem rechten Winkel. In der Parabel sind alle Durchmesser der Axe parallel. Unter den krummen Linien höherer Gattungen haben viele keine Durchmesser, andere nur einen oder einige.

In einem allgemeinern Sinne heißt Durchmesser einer krummen Linie eine gerade Linie, welche alle an eine Curve gezogenen Parallelen so schneidet, daß die Summe der zwischen ihr und den Puncten der Curve, auf jeder dieser

Parallelen, enthaltenen Abschnitte an der einen Seite so groß ist als an der andern. In diesem Sinne hat jede algebraische Curve unendlich viele Durchmesser.

Eine krumme Linie ist in Beziehung auf eine andere ihr Durchmesser, wenn die Summe der positiven Producte aus den zwischen beiden enthaltenen Abschnitten gerader parallelen Linien so groß ist als die Summe der negativen, bey einer bestimmten Anzahl der combinirten Abschnitte. Der krummlinichte Durchmesser ist ein Kegelschnitt, wenn je zwey Abschnitte in einander multiplicirt werden.

Euleri Introd. in Anal. Inf, T. II. cap. XV.
Cramer Analyse des lignes courbes algebriques, Ch. VI.
Newtoni enumer. lin. tertii ordinis, art. II. III. In dieser Abhandlung sind Beyspiele von Linien der dritten Ordnung mit einem Durchmesser.

Durchschnitt, (Sectio) ist der Punct, worin sich zwey Linien, oder die Linie, worin sich zwey Flächen schneiden. Wenn ein Körper von einer Fläche durchschnitten wird, so ist der Theil der Fläche, der innerhalb des Körpers liegt, der Schnitt, oder Durchschnitt des Körpers. Dieser wird begränzt von dem Durchschnitt der schneidenden Fläche und der Oberfläche des Körpers.

Dyadik, dyadisches Zahlensystem, dyadische (zweyziffrige) Form der Zahlen, ist die Vertheilung der Zahlen in Classen von zweyfach steigenden Einheiten, deren jede Classe zwey enthält, so daß zwey Einheiten einer Classe eine Einheit der nächst höhern Classe ausmachen. Jede Zahl wird demnach bloß aus den Gliedern der geometrischen Reihe

$$1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \text{etc.}$$

zusammengesetzt. Es ist, um jede Zahl dadurch auszudrucken, nur ein einziges Zeichen, 1, nebst der 0 nöthig. Die Eins in der ersten Stelle rechter Hand bedeutet einen

Einer, in der zweyten 2, in der dritten 4, u. s. f. Z. B. die dyadische Zahl

110011100111

ist, von der rechten Hand her gelesen, dekadisch = 1 + 2 + 4 + 32 + 64 + 128 + 1024 + 2048 = 3303. Hieraus sieht man, daß in diesem System der Classen zu viele werden, so wie es auch sehr viele Benennungen der Classen erfordern würde. Die Rechnungen nach demselben sind zwar sehr einfach, aber erfordern zu vieles Schreiben.

Eine dekadische Zahl in eine dyadische zu verwandeln, dividire man sie durch 2; den Quotienten wieder durch 2; den zweyten Quotienten wieder durch 2, und so fort: die Reste, mit Einschluß der 0 bey geraden Dividenden, schreibe man der Reihe nach von der Rechten zur Linken hin, so hat man die dyadische Form der gegebenen Zahl. Z. B. die Zahl 35351 dyadisch auszudrucken.

Dividend	Rest	Dividend	Rest	Divid.	Rest
35351	1	1104	0	34	0
17675	1	552	0	17	1
8837	1	276	0	8	0
4418	0	138	0	4	0
2209	1	69	1	2	0
1104		34		1	1

Die dekadische Zahl 35351 ist dyadisch = 1000101000010111.

Die Verwandlung einer dyadischen Zahl in eine dekadische kann man folgendergestalt, ohne eine Tafel der Potenzen von 2, vornehmen. Man nehme die höchste Ziffer doppelt, addire dazu die folgende, verdopple die Summe und addire dazu die dritte, fahre auf diese Art fort bis zu Ende. Z. B. die obige dyadische Zahl

110011100111

Die folgweise erhaltenen Summen sind: 3; 6; 12; 25; 51; 103; 206; 412; 825; 1651; 3303. Die letzte

Zahl 3303 ist die gesuchte dekadische. Den Grund des Verfahrens wird man bey einigem Nachdenken leicht finden.

Die Verwandlung einer dyadischen Zahl in eine dekadische kann man auch auf eine ähnliche Art als die umgekehrte vornehmen. Man muß nämlich jene mit Zehn, d. i. 1010, dividiren, den Quotienten wieder dadurch, und so fortfahren, bis man auf einen Quotienten unter Zehn kommt, der nun selbst der letzte Rest wird. Alle die einzelnen Reste geben die Ziffern der reducirten Zahl. Als Beyspiel der Division folgt hier die erste Operation.

```
  Divisor |      Quotient
     1010 |     101001010
  --------+------------------
  Dividend  110011100111
            1011
              1100
                1011
  Rest            11
```

Der erhaltene Quotient mit 1010 dividirt giebt zum Rest 0; der nächste Quotient giebt zum Rest 11, und durch die Division zum Quotienten 11. So wird die dekadische Zahl = 3803.

Wenn gleich die dyadische Form zur praktischen Rechnung nicht brauchbar ist, so giebt sie doch einen und den andern Vortheil zur Einsicht in die Zusammensetzung und Zerlegung der Zahlen an die Hand. Erstlich, man sieht daraus, wie jede Zahl sich bloß aus den Zahlen der Progression 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : etc. zusammensetzen läßt. Dies ist beym Abwägen der Körper nützlich, um es mit der kleinsten Anzahl von Gewichten zu bewerkstelligen. Man kann z. B. mit den Gewichten 1; 2; 4; 8; 16; 32 Pfund alle Gewichte von 1 bis 63 ganzen Pfunden zusammensetzen. Denn die dyadische Zahl 111111 ist die nächst kleinere vor 1000000, als welche man erhält, wenn man zu jener 1 setzt. Alle kleinere Zahlen werden aus einigen jener sechs Zahlen zusammengesetzt. Z. B. die dekadische Zahl 51

ist dyadisch 110011, so daß zu 51 Pf. die Gewichte 1; 2; 16; 32 erfordert werden.

Zweytens fällt bey der dyadischen Form sehr oft die Theilbarkeit der Zahlen in die Augen. Bloß die Symmetrie in der Folge der 1 und 0 macht sie manchmahl sichtbar, weil diese Symmetrie bey der dyadischen Form, da sie nur zweyerley Zeichen enthält, öfter vorkommen, als bey der dekadischen. Z. B. 11011 (= 27) ist durch 11 (= 3) theilbar; 101101 (= 45) durch 101 (= 5); 1010101 (= 85) durch 101 (= 5) und durch 10001. Zuweilen kann man eine nicht symmetrische Folge durch Zerlegung symmetrisch machen. So ist 1101 = 10100

101

Es läßt sich also diese Zahl (= 25) durch 5 theilen. In der oben zum Beyspiel gebrauchten Zahl

1000101000001011 1 (= 35351)

ist keine symmetrische Folge; allein der erste Theil ihrer Ziffern 1000101 läßt sich in die Theile

101110

10111

zerlegen, welche mit dem letzten Theile der Zahl nach den 4 Nullen überein kommen. Daher ist die Zahl durch 10111 (= 23) theilbar.

Das dyadische Zahlensystem hat zuerst Joh. Caramuel, ein Bischof von Campagna und Satriano im Königreiche Neapel, in seiner Mathesis biceps, vetus et nova, Campaniae 1670. T. I. pag. XLV. medit. prooemialis, angegeben, wo er zugleich die Zahlensysteme mit den Grundzahlen Drey bis Zehn, das dodekadische und das sechszigtheilige beschreibt. Ohne von dieser in einem wustvollen Werke versteckten Angabe etwas zu wissen, ist Leibnitz auf das dyadische Zahlensystem gerathen, und hat gezeigt, wie man es zum Rechnen und andern Zwecken gebrauchen möge. In einem Schreiben an den Herzog Rudolph August von Braunschweig vom J. 1697 wendet er es zu einer allegorischen Vorstellung der Schöpfung aus Nichts an. Auf der Zeichnung zu einer Schaumünze entwirft er Licht und Finsterniß hinter einer mit dyadischen Zah-

len beschriebenen Tafel, nebst der Umschrift: Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum. Er fügt hinzu, daß er seine Vorstellung der Zahlen an den Pater Grimaldi in China schicken wolle, in der Hoffnung, daß dieses Sinnbild des Geheimnisses der Schöpfung dem Chinesischen Kaiser des christlichen Glaubens Vortrefflichkeit vor Augen legen werde. Wenn dieses auch nicht bewirkt seyn mag, so hat doch dadurch ein anderer Missionär in China, der P. Bouvet, eine chinesische, bis dahin ganz unverständliche Schrift, entziffert. Sie enthält bloße Striche, von welchen ein Theil aus zwey Stücken besteht. Sie wird dem Kaiser Fohi, dem Gründer des Reichs und der chinesischen Gelehrsamkeit, zugeschrieben. Die ganzen Striche bedeuten nach der Erklärung dyadische Einheiten, die zertheilten Null, so daß das dyadische System überaus alt ist, da Fohi vor mehr als 4000 Jahren gelebt haben soll. Leibnitz erzählt dieses in einem Aufsatze über die zweyzifferige Rechenkunst (Arithmétique binaire), der in den Mém. de l'Acad. des Sciences a. 1703. und in der Sammlung seiner Werke, T. III. nr. 68. befindlich ist, auch mit dem oben gedachten Schreiben besonders abgedruckt von Nolten 1734 herausgegeben worden. Er empfiehlt sie nicht zum Gebrauch statt der gewöhnlichen, sondern weil sie Gelegenheit zu Entdeckungen über den Bau der Zahlen geben könne.

Dyadische Arithmetik, Arithmetica dyadica sive binaria, die Rechnung mit Zahlen nach der binarischen Form. Brander hat eine gute Anweisung dazu gegeben. Arithmetica binaria s. dyadica, d. i. die Kunst nur mit zwey Zahlen (Ziffern) in allen Fällen zu rechnen. Augsburg 1769 u. 1775.



Ende des ersten Theils, erste Abtheilung.

Druckfehler.

S. 6 Z. 1 st. $\frac{ab}{ef} + cd$, l. $\frac{ab}{ef} \times cd$.

— 15 — 10 v. u. st. Vierecke l. Vielecke.

— 17 — 17 st. anylitische l. analytische.

— 21 — 3 v. u. st. Tab. l. Tom.

— 22 — 3 st. Integralrechnung l. Integralgleichung.

— 24 — 17 st. $\frac{u^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^2 \Psi y}{dy^2}$ l. $\frac{u^2}{1 . 2} \cdot \frac{d^2 \Psi y}{dy^2}$.

Das. — 19 st. $\Psi x +$ l. $\Psi x =$

— 44 — 13 v. u. st. Würfeln l. Wurzeln.

— 47 — 3 das Wort, positiven, wegzulassen.

— 74 — 2 st. $\div z$ l. $+ z$.

— 86 — 9 st. Mathematik l. Mechanik.

— 89 — 9 st. Walis l. Wales.

— 92 — 10 v. u. st. AP, PM l. AP : PM.

— 96 — 1 nach Linie zu setzen AB.

— 103 — 9 im Nenner des Bruchs st. A^{m-1} zu setzen B^{m-1}.

— 110 — 13 st. Geometrie l. Goniometrie.

Das. — 21 st. $a(a \times x)$. l. $a(a + x)$.

— 112 — 10 st. $- 2AD, AP. \cos DAP$ l. $- 2AD . AP . \cos DAP$.

— 118 — 6 v. u. st. ΔANA l. ΔANQ.

— 119 — 7 v. u. st. q^2 l. y^2.

— 126 — 6 v. u. st. $2 \sin \varphi, \cos \varphi$ l. $2 \sin \varphi . \cos \varphi$.

— 128 — 8 v. u. st. 52:180 l. 180:52.

— 129 — 9 st. $x^2(b-x)^2$ l. $a^2(b-x)^2$.

— 165 — 3 v. ob. st. $\sqrt{1}$ l. $\sqrt{-1}$.

— 188 — 13 st. Progression l. Proportion.

— 192 — 14 st. + vor der Wurzelgröße zu setzen ±. Eben so Z. 17 u. 19.

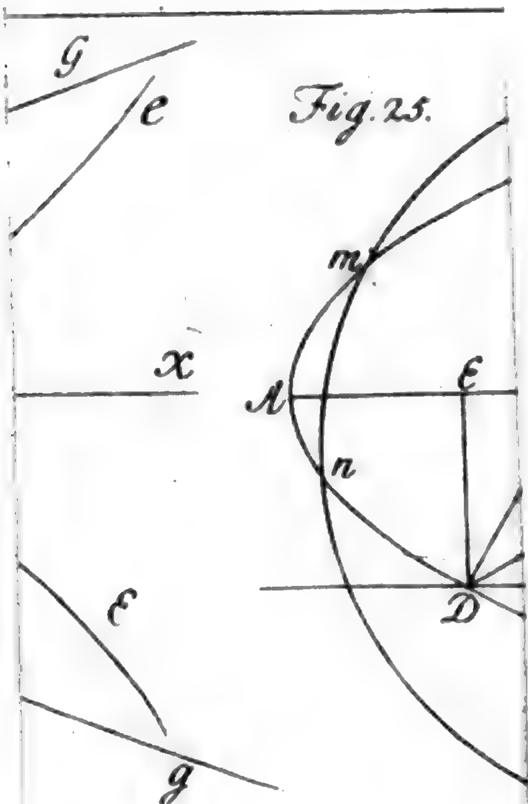
— 201 Z. 5 v. u. st. ΛA l. ΔA.

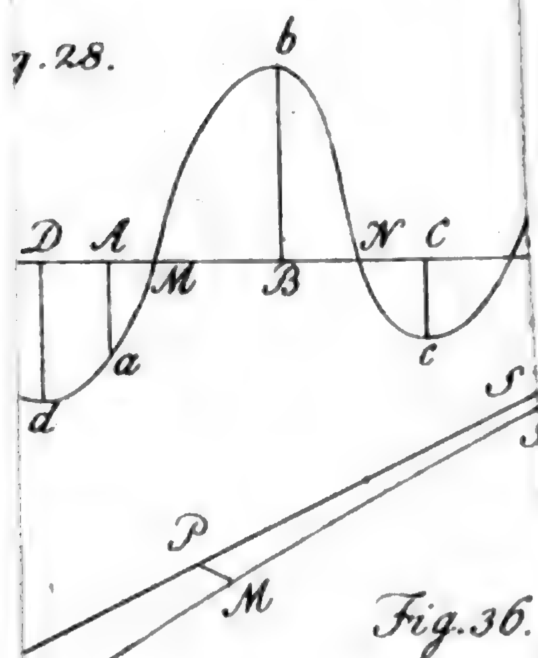
— 247 — 9 v. u. st. $3A-1$ l. $3A-1$.

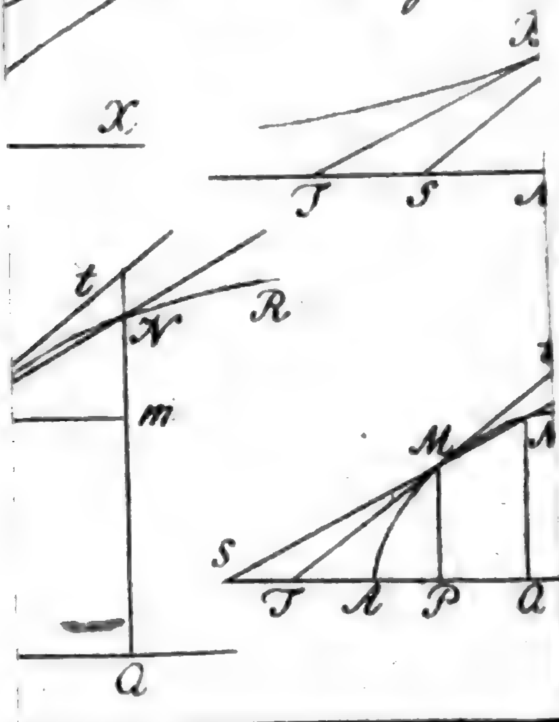
— 249 — 5 st. 2 + l. + 2.

— 264 — 7 dem Absatze vorzusetzen 13*.

S. 332 — 3 l. $(1+z)^{-\frac{n}{m}}$.
Das. — 4 v. u. st. $(1+2)^{\frac{2}{3}}$ l. $(1+z)^{\frac{2}{3}}$.
— 348 — 1 st. $\frac{1}{2}$(B l. $\frac{1}{2}$CB.
— 383 — 18 von u. st. das l. des.
Das. — 14 v. u. st. 2m — l. 2m—1.
Das. — 8 v. u. st. 1 l. I.
— 439 — 3 v. u. st. CQ l. P, Q.
— 464 — 9 st. $(4a3b^2d$ l. $4a(3b^2d$.
— 541 — 7 st. Commentarie sur la Géométaire l. Commentaire sur la Géométrie.
— 561 — 10 st. Cosische l. Cossische.
— 564 — 8 st. Walsnessley l. Walmesley.


G
e
Fig.25.
m
x
A
E
n
D
E
g


g.28.
b
D
A
N
C
M
B
a
c
d
S
P
M
Fig.36.


X
T
S
t
N
R
m
M
S
T
A
P
Q
Q

